

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ЗОНЕ КОНТАКТА ДВУХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

© 2011 Р.С. Привалихин

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

Поступила в редакцию 22.03.2011

В работе представлен расчет контакта цилиндров конечной длины. Учтено действие краевого эффекта, влияние его на геометрию площадки контакта и напряженное состояние в окрестностях края цилиндра. Результаты решения сравниваются с аналитическим решением контактной задачи Герца.

Ключевые слова: *краевой эффект, контактное напряжение, зубчатое зацепление, подшипник качения*

Экспериментальное исследование контактных напряжений и геометрических размеров площадки контакта, находящихся вблизи зоны касания на линейном контакте цилиндрических тел представляет большие трудности. При проведении эксперимента весьма сложно обеспечить равномерное распределение нагрузки вдоль полосы контакта. Препятствуют этому перекосы и неточности форм поверхностей, мешающие исследователю понять истинную картину происходящего. Решение этих задач усложняется и так называемым краевым эффектом, который вызывает повышение напряжений по краям линий, ограничивающих область контакта, и не определяется методиками, изложенными в работах отечественных и зарубежных ученых [1-4]. Для выявления закономерностей распределения давлений и напряженных состояний в окрестности краевых зон можно использовать численные методы, которые находят все большее распространение на основе программных комплексов. Широки возможностями обладает программный комплекс Ansys, позволяющий решать задачи практически всех инженерных направлений.

При взаимодействии двух цилиндров, имеющих два радиуса кривизны, каждый, начальное касание происходит в точке. Если один радиус кривизны, тогда контакт происходит по линии. В силу своих упругих свойств тела деформируются и создают площадки контакта конечных размеров. В случае точечного контакта площадка приобретает форму эллипса. В случае касания по линии форма площадки становится прямоугольной. Для определения геометрии площадки контакта, распределения давления на ней и нахождения составляющих напряженного состояния в

околоконтактной зоне с приемлемой точностью, обычно применяется теория Герца-Беляева [1, 2] в случае эллиптической площадки. Однако в случае прямоугольной площадки эта теория имеет смысл только для средней части цилиндра конечной длины, так как на краях появляется резкое увеличение контактных давлений обусловленной краевым эффектом. Этот эффект не учитывается в теории Герца-Беляева, где сделано очень серьезное допущение о бесконечности длины обоих контактируемых тел не имеющих краев. Для учета краевых эффектов необходимо привлекать численные методы.

Цель работы: получение и исследование распределения давления и напряженного состояния вблизи краев контактирующих цилиндров с использованием программного модуля Ansys/multiphysics.

Адекватность результатов. Для проверки правильности решения данной задачи результаты, полученные с помощью препроцессора Ansys, сравниваются с результатами математической модели контактной задачи Герца по критериям максимального давления и ширины площадки контакта находящихся в центре длины цилиндра. Математическая модель контактной задачи соответствует частному случаю взаимодействия двух цилиндров.

Описание задачи. Контакт двух цилиндров происходит под воздействием силы F . Радиус кривизны первого цилиндра $R_1=3,75$ мм, радиус скруглений по торцам цилиндра $R_{ск}=0,5$ мм, контактная длина цилиндра $l=6,5$ мм. Радиус кривизны второго цилиндра $R_2=19,25$ мм. Радиальная сила F , действующая на цилиндры, составляет 840,384 Н. Свойства материала цилиндров: модуль упругости $E_{1,2}=2,1 \times 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu_{1,2}=0,33$.

Описание математической модели задачи Герца. При контакте цилиндров под действием распределенной нагрузки по центральной линии в области касания образуется прямоугольная площадка контакта с полушириной b_r (рис. 1), по которой распределяется контактное давление, данная постановка является частным случаем решения задачи Герца. В данной постановке предполагается, что тела обладают бесконечной длиной вдоль оси x .

