*УДК 621.31*

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО МАГНИТА

© 2011 Е.М.Булыжёв, Е.Н.Меньшов, Г.А Джавахия

Ульяновский государственный технический университет
ЗАО «Булыжев. Промышленные экосистемы», г. Ульяновск

Поступила в редакцию 16.04.2010

Предложена математическая модель распределения скалярного магнитного потенциала, создаваемого в окружающем пространстве цилиндрическим или кольцевым постоянным магнитом.
Ключевые слова: магнитный сепаратор, эквивалентный соленоид, намагниченность, скалярный магнитный потенциал, напряженность магнитного поля, телесный угол, распределение поля.

Работа магнитного сепаратора основана на силовом притяжении постоянными магнитами взвешенных в жидкой среде ферромагнитных частиц. В высокопроизводительных магнитных сепараторах применяются магниты цилиндрической или кольцевой формы, поэтому в однородной среде задача имеет аналитическое решение. В [1] однородное приближение использовалось для оценки режимов магнитных сепараторов на основе представления решения уравнения Пуассона для скалярного магнитного потенциала в виде конечных рядов. Такое решение правомерно лишь в идеальной рабочей точке характеристики размагничивания (в эквипотенциальном приближении при напряженности размагничивающего поля $H_p=0$), а постоянные интегрирования не имеют явной связи с параметрами магнита, поэтому оно не подходит для задач оптимизации сепараторов.

В [2] описывается метод эквивалентного соленоида, который основан на возможности рассмотрения постоянного магнита как однослойного соленоида, имеющего очень тонкую обмотку, по которой протекает намагничивающий ток $i$. Линейная плотность поверхностного тока, приходящаяся на единицу длины соленоида, выбирается равной величине намагниченности магнита [3]

$$\frac{iW}{l} = M, \qquad (1)$$

где $W$ – число витков в обмотке соленоида, $l$ – длина соленоида, равная длине магнита. Следует заметить, что только внешнее поле эквивалентного соленоида эквивалентно полю магнита, внутри же они разные как по направлению, так и по величине [4].

*Булыжёв Евгений Михайлович, доктор технических наук, профессор. Тел.: (8422) 44-42-45.*
*Меньшов Евгений Николаевич, кандидат технических наук, доцент. E-mail: raynd2@rambler.ru.*
*Джавахия Георгий Анатольевич, аспирант кафедры «Технология машиностроения». E-mail: geo.d@mail.ru.*

В общем случае для материала магнетика намагниченность $M$ сильно зависит от напряженности поля размагничивании $H = -H_p$. Однако для магнитных закритических материалов $M(H)$ выражается формулой

$$M(H) = \frac{B_r}{\mu_0 H_{CB}}(H_{CB} + H) - H, \qquad (2)$$

которая описывает слабую зависимость $M$ от $H$ [2]. В частности, для Nd-Fe-B – материала при изменении $H$ от $H = 0$ до $H = -H_{CB}$ относительное различие $M(H)$ составляет небольшую величину

$$\frac{M(H_{CB})}{M_r} = \frac{\mu_0 H_{CB}}{B_r} < 1{,}2,$$

где $M_r = M(0)$. По этой причине значение остаточной намагниченности $M_p$, определяемое пересечением характеристики размагничивания материала с характеристикой формы, практически не зависит от формы магнита. Однако, тело магнита произвольной формы намагничивается неравномерно [5], за исключением сфероидальной формы. Но в силу слабого характера зависимости $M$ от поля размагничивания $(H = -H_p)$ для магнитов из закритических материалов, этой неоднородностью можно пренебречь и для расчетов можно использовать приближенное значение $M \approx M_r$.

На основе закона Био-Савара в [6] проведен расчет напряженности поля соленоида (его аксиальной $H_Z$ и радиальной $H_r$ составляющих). Однако, в данной методике содержится дефект, суть которого состоит в том, что напряженность поля как для одиночного контура, определенная в [3,5] через векторный потенциал, так и для однослойной обмотки, определяемая в [6], выражаются через эллиптические интегралы 1-го и 3-го рода. По этой причине данная методика приводит к сингулярности – значения поля в некоторых особенных точках, лежащих на поверхности соленоида, расходятся. В [7] показано, особенные точки появляются как следствие принятых математических допущений о бесконечно малой толщине токового слоя. А так как потенциал является своего рода первообразной функцией для напряженности поля, то в нем сингулярности могут пропадать.

