УДК 624.07:534.1

ДИНАМИКА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НА ОПОРАХ ОБОЛОЧКИ С НЕПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНОЙ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2011 А.И. Полунин

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова

Поступила в редакцию 28.02.2011

В статье рассмотрено получение уравнений динамики вращающейся на опорах оболочки типа Кирхгофа-Лява с растяжимой срединной поверхностью, имеющей неравномерную кривизну. Приведены результаты расчетов по исследованию влияния параметров кривизны на амплитуду колебаний оболочки.

Ключевые слова: *динамика вращающейся оболочки, стоячая волна, прецессионное движение волны, кривизна срединной поверхности оболочки*

Вращающиеся на опорах оболочки широко используются в различных отраслях промышленности в технологических процессах, однако научные работы, посвященные анализу динамики и напряженно-деформированного состояния таких конструкций в процессе их функционирования, практически отсутствуют. Кроме того, существует современная технология обработки крупногабаритных (диаметром до нескольких метров) колец с целью придания им круговой формы. Кольцо ставится в вертикальной плоскости на два опорных ролика, приводится во вращение электроприводом и обрабатывается приставным станочным модулем. В процессе такой обработки возникают колебания кольца, влияющие на качество формообразования, что необходимо учитывать.

Цель работы: вывод дифференциальных уравнений динамики вращающейся на двух опорах оболочки типа Кирхгофа-Лява с растяжимой срединной поверхностью непостоянной кривизны.

При выводе уравнений, кроме гипотез Кирхгофа-Лява, принимаем, что оси опорных роликов параллельны, образующая оболочки в процессе деформации остается прямой линией, оболочка вращается с постоянной скоростью **Ω**. Это позволит легко учесть условия связи в точках опор. Для задания положения точек отсчетной поверхности вращающейся оболочки используем цилиндрическую систему координат θ, *r*, *У*, где θ – угол, задающий положение точки на отсчётной поверхности оболочки относительно вертикали, r_0 – радиус оболочки, *У* – линейная координата вдоль оси оболочки. Начало системы координат находится в ее середине. Ширина оболочки *a*, толщина *h*. Угол между опорами 2*α*.

Найдём зависимости для учёта влияния непостоянства кривизны срединной поверхности вращающейся на 2 опорах оболочки на её динамику. Примем, что радиус срединной поверхности оболочки зависит только от угла θ и выражается формулой

$$r = r_0 + A\sin\left(K\theta\right). \qquad (1)$$

Основной трудностью в получении уравнений в частных производных, описывающих динамический процесс, и их решении, является наличие опор. Кроме того, уравнения должны учитывать прецессию, возбужденных действием возмущений, стоячих волн [1]. В нашем случае наиболее целесообразно свести задачу в частных производных к задаче с сосредоточенными параметрами. Для этого перемещения точек срединной поверхности зададим линейными перемещениями: радиальным U_0, осевым *W*, тангенциальным *V*, а также углом поворота γ(θ) образующей оболочки в плоскости, проходящей через радиус *r* и ось *У*. Такое задание деформации позволяет учесть различные перемещения точек оболочки при изменении координаты *У*, а также наличие опор. Отсюда имеем зависимости:

$$U\left(\theta, У\right) = U_0\left(\theta\right) + \gamma(\theta)У, \qquad (2)$$

$$U_0 = a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_{ui}\cos(i(\theta+\varphi_{ui})) + \sum_{i=1}^{N} b_{ui}\sin(i(\theta+\varphi_{ui})), \qquad (3)$$

Полунин Александр Иванович, кандидат технических наук, профессор кафедры программного обеспечения ЭВМ. E-mail: polynin@intbel.ru

$$V=\sum_{i=1}^{N}a_{vi}\cos(i(\theta+\varphi_{vi}))+\sum_{i=1}^{N}b_{vi}\sin(i(\theta+\varphi_{vi})),\qquad(4)$$

$$W=\sum_{i=1}^{N}a_{wi}\cos(i(\theta+\varphi_{wi}))+\sum_{i=1}^{N}b_{wi}\sin(i(\theta+\varphi_{wi})),\qquad(5)$$

$$\gamma=\sum_{i=1}^{N}a_{\gamma i}\cos(i(\theta+\varphi_{\gamma i}))+\sum_{i=1}^{N}b_{\gamma i}\sin(i(\theta+\varphi_{\gamma i}))\qquad(6)$$