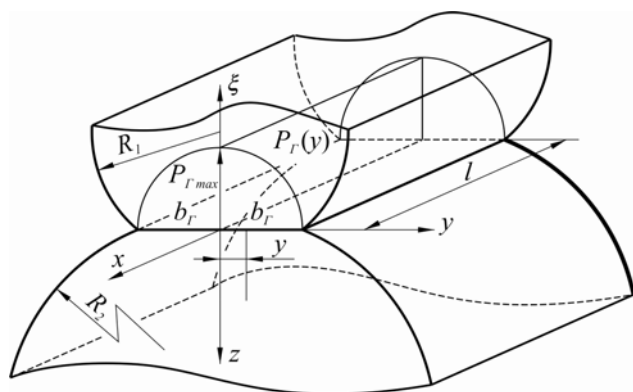


Рис. 1. Взаимодействие двух цилиндров и распределение давления между ними

Порядок расчета: Сначала определим кривизны поверхностей $k_{\Sigma}=1/R_1+1/R_2=318,615$ 1/м. Далее находим коэффициент упругих свойств материала $\eta=1 \square v_1^2/E_1 + 1 \square v_2^2/E_2 = 84,866 \times 10^{-11}$ м²/Н. Вычисляем нагрузку, действующая на единицу длины цилиндра $q=Q/l=129289,941$ Н/м. Полуширина площадки контакта $b_r = \sqrt{4\eta q / \pi k_{\Sigma}} = 6,621 \times 10^{-5}$ м.

Максимальное давление в центре площадки контакта

$$P_{r \max} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{k_{\Sigma}}{\eta}} q = 1,243 \text{ Па} \quad (1)$$

Функция распределения давления по площадке контакта

$$P_r(y) = P_{r \max} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \quad (2)$$

где $y=[0,b]$ – переменная координата ширины площадки контакта.

Описание построения моделей в программном пакете Ansys/Multiphysics. На рис. 2 представлены три конечно-элементные модели.

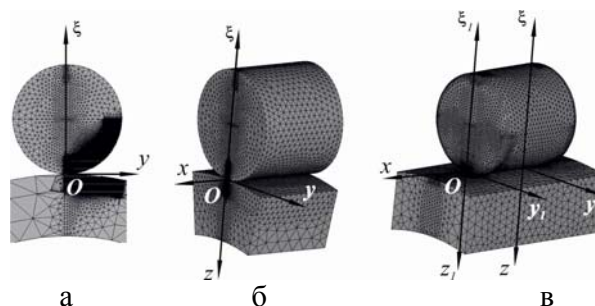


Рис. 2. Исследуемые модели и их расположение систем координат: а – первая постановка, б – вторая постановка, в – третья постановка

Таблица 1. Граничные условия для первой, второй и третьей постановок

		Первая постановка (рис. 2, а)	Вторая постановка (рис. 2, б)	Третья постановка (рис. 2, в)	
тип элемента	Модель		PLANE182	SOLID45	
	контактные поверхности	целевая (нижний цилиндр)	TARGET169	TARGET170	
		контактная (верхний цилиндр)	CONTA172	CONTA174	
ГУ	нагрузка	значение	q	$Q/14$	$Q/16$
		приложение	к центру верхнего цилиндра	к каждому узлу центральной линии верхнего цилиндра, 14 узлов	к каждому узлу центральной линии верхнего цилиндра, 16 узлов
		направление	в сторону целевой поверхности перпендикулярно касательной к этой поверхности		
	закрепления	внутренняя поверхность нижнего цилиндра			

Первые две постановки соответствуют решению классической задачи Герца в плоскости (рис. 2, а) и объеме (рис. 2, б). Во второй постановке предполагается, что тела имеют бесконечную длину вдоль оси x . Третья постановка (рис. 2, в) создавалась на основе двух вышеперечисленных, длина тел ограничена и края верхнего цилиндра имеют форму скруглений с радиусом $R_{ск}$. На рис. 2, в плоскость z_1Oy_1 совпадает с точкой касания края верхнего цилиндра с поверхностью нижнего, плоскость zOy делит модель по длине на две равные части, оси ξ и ξ_1 – вспомогательные. Использована не вся поверхность нижнего цилиндра, а только его часть, находящаяся непосредственно в месте расположения верхнего. В околоконтактной зоне уменьшена сетка конечных элементов. Типы элементов и граничные условия (ГУ) для каждой задачи отражены в таблице 1.