В [6] приводится, также, строгий расчет напряженности поля постоянного магнита в произвольной точке (как внутри магнита, так и вне магнита). При этом постоянный магнит цилиндрической или кольцевой формы моделируется разноименными фиктивными магнитными зарядами, сосредоточенными на его противоположных торцевых поверхностях. Поверхностная плотность заряда равна $s_м = \pm M_r$. Полученные математические выражения поля свободны от дефектов сингулярности, но более сложны, так как представляют собой двойные интегралы.

Нами предлагается строгая и несложная математическая модель скалярного магнитного потенциала цилиндрического магнита диаметром *2a*, длиной *l*.

В [4-5] изложена методика, выражающая скалярный магнитный потенциал $j_M$, создаваемый контуром с током *I*, через телесный угол W, под которым виден этот контур

$$\varphi_M = \frac{I}{4\pi}\Omega + C, \tag{3}$$

где *C* – постоянная величина, так как потенциал определен с точностью до постоянной величины.

Представляя магнит в виде эквивалентного соленоида, предварительно разбивая его на элементарные контура и выделяя некоторый элементарный контур с элементарным током

$$dI = \frac{iW}{l}dz' = M_r dz', \tag{4}$$

запишем формулу потенциала элементарного контура

$$d\varphi_M = \frac{1}{4\pi}M_r dz'\Omega(z'). \tag{5}$$

Сначала определяем телесный угол, под которым виден элементарный контур из точки P, совмещенной с началом координат (рис.1, а), предварительно разбивая его на элементарные телесные углы *d*W, под которыми видны элементы площади $dS_К$ контура. В полярной системе координат величина

$$dS_К = r'd\Psi dr'. \tag{6}$$

Каждый элементарный телесный угол определяется формулой [8]

$$d\Omega = \frac{dS_{сф}}{R^2}, \tag{7}$$

где $dS_{сф}$ – площадь элемента сферы радиуса *R*. Из рис. 1, б следует то, что

$$dS_{сф} = dS_К\cos\theta;\ R=(z'^2+r'^2)^{1/2};\ \cos\theta = z'/R. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (6) и далее в (7), имеем

$$d\Omega = \frac{z'r'dr'd\psi}{(z'^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{9}$$

Полный телесный угол будет выражаться двукратным интегралом

$$\Omega = \iint\limits_{S_к} \frac{z'r'dr'd\psi}{(z'^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{10}$$

Вычисление интеграла (10) проводим по методике [7]. На рис. 2 представлена геометрия границ областей интегрирования телесного угла для двух случаев, когда проекция 0' начала координат 0 на плоскость контура лежит вне контура (*ri a*) или внутри контура (*rJ a*) .

Для случая, когда *ri a* (рис. 2, а)

$$\Omega = z'\int\limits_{\psi_{мин}}^{\psi_{мак}} d\psi \int\limits_{r_н}^{r_в} \frac{r'\,d\,r'}{(z'^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}} = 2z'\int\limits_{0}^{\psi_{мак}}\left[\frac{1}{\sqrt{z'^2+r_н^2}} - \frac{1}{\sqrt{z'^2+r_в^2}}\right]d\psi. \tag{11}$$

Для случая, когда *rJ a* (рис.2,б)

$$\Omega = z'\int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{r_в} \frac{r'dr'}{(z'^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi - 2z'\int\limits_0^{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{z'^2+r_в^2}}\right]d\psi. \tag{12}$$

Здесь: $r_н = r_н(Y)$ и $r_в = r_в(Y)$ радиус-векторы точек входа внутрь контура и выхода из контура луча у = const. Эти радиус-векторы определяются из уравнения окружности, которое в полярных координатах принимает вид

$$r'^2 - 2r\,r'\cos Y + r^2 - a^2 = 0,$$

из которого следует:

$$r_в = r\cos\Psi + (a^2 - r^2\sin^2\Psi)^{1/2},$$

$$r_н = r\cos\Psi - (a^2 - r^2\sin^2\Psi)^{1/2}; \tag{13}$$

$$\sin Y_{мак} = a/r. \tag{14}$$

Магнитный потенциал эквивалентного соленоида длиной *l* в точке P с координатами *z* и *r* (рис. 3) складывается из потенциалов (5) элементарных контуров

$$\varphi_M = \int\limits_{z_1}^{l+z_1} d\varphi_M + C = \frac{M_r}{4\pi}\int\limits_{z_1}^{l+z_1}\Omega(z'-z)dz' + C. \tag{15}$$

