

УДК 519.65

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СКРЫТНОСТИ ПЭВМ

В.А. Русанов¹, Р.А. Данеев², Д.Ю. Шарпинский¹

¹Институт динамики систем и теории управления СО РАН, г. Иркутск

²Иркутский государственный университет путей сообщения

Поступила в редакцию 07.12.2010

На базе численного эксперимента проведено регрессионно-тензорное моделирование оптимального размещения ПЭВМ (планировка рабочего стола), в целях защиты от несанкционированного сканирования ее электромагнитного поля, в частности, монитора как канала передачи конфиденциальной информации, не содержащего криптографической протокол. Рассмотрен вариант квазифрактальной области пространственной ориентации ПЭВМ.

Ключевые слова: численный эксперимент, регрессионно-тензорное моделирование, несанкционированное сканирование, конфиденциальная информация, криптографический протокол, квазифрактальная область.

ВВЕДЕНИЕ

Важная задача апостериорного математического моделирования сложных физико-технических систем – распознавание электромагнитного источника излучения поля (ИИП); например, минимизация взвешенно-осредненной электромагнитной наблюдаемости в фиксированных (потенциально возможных) точках пеленгации электромагнитных сигналов элементов коммутационной компоновки ПЭВМ [1] (данная постановка отвечает задаче электронной защиты коммутаторов ПЭВМ при несанкционированном сканировании их побочных электромагнитных излучений-наводок).

В техническом плане проще всего решается перехват “конфиденциального канала” ПЭВМ, отображаемого на экран её дисплея, при этом векторная полевая структура “канала” описывается уравнениями Максвелла [2, с. 53]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon E) &= 4\pi\rho, & \operatorname{rot}E &= -c^{-1}\partial(\mu H)/\partial t, \\ \operatorname{div}(\mu H) &= 0, & \operatorname{rot}H &= -c^{-1}\partial(\varepsilon E)/\partial t + 4\pi c^{-1}I. \end{aligned}$$

Если всмотреться в уравнения *статики* уравнений электромагнетизма Максвелла, то обнаружим, что для физических свойств электромагнитного поля два предмета, электростатика и магнитостатика, являются идеальными математическими объектами, в итоге объединяющими электричество и магнетизм. Электростатика – суть чистый пример векторного поля с *нулевым ротором и заданной дивергенцией*, магнитостати-

Русанов Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник.

E-mail: idstu@icc.ru, V.Rusanov@mail.ru

Данеев Роман Алексеевич, аспирант.

Шарпинский Дмитрий Юрьевич, научный сотрудник.

E-mail: sharpinski@icc.ru

ка – чистейший пример поля с *нулевой дивергенцией и заданным ротором*; таким образом, напряженность электростатического поля E точки (x_1, y_1, z_1) от единичного заряда, расположенного в (x_2, y_2, z_2) , – это вектор с координатами (E_x, E_y, E_z) :

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_1 - x_2) / ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2)^{3/2}, [x, y, z] \quad (1)$$

$\lambda = \text{const}$, скобка $[x, y, z]$ означает, что два невыписанных соотношения получаются круговой перестановкой в уравнении (1) элементов этой скобки. Как следствие, первый шаг моделирования координат ИИП состоит в том, чтобы начать с апостериорного моделирования электростатики и пусть приближенно, но “узнать” тем самым всё про дивергенцию поля ИИП; магнитостатику и ротор можно рассматривать как очевидную симметрию.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть R – поле вещественных чисел, R^n – n -мерное векторное пространство над R с евклидовой нормой $\|\cdot\|_{R^n}$ и $\operatorname{col}(y_1, \dots, y_n) \in R^n$ – вектор-столбец с элементами из R . Через T_m^k обозначим пространство всех ковариантных тензоров k -ой валентности (полилинейных форм $f^{k,m} : R^m \times \dots \times R^m \rightarrow R$) с тензорной нормой $\|f^{k,m}\|_T := (\sum t_{i\dots j}^2)^{1/2}$, где $t_{i\dots j}$ – координаты [3, с. 96] тензора $f^{k,m}$, значения которых заданы относительно стандартного алгебраического базиса из пространства R^m .