Адекватность построенных моделей в программном пакете Ansys/Multiphysics с математической моделью задачи Герца. Проверка проводилась по критерию контактного давления, создаваемого в контактной паре. На рис. 3 представлены графики распределения давления по площадке контакта в плоскости ξOy .

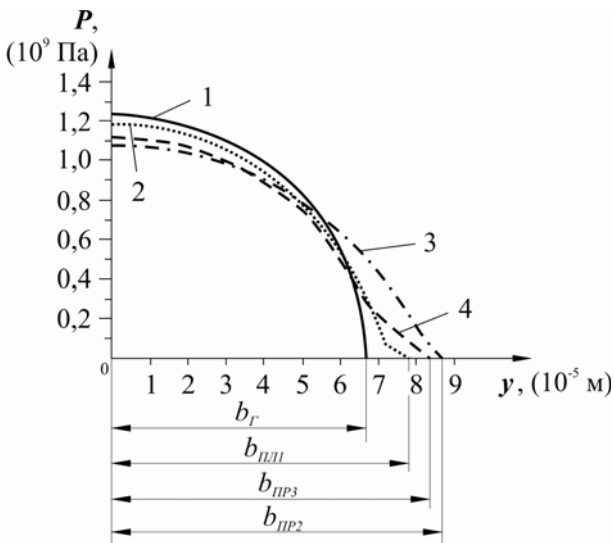


Рис. 3. Распределение давления в плоскости ξOy : линия 1 – по Герцу $P_{Г}(y)$, линия 2 – в первой постановке задачи $P_{III}(y)$, линия 3 – во второй постановке задачи $P_{III2}(y)$, линия 4 – в третьей постановке задачи $P_{III3}(y)$

Каждая линия графика соответствует распределению давления по площадке контакта для каждой из поставленных задач. Линия 1 соответствует аналитическому решению задачи Герца, в которой давление распределяется по закону (2), где значение максимального

давления определено формулой (1). Линии 2, 3, 4 соответствуют распределению давления в первой (рис. 2, а), второй (рис. 2, б) и третьей (рис. 2, в) постановках, соответственно. Максимальные давления и полуширины площадок контакта для первой, второй и третьей постановок принимают значения: $P_{III1max}=1,185 \times 10^9$ Па, $b_{III1}=7,8 \times 10^{-5}$ м, $P_{III2max}=1,077 \times 10^9$ Па, $b_{III2}=8,4 \times 10^{-5}$ м; $P_{III3max}=1,121 \times 10^9$ Па, $b_{III3}=8,4 \times 10^{-5}$ м, соответственно. Наблюдается излом линий 2, 3, 4 близ оси ординат в сторону возрастания полуширины площадки контакта. Это вызвано тем, что конечная точка графиков совпадает с узлом конечно-элементной модели. Поэтому можно сказать, что значение величины площадки контакта чуть больше значения y точки излома кривых. Для получения более точного решения можно разбить модель на еще большее число конечных элементов, но расхождения не велики, и конечный результат можно считать удовлетворительным. Сравнение величин максимальных давлений первой, второй и третьей постановок с величиной максимального давления в решении задачи Герца дало следующие результаты: $P_{III1max}/P_{Гmax} = 0,953$; $P_{III2max}/P_{Гmax} = 0,866$; $P_{III3max}/P_{Гmax} = 0,902$.

Влияние краевого эффекта. Распределение давлений. Очень серьезной и вместе с тем малоизученной особенностью линейного контакта является краевой эффект, которым принято называть повышение давления у концов двух соприкасающихся цилиндров. На рис. 4 представлена 1/4 часть площадки контакта, в третьей постановке задачи.