Для случая, когда *ri a,* подставляя (11) в (15) и меняя местами порядок интегрирования

$$\varphi_M = \frac{M_г}{2\pi}\int_0^{\psi_{мак}} d\psi \int_{z_1}^{l+z_1}\left[\frac{z'-z}{\sqrt{z'^2+r_н^2}} - \frac{z'-z}{\sqrt{z'^2+r_в^2}}\right]dz' + C =$$

$$= \frac{M_г}{2\pi}\int_0^{\psi_{мак}}\left[\sqrt{(l+z_1-z)^2+r_н^2} - \sqrt{(l+z_1-z)^2+r_в^2} + \right. \quad (16)$$

$$\left. + \sqrt{(z_1-z)^2+r_в^2} - \sqrt{(z_1-z)^2+r_н^2}\right]d\psi + C.$$

Здесь $z_1$ – координата нижней торцевой поверхности магнита, $C$ – постоянная величина.

Для случая, когда $r \to a$, подставляя (11) в (15) и меняя местами порядок интегрирования

$$\varphi_M = \frac{M_г l}{2} - \frac{M_г}{2\pi}\int_0^{\pi} d\psi \int_{z_1}^{l+z_1}\left[\frac{z'-z}{\sqrt{z'^2+r_в^2}}\right]dz' + C =$$

$$= \frac{M_г l}{2} - \frac{M_г}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\sqrt{(l+z_1-z)^2+r_в^2} - \sqrt{(z_1-z)^2+r_в^2}\right]d\Psi + C. \quad (17)$$

Определим осевую напряженность магнитного поля соленоида на основе выражения (17):

$$H_z = -\frac{\partial \varphi_М(r=0)}{\partial z} =$$

$$-\frac{M_г}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{l+z_1-z}{\sqrt{(l+z_1-z)^2+r_в^2}} - \frac{z_1-z}{\sqrt{(z_1-z)^2+r_в^2}}\right]d\Psi = \quad (18)$$

$$= -\frac{M_г}{2}\left[\frac{l+z_1-z}{\sqrt{(l+z_1-z)^2+a^2}} - \frac{z_1-z}{\sqrt{(z_1-z)^2+a^2}}\right].$$

Поместив начало координат в середине соленоида ($z_1 = -l/2$) и подставляя (1) в (18), приходим к классической формуле напряженности осевого магнитного поля [2-3] катушки

$$|H_z| = \frac{iW}{2l}\left[\frac{\frac{l}{2}-z}{\sqrt{(\frac{l}{2}-z)^2+a^2}} + \frac{\frac{l}{2}+z}{\sqrt{(\frac{l}{2}+z)^2+a^2}}\right].$$

Такой результат свидетельствует о правомерности полученной модели поля.

Семейство зависимостей для соленоида с геометрическими размерами $a = l = 10$м, характеризующее распределение магнитного потенциала в аксиальном направлении по формулам (16)-(17) на разных расстояниях $r_k$ от оси симметрии, представлено на рис. 4; постоянная $C = 0$. На графике пунктирным линиям соответствуют двум распределениям магнитного потенциала на поверхности соленоида ($r = a$). В частности, зависимость 124 соответствует пути интегрирования примыкающего к поверхности внутри соленоида; зависимость 135 – примыкающего к поверхности вне соленоида. Различие этих двух зависимостей обусловлено тем, что путь интегрирования 124 пересекает контур с током величиной $M_r(z+l/2)$, что приводит к отличию потенциалов в каждой текущей точке на величину частичной МДС $F(z) = M_r(z+l/2)$. За пределами обмотки (в точках $z$ i10) рассматриваемые зависимости описываются соответствующими участками 46 и 57, потенциалы, в каждой точке которых отстоят друг от друга на одинаковую величину, равную полной МДС соленоида $F = M_r l$. Такой характер зависимостей магнитного потенциала может приниматься во внимание при разработке магнитной схемы замещения постоянного магнита.