Пусть $\omega \in R^m$ – фиксированный вектор пространственно-угловых координат ИИП. Выделим класс многомерных нелинейных систем типа “вход-выход”, описываемых векторно-тензорным уравнением регрессии вида [1]:

$$\hat{w}(\omega + \nu) = c + col \left(\sum_{i=1,2} f_1^{j,m}(\nu, \dots, \nu), \dots, \sum_{i=1,2} f_n^{j,m}(\nu, \dots, \nu) \right) + \varepsilon(\omega, \nu),$$

$$\begin{aligned} \hat{w}(\omega + \nu) &\in R^n, \nu \in R^m, c \in R^n, f_i^{j,m} \in T_m^j, \\ \varepsilon(\omega, \cdot): R^m &\rightarrow R^n, \|\varepsilon(\omega, \nu)\|_{R^n} = o(\nu_1^2 + \dots + \nu_m^2), \\ \nu &= col(\nu_1, \dots, \nu_m). \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $\{b_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset R^3$ – комплекс точек возможного несанкционированного зондирования электромагнитного сигнала ИИП, $\nu \in R^m$ – вектор пространственной ориентации ИИП (с началом в ω), $w(\omega + \nu)$ – вектор выходных сигналов ИИП (интенсивность электромагнитного поля ИИП в точках $b_i, 1 \leq i \leq n$).

П о с т а н о в к а задачи:

а) построить векторно-тензорные апостериорные оценки $c, f_i^{j,m}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2$ из решения двухкритериальной задачи параметрической оптимизации (параметрическая идентификация модели (2)):

$$\left\{ \begin{aligned} \min & \left(\sum_{l=1, \dots, q} \left(\|w_{(l)} - c - col \left(\sum_{j=1,2} f_1^{j,m}(\nu_{(l)}, \dots, \nu_{(l)}), \dots, \sum_{j=1,2} f_n^{j,m}(\nu_{(l)}, \dots, \nu_{(l)}) \right)\|_{R^n} \right)^2 \right)^{1/2}, \\ \min & \left(\|c\|_{R^n}^2 + \sum_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1,2} \|f_i^{j,m}\|_T^2 \right). \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$w_{(l)} \in R^n, \nu_{(l)} \in R^m$ – векторы экспериментальных данных ($w_{(l)}$ – реакция на вариацию $\nu_{(l)}$ относительно ω), $1 \leq l \leq q$ – число экспериментов;

б) для заданных вектора $\omega \in R^m$ и области $Q \subset R^m$ определить пространственные координаты стационарного размещения ИИП $\nu^* \in R^m$, обеспечивающие из решения задачи нелинейной “ ν -оптимизации” минимальную “взвешенно-осредненную” интенсивность сигнала ИИП в точках пеленгации $b_i, 1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned} \min \{F(\nu): \omega + \nu \in Q\}, \\ F(\nu) := \sum_{i=1, \dots, n} r_i \hat{w}_i(\omega + \nu), \end{aligned} \quad (4)$$

где координаты-функции вектора

$$col(\hat{w}_1(\omega + \nu), \dots, \hat{w}_n(\omega + \nu)) = \hat{w}(\omega + \nu) \in R^n$$

имеют аналитическое представление согласно идентифицированной в силу задачи а) для регрессионной модели (2), r_i – весовые коэффициенты, отражающие приоритет несанкционированного зондирования в точках пеленгации $b_i, 1 \leq i \leq n$.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КООРДИНАТ ИИП ВНУТРИ СВЯЗНОГО КОНТУРА