Здесь: a_0, a_{ui}, b_{ui}, a_{vi}, b_{vi}, a_{wi}, b_{wi}, a_{yi}, b_{yi} – обобщенные координаты; φ_{ui}, φ_{vi}, φ_{wi}, φ_{yi} – функции времени, задающие прецессию стоячих волн. В соответствие с [1] $\dot{\varphi}_{ui}=\dot{\varphi}_{vi}=\dot{\varphi}_{wi}=\dot{\varphi}_{\gamma i}=\Omega$ ($i=1,2,\ldots,N$). Точка означает дифференцирование по времени.

Примем, что оболочка касается опорных роликов по всей длине своих образующих, т.е. опорные ролики выставлены без ошибок. Тогда условиями, накладываемыми на обобщенные координаты оболочки, является равенство нулю перемещений U, V, W в точках опор. Так как оболочка вращается, то координаты θ точек оболочки, в связанной с ней системе координат, находящихся на опорах, определяем зависимостями $\pi-\alpha-\Omega t$ для одной опоры и $\pi+\alpha-\Omega t$ для второй. Выполнение этих условий для любого значения времени t и координаты $У$ для перемещений U, V, W, а также учет характера прецессионного движения стоячей волны дает восемь условий связи на обобщенные координаты, описывающие динамику оболочки, и, соответственно, 8 неопределенных множителей Лагранжа, используемых для учета условий связи при получении дифференциальных уравнений с помощью формализма Лагранжа. Уравнения связей имеют вид:

$$a_0+\sum_{i=1}^{N}\left[a_{ui}\cos\left(i\left(\pi-\alpha\right)\right)+b_{ui}\sin\left(i\left(\pi-\alpha\right)\right)\right]=0,\qquad(7)$$

$$a_0+\sum_{i=1}^{N}\left[a_{ui}\cos\left(i\left(\pi+\alpha\right)\right)+b_{ui}\sin\left(i\left(\pi+\alpha\right)\right)\right]=0,\qquad(8)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left[a_{\gamma i}\cos\left(i\left(\pi-\alpha\right)\right)+b_{\gamma i}\sin\left(i\left(\pi-\alpha\right)\right)\right]=0,\qquad(9)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left[a_{\gamma i}\cos\left(i\left(\pi+\alpha\right)\right)+b_{\gamma i}\sin\left(i\left(\pi+\alpha\right)\right)\right]=0,\qquad(10)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left[a_{vi}\cos\left(i\left(\pi-\alpha\right)\right)+b_{vi}\sin\left(i\left(\pi-\alpha\right)\right)\right]=0,\qquad(11)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left[a_{vi}\cos\left(i\left(\pi+\alpha\right)\right)+b_{vi}\sin\left(i\left(\pi+\alpha\right)\right)\right]=0,\qquad(12)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left[a_{wi}\cos\left(i\left(\pi-\alpha\right)\right)+b_{wi}\sin\left(i\left(\pi-\alpha\right)\right)\right]=0,\qquad(13)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left[a_{wi}\cos\left(i\left(\pi+\alpha\right)\right)+b_{wi}\sin\left(i\left(\pi+\alpha\right)\right)\right]=0.\qquad(14)$$

Найдем уравнения, описывающие динамику вращающейся на опорах оболочки при неравномерности кривизны ее срединной поверхности, используя уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^{П}}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T^{П}}{\partial q_j}+\frac{\partial П^{П}}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i e_{ij}+G_j,\qquad(15)$$