Таким образом, получена математическая

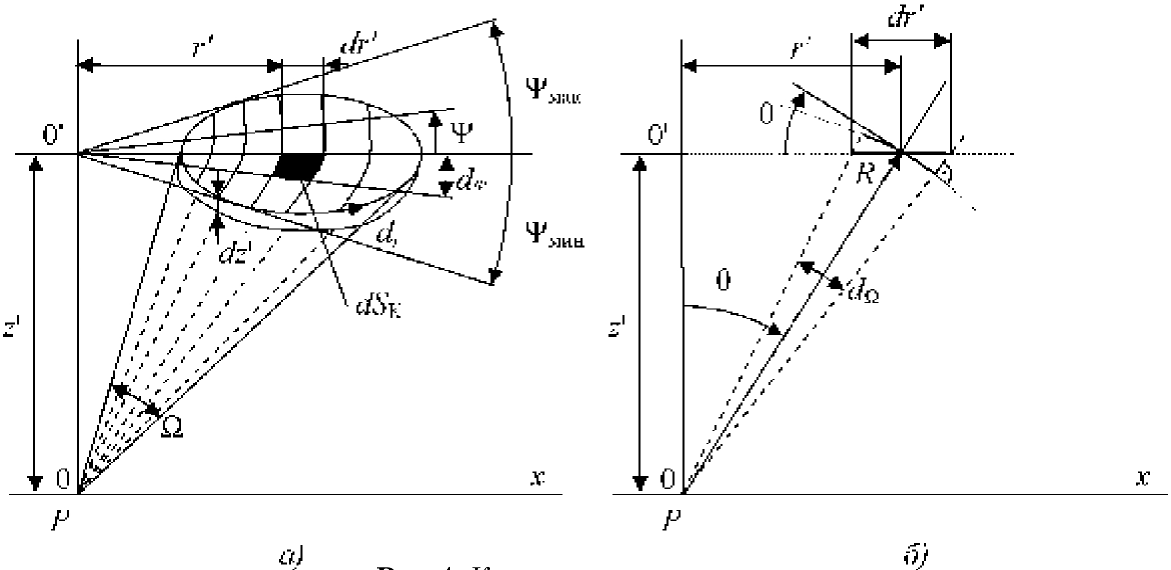


**Рис. 1.** К расчету телесного угла:
а – под которым виден контур с элементом тока $di$;
б – под которым виден элемент площади $dS_К$ контура

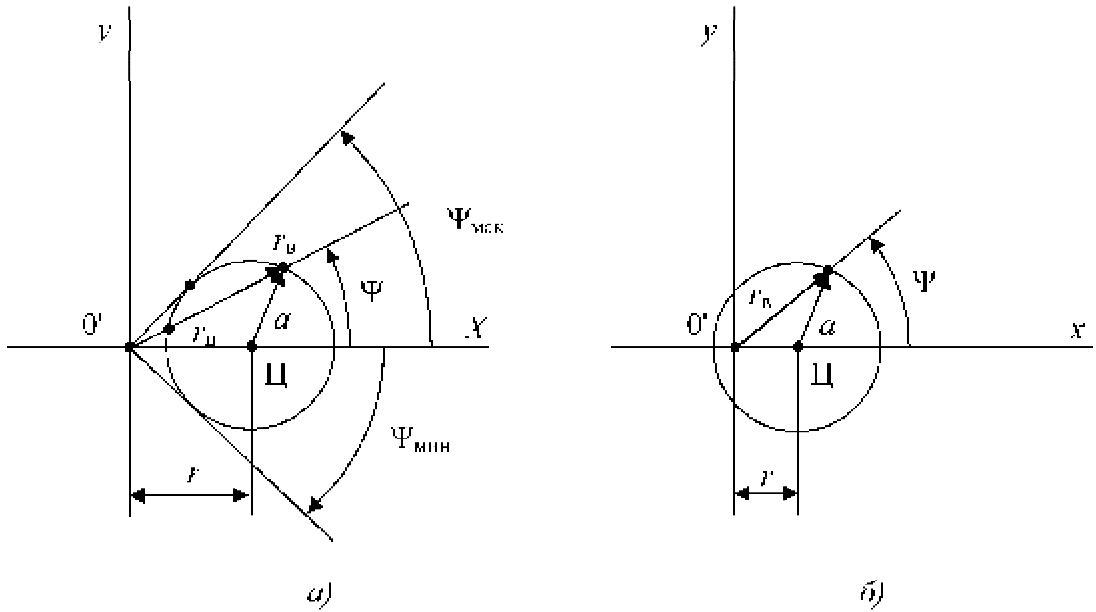


**Рис. 2.** К расчету границ областей интегрирования телесного угла:
а – для случая, когда проекция 0' точки наблюдения P на плоскость контура лежит вне контура;
б – для случая, когда проекция 0' точки наблюдения P на плоскость контура лежит внутри контура