В этом разделе на методологической базе работы [1] и имитационного моделирования электростатического поля (1) проведем (с использованием программной среды [4]) численное моделирование процесса, описывающего расчет оптимальных (согласно решению задачи оптимизации (4) при $n=4, m=2, q=5$) координат установки ИИП внутри квадрата Q с угловыми точками $(x_i, z_i), i=1, \dots, 4$ – рис. 1:

$$\begin{aligned} (x_1, z_1) &= (0.0, 0.0), \\ (x_2, z_2) &= (0.0, 1.0), \\ (x_3, z_3) &= (1.0, 1.0), \\ (x_4, z_4) &= (1.0, 0.0). \end{aligned}$$

В такой математической постановке в качестве опорного вектора ω (в уравнении регрессии (2)) из квадрата Q – область допустимой ориентации ИИП, можно принять некоторый (рис. 1) эмпирически выделенный вектор из набора экспериментальных ориентаций ИИП – $\{\delta, \xi, \zeta, \eta, \omega\} \subset Q$. Ясно, что в этом случае в векторном уравнении нелинейной регрессии (2) вектор $\nu = col(\nu_1, \nu_2) \in R^2$ следует рассматривать как “вариацию” относительно вектора $\omega \in Q$. Таким образом, имеем:

“опорный вектор”: $\omega = (\omega_1, \omega_2) = (0.25, 0.5)$;

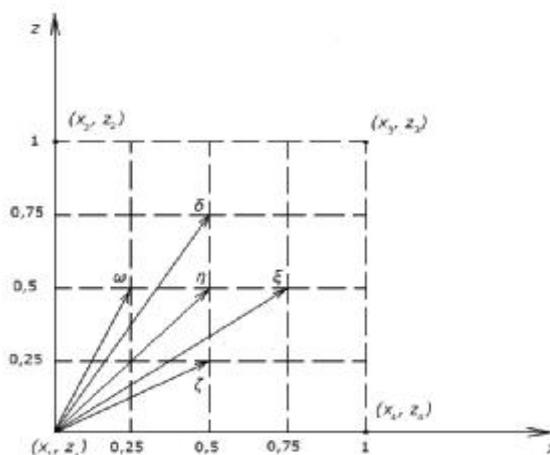


Рис. 1. Точки пеленгации (x_i, z_i) источника поля

Таблица 1. Данные эксперимента и моделирования

Номер эксперимента	Координаты источника Поля		Модуль вектора напряженности электростатического поля в точках пеленгации (эксперимент)				Модуль вектора напряженности электростатического поля в точках пеленгации (модель)			
	x	z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_1	w_2	w_3	w_4
№										
1	0.50	0.75	1.2308	3.2	3.2	1.2308	1.2308	3.2	3.2	1.2308
2	0.75	0.50	1.2308	1.2308	3.2	3.2	1.2308	1.2308	3.2	3.2
3	0.50	0.25	3.2	1.2308	1.2308	3.2	3.2	1.2308	1.2308	3.2
4	0.50	0.50	2	2	2	2	2	2	2	2
5-ω	0.25	0.50	3.2	3.2	1.2308	1.2308	3.2	3.2	1.2308	1.2308

“входные данные”: $\delta, \xi, \zeta, \eta, \omega$;

“выходные данные”: $w = col(w_1, w_2, w_3, w_4)$,

где координаты вектора ω - суть модули вектора напряженности электростатического поля в точках $(x_i, z_i), i = 1, \dots, 4$.

В табл.1 результаты численного эксперимента w_i получены на основе расчетов уравнения (1) (при $l=1$), т.е. в силу следующих аналитических соотношений (модуль вектора напряженности поля):

$$w_1(x, z) = (x^2 + z^2)^{-1},$$

$$w_2(x, z) = (x^2 + (1 - z)^2)^{-1},$$

$$w_3(x, z) = ((1 - x)^2 + (1 - z)^2)^{-1},$$

$$w_4(x, z) = ((1 - x)^2 + z^2)^{-1},$$

где координаты (x, z) в табл. 1 соответствуют координатам “тестовых” векторов $\delta, \xi, \zeta, \eta, \omega \in Q$ (рис. 1):

- $(x_\sigma, z_\sigma) = (0.5, 0.75)$ – первый эксперимент,
- $(x_\xi, z_\xi) = (0.75, 0.5)$ – второй эксперимент,
- $(x_\zeta, z_\zeta) = (0.5, 0.25)$ – третий эксперимент,
- $(x_\eta, z_\eta) = (0.5, 0.5)$ – четвертый эксперимент,
- $(x_\omega, z_\omega) = (0.25, 0.5)$ – пятый эксперимент.