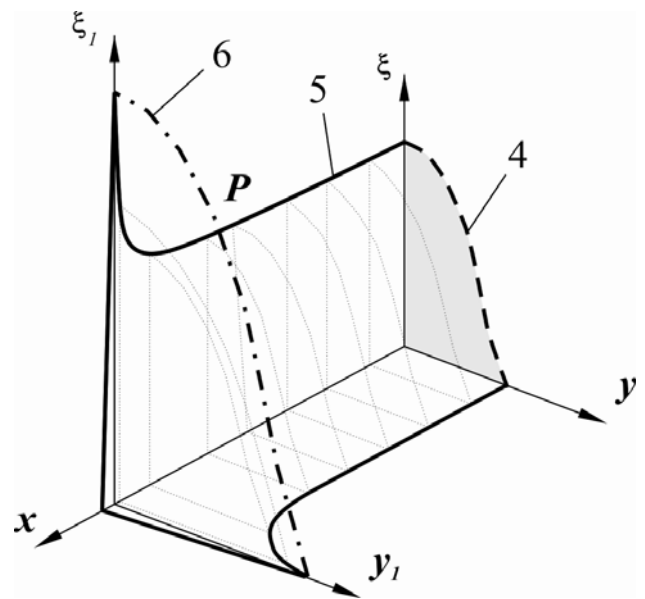


Рис. 4. Распределение давления по 1/4 части площадки контакта

Представим числовые значения на рис. 5. Рис. 5 является разверткой рис. 4. $b_L=3,3 \times 10^5$ м – полудлина площадки контакта, $b_K=1 \times 10^4$ м – полуширина площадки контакта на краю цилиндра, P_{Kmax} – максимальное значение давления на краю цилиндра, P_{Lmax} – максимальное значение давления по цилиндру. Расположение плоскостей $\xi O x$, $\xi O y$ и $\xi_1 O y_1$ можно увидеть на рис. 2 в.

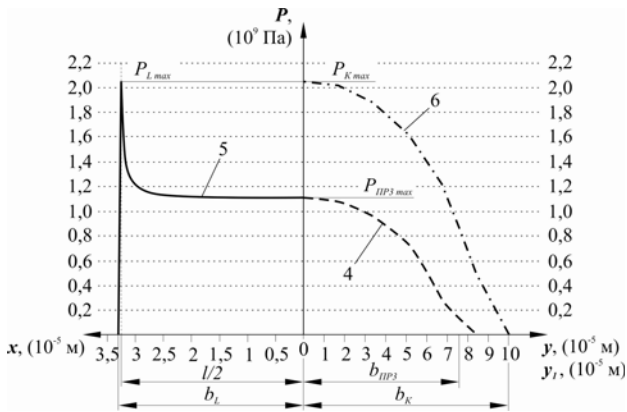


Рис. 5. Распределение давления на площадке контакта по осям x , y , y_1 . Линия 5 $P_L(x)$ находится в плоскости $\xi O x$, где давление распределено по длине цилиндра; линия 4 представлена на рис. 3; линия 6 $P_K(y_1)$ в плоскости $\xi_1 O y_1$, давление распределено по краю цилиндра

График (рис. 5, линия 5) имеет постоянное значение на большей части длины цилиндра, однако при приближении к краю имеет место резкий скачок давления: $P_{Kmax} = P_{Lmax} = 2,054 \times 10^9$ Па. Точка пика совпадает с точкой края цилиндра, значение ее на оси x соответствует $l/2=3,25$. Такое распределение выходит за рамки теории Герца, пик давления на краях примерно в 1,8 раза превышает распределение давления в плоскости, проходящей через центр цилиндра: $P_{Kmax}/P_{ПП3max}=1,832$.

Постановки задач на рис. 2 а и рис. 2 б, как уже говорилось, соответствовали решению Герца. В первой постановке распределение давления находится в плоскости $\xi O x$ (рис. 6, а).