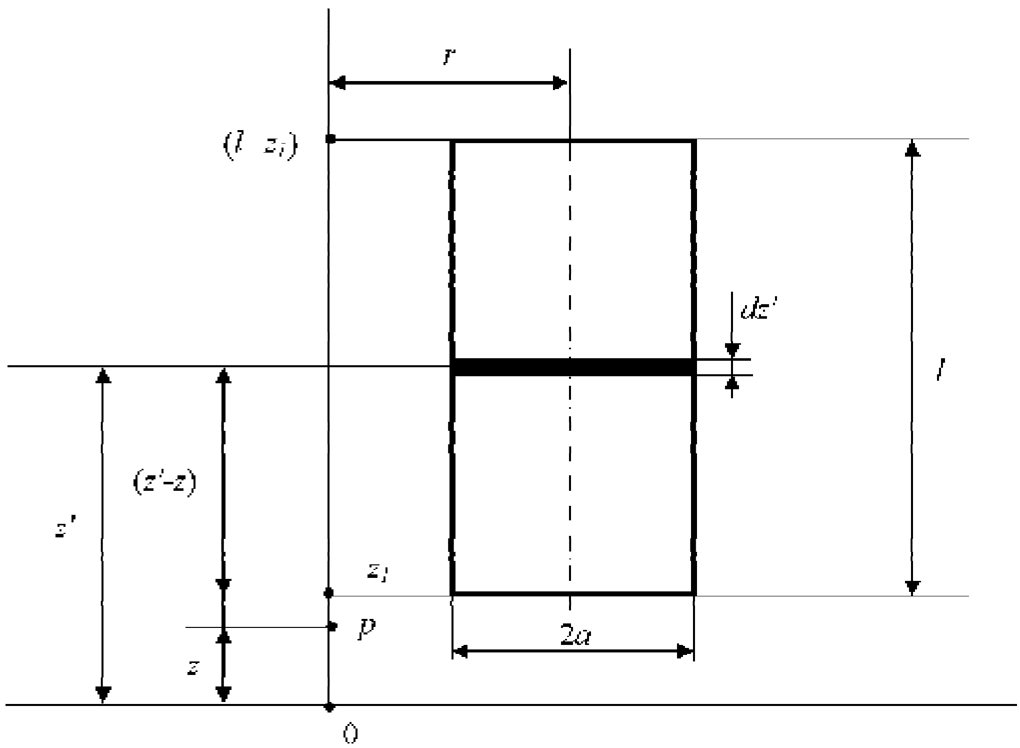


**Рис. 3.** К расчету скалярного магнитного потенциала эквивалентного соленоида

модель для скалярного магнитного потенциала цилиндрического магнита, состоящая из двух выражений (16)-(17), описывающих распределение потенциала в произвольной точке внешней области магнита. При этом расчет в общем случае сводится к задаче интегрирования по одной переменной и не представляет серьезных трудностей. Данная модель содержит в себе в явной форме параметры постоянного магнита, удобной для анализа поля и может быть положена для анализа внешнего поля магнитов в однородной среде.

Расчет скалярного магнитного потенциала кольцевого магнита проводится тоже по выражениям (16)-(17). Только в этом случае нужно использовать принцип наложения, для определения результирующего поля двух эквивалентных соленоидов с равными, но с противоположными направлениями токов [2].