Принимая во внимание решение задачи параметрической идентификации (3) для вектор-

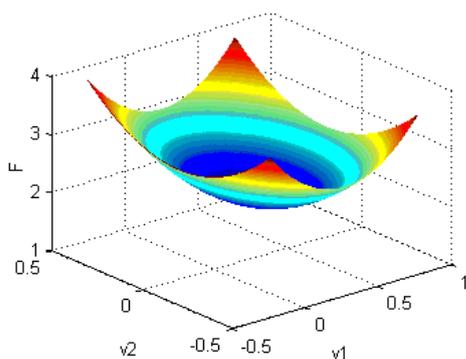


Рис. 2. Фрагмент целевого функционала $F(v_1, v_2)$ в контуре квадрата Q .

ного уравнения модели билинейно-тензорной регрессии (2), задающей апостериорную модель текущего состояния напряженности поля ИИП, примут аналитический вид:

$$\hat{w}_1(\omega + v) = 3.2 - 5.661v_1 - 3.7067v_2 + 3.4464v_1^2 - 0.9267v_1v_2 + 3.4464v_2^2,$$

$$\hat{w}_2(\omega + v) = 3.2 - 5.661v_1 + 3.7067v_2 + 3.4464v_1^2 + 0.9267v_1v_2 + 3.4464v_2^2,$$

$$\hat{w}_3(\omega + v) = 1.2308 + 2.2152v_1 + 3.7067v_2 + 3.4464v_1^2 + 0.9267v_1v_2 + 3.4464v_2^2, \quad (5)$$

$$\hat{w}_4(\omega + v) = 1.2308 + 2.2152v_1 - 3.7067v_2 + 3.4464v_1^2 - 0.9267v_1v_2 + 3.4464v_2^2,$$

Критический анализ прогнозной эффективности модели (5), дает относительное сравнение колонок таблицы 1; здесь w_i – эксперимент, а \hat{w}_i – прогноз согласно уравнений (5). Графическая иллюстрация изменений показателя качества (4) (в квадрате Q), определяемая задачей оптимизации

$$\min \left\{ F(v) := \sum_{i=1, \dots, 4} \hat{w}_i(\omega + v) : \omega + v \in Q \right\} \quad (6)$$

при варьировании координат вектора v относительно положения ω , приведена на рис. 2.

Оптимизация (6) позволяет определить координаты ИИП с минимальной наблюдаемостью ИИП в точках $(x_i, z_i), i = 1, \dots, 4$. Утверждение 5 и формула (10) [1] - координаты стационарной точки функционала $F(v)$, задают (определяют) следующие координаты ИИП:

$$(v_1^*, v_2^*) = (0.25, 0), (x^*, z^*) = (0.5, 0.5). \quad (7)$$

Собственные числа матрицы D_1 из утверждения 5 [1] соответственно равны

$$\lambda_1 = 9.8759, \lambda_2 = 10.8025,$$

что говорит (с учетом (12) [1]) о наличии экстремальной точки (v_1^*, v_2^*) функционала $F(v)$.

3. ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ ИИП НА КВАЗИФРАКТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОВРА СЕРПИНСКОГО

В практических рассмотрении оптимальной ориентации ПЭВМ, как правило, присутствует геометрическое требование, чтобы задача решалась в постановке, когда область размещения Q обладает запретными зонами со сложной геометрической структурой; т.е. область установки ПЭВМ по существу образует *квазифрактал*. Ясно, что физико-техническая природа “запретных зон”, как геометрических объектов, определяется специальными местами установки другого технологического оборудования, проходами между рабочими столами персонала, а также специфическими ограничениями на каждом рабочем столе, при этом возможен вариант, когда стационарная точка (7) лежит в “запретной зоне” и, следовательно, решение для установки ПЭВМ нужно искать на границе этой запретной зоны.

Геометрические объекты, которые сейчас принято называть *фракталами*, впервые появились в математике [5, 6] при топологическом развитии таких понятий как “линия”, “плоская фигура” и т.п.: к ним относятся фигуры, которые нельзя назвать в полном смысле слова ни линией¹, ни плоской фигурой (см. ниже в примерах 2, 3 геометрические конструкции “салфетки Серпинского” и “ковра Серпинского”). При этом строго определить фрактал (при существующем в настоящее время многообразии его эмпирических форм) как формальный математический объект не удается (!), есть лишь менее или более удачные попытки дать такое определение. Наиболее известными являются определения Бенуа Мандельброта, математика, благодаря работам которого теперь в серьез осознается, насколько важны эти новые геометрические объекты для понимания геометрической структуры окружающего мира².

¹ Примером такого математического объекта является «пушистая линия Коха», названная в честь датского математика Коха. Она получается из отрезка прямой последовательной заменой каждого прямоугольного участка на ломанную путем «вытягивания» средней трети исходного отрезка до равностороннего треугольника. Повторяя такую процедуру бесконечное число раз, в пределе получим ограниченную «линию», соединяющую две точки, но имеющую бесконечную длину.

² Сначала фракталы воспринимались как некоторая экзотика. Казалось, не бывает в природе объектов, для которых адекватной моделью является линия с бесконечной длиной, или объемная фигура с нулевым объемом. Но такие «реальные» объекты, как речная сеть на поверхности Земли, структура разломов в горных породах, следы, оставляемые в диэлектрике высоковольтным разрядом при пробое, скопление молекул, осаждаемых из раствора (они выглядят как длинные разветвленные «мохнатые цепочки» типа кораллов или снежинок) – это всё примеры природных фракталов.

В основе первого определения фрактала лежит представление о *топологической размерности* множества [7, с. 559].

О п р е д е л е н и е 1 [8, с. 128]. *Фрактал - это множество, у которого размерность Хаусдорфа-Безиковича строго больше его топологической размерности.*

Математическую конструкцию размерности Хаусдорфа-Безиковича дадим ниже в определении 3, здесь лишь заметим, что под определение 1 подпадают, в частности, такие “пушистые линии”, как кривая Коха (см. сноску 1). Стоит отметить, что, как полагал Мандельброт, дробность размерности выражает “пограничное свойство” фракталов лежать между точкой и линией, или между линией и поверхностью и т.д.; при этом топологическая размерность точки = 0, линии = 1, плоскости = 2 и т.п., - теорема 7.3.19 [7, с. 598].

Неудачность определения 1 стала очевидной после приведения ряда контрпримеров геометрических объектов (см. ниже примеры 2-4), для которых это определение не выполняется, хотя имело бы смысл их отнести (исходя из интуитивного представления) к фракталам; так пример 4 - чрезвычайно “дырявая пирамида”, построенная польским математиком, Вацлавом Серпинским, формально имеет размерность 2, но строится из трехмерного тетраэдра поочередным отбрасыванием вписанных в него тетраэдров с половинной стороной.