где $T^{П}$, $П^{П}$ – кинетическая и потенциальная энергии соответственно; q_j – j-ая обобщенная координата; t – время; k – число связей, наложенных на координаты q_j; λ_i – неопределенный множитель Лагранжа; e_{ij} – производная i-го уравнения связи по j-ой координате; G_j – внешняя сила, действующая по координате q_j. Кинетическую энергию оболочки в этом случае с использованием (2) – (6) можно записать [2]:

$$T^{П}=\frac{\rho_0 h}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[r_0+A\sin\left(K\theta\right)\right]*$$
$$*\left[\left\{\dot{V}+\Omega\left(r_0+A\sin\left(K\theta\right)\right)+\Omega U\right\}^2+\right.$$
$$\left.+\left(\dot{U}-\Omega V\right)^2+\dot{W}^2\right]d\theta dУ,\qquad(16)$$

а потенциальную [3] как

$$П^{П}=\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{aB_\theta}{2r}+\frac{aD_\theta}{2r^3}+\frac{aC_\theta}{r^2}\right)\left(V'\right)^2+\right.$$
$$+\frac{aB_\theta}{2r}U_0^2+\frac{a^3B_\theta}{24r}\gamma^2+\left(\frac{aB_\theta}{r}+\frac{aC_\theta}{r^2}\right)U_0V'+$$

$$+\frac{aB_G}{2r}\left(W'\right)^2+\frac{aD_\theta}{2r^3}\left(U_0''\right)^2+\frac{a^3D_\theta}{24r^3}\left(\gamma''\right)^2+$$
$$+\left(-\frac{aD_\theta}{r^3}-\frac{aC_\theta}{r^2}\right)V'U_0''+\frac{2aD_G}{r}\left(\gamma'\right)^2+$$
$$+\left(-\frac{aC_\theta}{r^2}\right)U_0U_0''+\left(\frac{a^3C_\theta}{12r^2}\right)\gamma\gamma''+$$
$$+\left(-\frac{2aC_G}{r}\right)W'\gamma'\Bigg\}d\theta \quad . \qquad (17)$$

Здесь: ρ_0 – удельная плотность материала; B_θ, B_G, D_θ, D_G, C_θ, C_G – константы, зависящие от геометрических и прочностных характеристик оболочки.

Основной проблемой, возникающей при решении этой задачи, является аналитическое вычисление интеграла для потенциальной энергии, т.к. в этом случае появляется функция синуса в знаменателе интегрируемой функции, что затрудняет аналитическое вычисление интегралов. Рассмотрим приближённый метод решения поставленной задачи, основанный на разложении функции, где присутствует радиус оболочки, в ряд Тейлора с учётом линейных членов разложения. Это позволяет перенести периодическую функцию, задающую отличие радиуса от постоянного, в числитель, что упрощает проведение аналитических вычислений. Осуществляя это преобразование, получим $T^П=T+T_r$, $П^П=П+П_r$, где T, $П$ – соответственно кинетическая и потенциальная энергия оболочки постоянного радиуса r_0, T_r, $П_r$, - составляющие кинетической и потенциальной энергии, учитывающие непостоянство кривизны срединной поверхности. Формулы для T и $П$ приведены в [1], формулы для T_r, $П_r$ в данной статье не приводятся вследствие их громоздкости.

Дифференцирование кинетической и потенциальной энергий (16), (17) в соответствии с (15) дает систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику вращающейся на опорах оболочки с непостоянной кривизной срединной поверхности. Окончательно эту систему можно представить в виде:

$$\left(A_2+B_2\right)\ddot{q}+\left(A_1+B_1\right)\dot{q}+\left(A_0+B_0\right)q=$$
$$=M\lambda\ +P, \qquad (18)$$