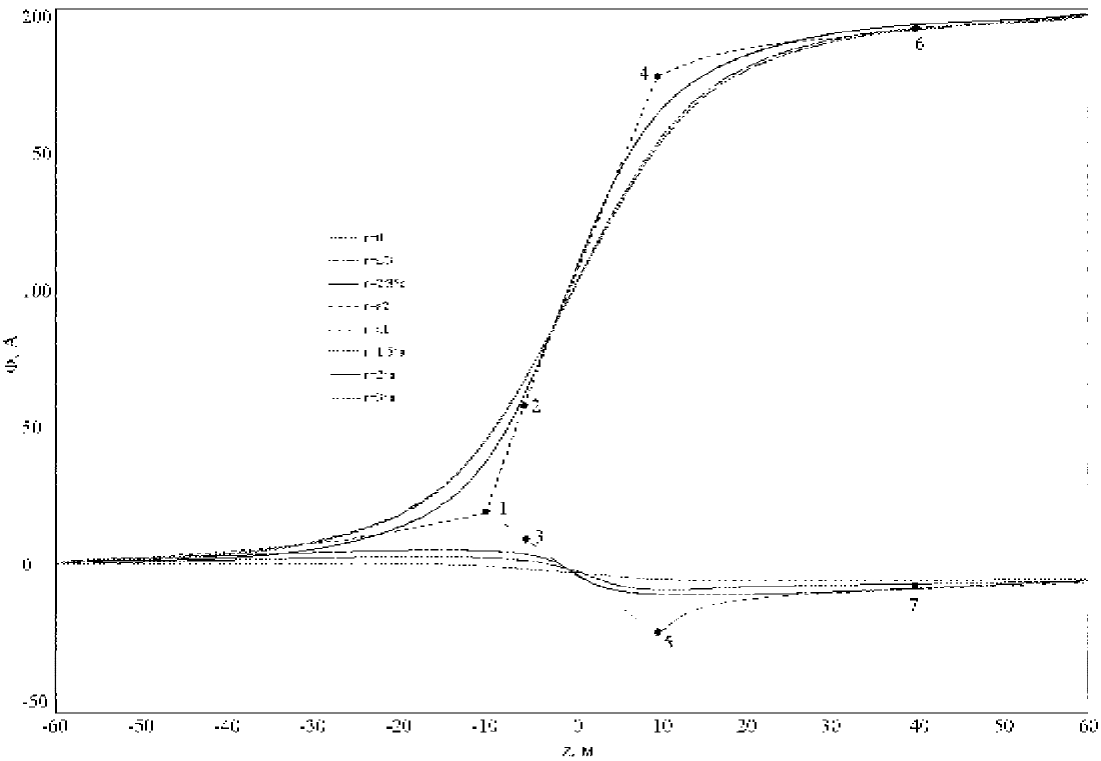


**Рис. 4.** Семейство зависимостей распределения скалярного магнитного потенциала эквивалентного соленоида

*Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по аналитической ведомственной целевой программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2010 годы)» на 2009 год, регистрационный номер 2.1.2/4506.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булыжев Е.М., Худобин Л.В.* Ресурсосберегающее применение смазочно-охлаждающих жидкостей при металлообработке. М.: Машиностроение, 2004.352 с.
2. Постоянные магниты: Справочник/ *Альтман А.Б., Герберг А.Н., Гладышев П.А. и др.*; Под ред. Ю.М. Пятина. М.: Энергия, 1980.– 488 с.
3. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле. М: Высш. школа, 1978. 231 с.
4. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.–616 с.
5. *Нейман Л.Р., Димирчян К.С.* Теоретические основы электротехники. Л: Энергоиздат, 1981. Том 2. 415 с.
6. Расчет электрических цепей и электромагнитных полей на ЭВМ/ *М.Г Александрова, А.Н. Белянина, В. Брюкер и др.*: Под. ред. Л.В. Данилова и Е.С. Филиппова. М.: Радио и связь, 1983.– 344 с.
7. *Сечнев А.Я.* Расчет напряженности поля прямым методом. Л.: Энергоатомиздат, 1984. 112 с.
8. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1967. Том 2. 655 с

## MODELING OF THE FIELD PERMANENT MAGNET

© 2011 E.M. Bulyzhev, E.N. Menshov, G.A. Dzhavakhiya

Ulyanovsk State Technical University
Closed Joint Stock Company “Bulyzhev. Industrial Ecosystems”, Ulyanovsk

A mathematical model of the distribution of the scalar magnetic potential created in the surrounding cylindrical or annular permanent magnet.
Keywords: magnetic separator, equivalent solenoid, the magnetization, the scalar magnetic potential, magnetic field strength, solid angle, the field distribution.

*Evgeny Bulyzhev, Doctor of Technics, Professor.*
*Тел.: (8422) 44-42-45.*
*Evgeny Menshov, Candidate of Technics, Associate Professor.*
*E-mail: raynd2@rambler.ru.*
*Georgy Dzhavakhiya, Graduate Student at the Engineering Technology Department. E-mail: geo.d@mail.ru.*