Во второй постановке сделано предположение о бесконечной длине контактируемых тел, и давление распределяется равномерно (рис. 6, б). В третьей постановке (рис 2, в) контактные давления достаточно точно рассчитываются по теории Герца вдоль большей части длины цилиндра, однако вблизи торцов (рис. 6, в) наблюдается резкое увеличение давление, распределение которого принимает вид "собачьей кости" [7].

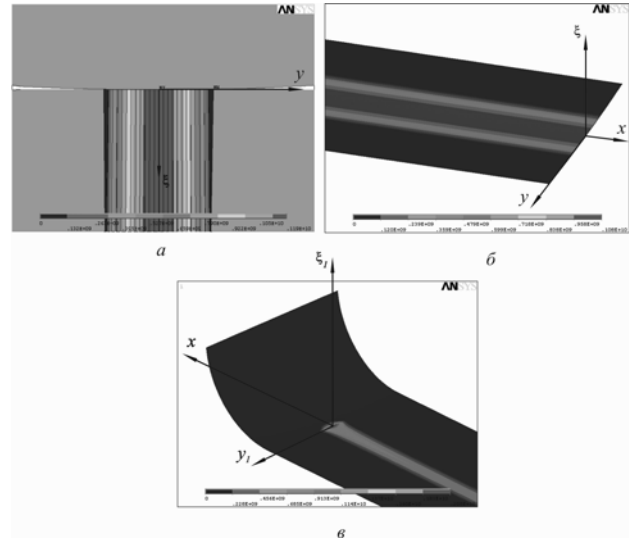


Рис. 6. Распределение давления на площадке контакта в разных постановках задачи: а – первая постановка, б – вторая постановка, в – третья постановка

Напряженное состояние. Рассмотрим распределение напряжений внутри цилиндра (рис. 7), выраженных в безразмерных координатах. $\sigma_{ПП3x}$, $\sigma_{ПП3y}$, $\sigma_{ПП3z}$, $\sigma_{ПП3z}$ – компоненты напряжения x , y , z и эквивалентное напряжение, действующие вглубь от центра цилиндра. σ_{Kx} , σ_{Ky} , σ_{Kz} , σ_{Kz} – компоненты напряжения x , y , z и эквивалентное напряжение действующие вглубь нижнего цилиндра от точки касания края верхнего цилиндра.

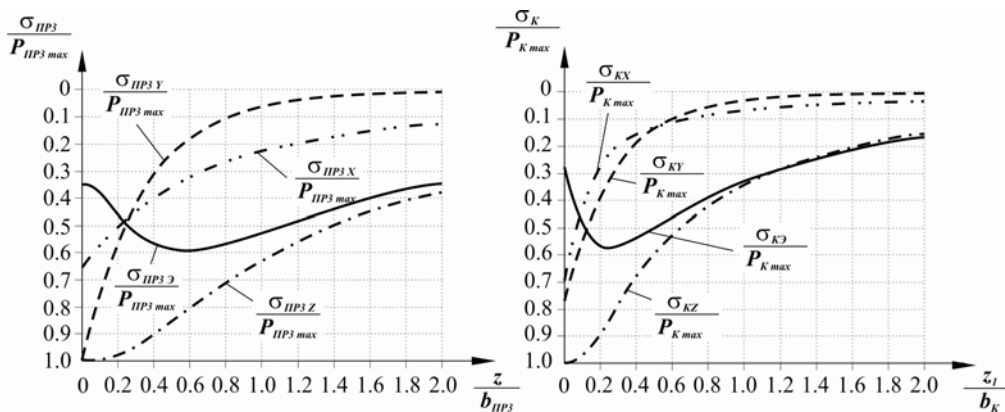


Рис. 7. Распределение напряжений внутри цилиндра в третьей постановке задачи: слева – по оси z , справа – по оси z_1