где A_2, A_1, A_0 – матрицы с постоянными коэффициентами, используемые для описания динамики оболочки постоянного радиуса r_0; B_2, B_1, B_0 – матрицы с периодическими коэффициентами, используемые для учета влияния непостоянства кривизны срединной поверхности; q – полный вектор обобщенных координат; M – матрица производных условий связи (7) - (14) по обобщенным координатам; λ – вектор неопределенных множителей Лагранжа; P – вектор правых частей – возмущающих сил, возникающих вследствие непостоянства кривизны срединной поверхности оболочки. Является периодической функцией времени, зависящей от угловой скорости вращения оболочки. Для получения решения системы необходимо использовать условия связи в точках опор (7) - (14). Окончательная система уравнений в статье не приводится вследствие громоздкости. Получение решения этой системы аналитическим способом весьма проблематично, поэтому использовался метод гармонического баланса. Для этого из системы уравнений (18) были исключены неопределенные множители Лагранжа и использованы условия связи в точках опор. В результате получили систему уравнений вида

$$K_2\,\ddot{y}+K_1\,\dot{y}+K_0y=F_\omega\,, \qquad (19)$$

где K_2, K_1, K_0 – матрицы периодических коэффициентов; y – вектор обобщенных координат, состоящий из $8N$-7 компонент; $F\omega$ - вектор периодических функций времени, задающий действие на оболочку возмущающих сил вследствие неравномерности кривизны срединной поверхности. Решением этой системы являются периодические функции, и они могут быть представлены в виде разложения в ряд Фурье. Нахождение коэффициентов этого ряда осуществлялось путем решения системы линейных алгебраических уравнений, получаемой путем вычисления интегралов от произведения левой и правой частей системы дифференциальных уравнений (19) с гармониками используемого ряда Фурье.

Для исследования влияния непостоянства кривизны срединной поверхности вращающейся на опорах оболочки типа Кирхгофа-Лява на ее динамику была разработана программа для решения полученной системы дифференциальных уравнений указанным методом. В таблице представлены результаты расчетов по исследованию влияния скорости вращения оболочки Ω в рад/с на амплитуду ее колебаний в мм по координате U для точки с координатами в неподвижной системе координат $\theta = \pi/2$, У=0 при разных значениях коэффициента K в (1), характеризующего кривизну оболочки. Радиус срединной поверхности оболочки r_0 = 2 м, угол между опорами 2α = 50 градусов, толщина h = 1 10^{-2} м, ширина a = 0,2 м, модуль упругости $E=1,18\ 10^{11}$ н/м^2. Амплитуда А в формуле (1) равна 1 10^{-2}м. Результаты расчетов показывают, что с увеличением номера гармоники К значение угловой скорости вращения оболочки, при которой возникает резонанс, уменьшается.

Таблица. Результаты расчетов

К	1				2				3			
Ω	1	3	4,04	5	1	2	2,71	3	1	1,5	1,99	3
U	0,15	2,2	4,6 10^3	1,2	0,2	1,3	1,4 10^3	2,9	0,03	0,07	46	0,5

Выводы: полученная математическая модель и разработанная программа могут использоваться для анализа влияния непостоянства кривизны срединной поверхности вращающейся на опорах оболочки типа Кирхгофа-Лява на ее динамику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Полунин, А.И.* Математическое моделирование динамики упругой вращающейся оболочки с опорами / *А.И. Полунин.* – Белгород: Изд-во БГТУ, 2008. 164 с.
2. *Журавлёв, В.Ф.* Волновой твёрдотельный гироскоп / *В.Ф. Журавлёв, Д.М. Климов* – М.: Наука, 1985. 126 с.
3. *Аксельрад, Э.Л.* Гибкие оболочки / *Э.Л. Аксельрад*. – М.: Наука, 1976. 376 с.

DYNAMICS OF THE COVER ROTATING ON SUPPORT WITH CHANGEABLE CURVATURE OF THE MEDIAN SURFACE

© 2011 A.I. Polunin

Belgorod State Technological University named after V.G. Shuhov

In article reception of the equations of dynamics of Kirchhoff-Layve type cover rotating on support with the extensible median surface having non-uniform curvature is considered. Results of calculations on research of influence of curvature parameters on amplitude of cover fluctuations are resulted.

Key words: *dynamics of rotating cover, standing wave, precession wave movement, curvature of cover median surface*

Alexander Polunin, Candidate of Technical Sciences, Professor at the Software Department. E-mail: polynin@intbel.ru