Графики распределения напряжений на рис. 7 (слева) подтверждают правильность решения задачи Герца-Беляева о распределении напряжений вдоль полосы контакта [2, 3, 7], однако наблюдается интересный эффект у края цилиндра (рис. 7, справа): напряжения σ_{KY}/P_{Kmax} и σ_{KX}/P_{Kmax} имеют практически одинаковые значения по всей глубине. Кривая эквивалентных напряжений σ_{KY}/P_{Kmax} имеет более крутой изгиб на крае нежели в центре $\sigma_{PP3\Theta}/P_{PP3max}$. Концентрация эквивалентных напряжений вдоль большей части длины находится на глубине 0,6, на краю это значение падает до 0,3. На рис. 8 представлены изолинии напряжений для третьей постановки задачи, где также можно заметить увеличение эквивалентных напряжений на краю цилиндра.

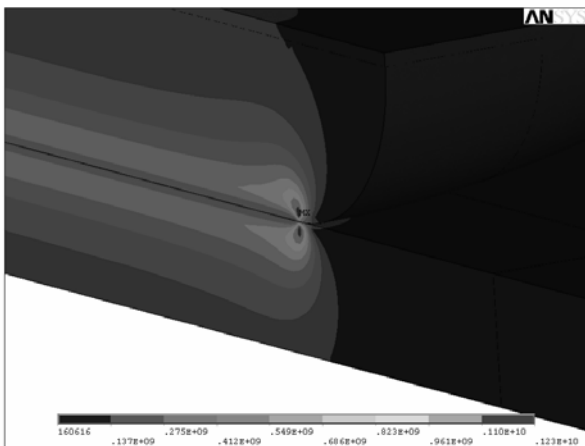


Рис. 8. Распределение эквивалентных напряжений в нижнем и верхнем цилиндрах в третьей постановке задачи

Выводы:

- Предложена методика расчета позволяющая анализировать задачи контакта цилиндр-цилиндр с разной геометрией краев тел с

помощью конечно элементного алгоритма в программном пакете Ansys.

- Данное исследование позволило получить распределение давлений и характеристики напряженного состояния, когда края цилиндра имеют форму скруглений у торцов.

- Кривые напряженного состояния, не соответствующие классическому решению задачи, следует проанализировать на нескольких примерах с разными геометриями краев тел в программном комплексе Ansys для выявления закономерностей краевого эффекта.

- Методика расчета применима для решения задач контактирования зубьев зубчатых колес, ролика и кольца подшипника качения, колеса и рельса, подшипника скольжения и коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания и других задач со схемой взаимодействия цилиндр-цилиндр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Hertz, H.* Über die Berührung fester elastischer Körper, Journal für die reine und angewandte. Mathematik. 1881. №92. S. 156-171.
2. *Беляев, Н.М.* Местные напряжения при сжатии упругих тел. – В сб.: Инженерные сооружения и строительная механика. – Л.: Путь, 1924. С. 27-108.
3. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник, том 2 (редакторы *И.А. Биргер, Я.Г. Пановко*). – М.: Машиностроение, 1968. С. 381-415.
4. *Roark, R.* Formulas for Stress and Strain. Seventh Edition. Mc Graw-Hill. New-York, 2002. P. 851.
5. *Чигаев, А.В.* ANSYS для инженеров. Справочное пособие / *А.В. Чигаев, А.С. Кравчук, А.Ф. Смалюк*. – М.: Машиностроение, 2004. 512 с.
6. ANSYS Basic Analysis Procedures Guide. ANSYS Release 5.6. ANSYS Inc., 1998. 112 с
7. *Джонсон, К.Л.* Механика контактного взаимодействия: пер. с англ. / *К. Джонсон*. – М.: Мир, 1989. 510 с.

TENSION IN CONTACT ZONE OF TWO CYLINDRICAL FINAL LENGTH BODIES

© 2011 R.S. Privalihin

Siberian Federal University, Krasnoyarsk

In work calculation of final length cylinders contact is presented. Action of regional effect, its influence on geometry of contact platform and a tension in neighbourhood of cylinder edge is considered. Results of the decision are compared with analytical decision of Hertz contact problem.

Key words: *regional effect, contact pressure, toothing, frictionless bearing*