Несколько менее формальное и значительно более общее определение фрактала, данное Б. Мандельбротом несколько позже, звучит так³:

О п р е д е л е н и е 2 [8, с. 128]. *Фракталом называется математический объект (структура), состоящий из частей, которые в некотором смысле подобны целому.*

Поясним, как в это определение укладываются фракталы типа пушистой линии фон Коха. Вначале заметим, что такие объекты, как прямая или плоскость, разумно назвать *самоподобными*. Формально охарактеризовать это свойство можно тем, что эти фигуры не изменяются при геометрических преобразованиях: перенос прямой вдоль нее приводит к той же самой прямой, плоскость переходит в себя при параллельном сдвиге и повороте. Независимость от преобразования называется *симметрией*; есть множества, не обладающие столь полной симметрией как прямая или плоскость, например, окружность не изменяется только при повороте (тем самым она тоже самоподобна). В этом смысле, согласно опреде-

³ Неопределенность данного определения фрактала, как формальной математической структуры, содержащаяся в словах «в некотором смысле», делает это понятие, чуть не «всеобъемлющим»; как и при неудачной попытке Кантора дать формальное непротиворечивое определение понятия множества.

ления 2, все эти множества являются фракталами, несмотря на свою простую геометрическую структуру; их можно назвать “гладкими фракталами”, в отличие от кривой Коха, пирамиды Серпинского, множества Кантора и т.п.

Какой же симметрией обладает кривая Коха? Выбрав ее фрагмент, например, одну треть всей кривой, и увеличив его в три раза, вновь получим в точности исходную кривую; физики говорят: такие объекты обладают *скейлингом*, от слова *scale* – шкала (изменить шкалу в три раза – это всё равно, что рассматривать исходный объект под микроскопом с троекратным увеличением). Если вновь видим ту же картину, что и без микроскопа значит, объект обладает скейлингом и таким образом эмпирически является фракталом.

Но вернемся к определению 1 и для характеристики размерности Хаусдорфа-Безиковича рассмотрим ряд широко известных примеров.

Вначале зададимся вопросом: как измерить “величину” фиксированного множества Q метрического пространства? С этой целью разобьем Q на “элементарные ячейки” с характерным размером (диаметром) r и подсчитаем минимальное число $N(r)$, покрывающих все множество Q . Уменьшая размер ячеек (следа за скоростью возрастания их числа) необходимого для покрытия множества Q , можно получить представление о размерности множества Q , в частности, вычислить такие характеристики как “длина” множества⁴, его “площадь”, “объем” и т.п. В этом смысле конструкция размерности Хаусдорфа-Безиковича определяет “скорость роста” числа элементов минимального покрытия множества Q при стремлении характерного размера к нулю.

О п р е д е л е н и е 3 [8, с. 133]. Число d , характеризующее минимальное покрытие Q , и такое, что для него справедливо соотношение

$$d = \lim \left\{ \ln N(r) / \ln(r^{-1}) : r \rightarrow 0 \right\} \quad (8)$$

называется *размерностью Хаусдорфа-Безиковича множества Q* .

Вычислим размерности (8) для множеств, которые являются фракталами (три последних из них не подпадают (!) под определение 1).

П р и м е р 1. *Размерность кривой Коха.* При $r=1/3$ число элементов минимального покрытия равно $N(r)=4$, а при $r=(1/3)^n$ – соответственно $N(r)=4^n$. Поэтому согласно формулы (8) размерность Хаусдорфа-Безиковича ломаной Коха равна $d = \ln 4 / \ln 3 > 1$.

⁴ Действительно, пусть Q – спрямленная кривая длины L . Выберем минимальное покрытие, т.е. такое, которое состоит из наименьшего числа ячеек (существование такого покрытия для компактного множества следует из леммы Гейне-Бореля [9, с. 98]). Число ячеек $N(r)$ в этом покрытии будет пропорционально отношению N/r , и длину кривой получим предельным переходом при $r \rightarrow 0$: $L \approx N(r)r$.

Топологическая размерность фигур из двух следующих примеров равна 2 (т.к. они получены из плоской фигуры), что с учетом (8) исключает для них конструкцию определения 1.

П р и м е р 2. *Размерность салфетки Серпинского.* Вацлав Серпинский предложил пример скейлинга, как “плоского” фрактального множества, получаемого из правильного треугольника последовательным выбрасыванием средних частей – рис. 3.



Рис. 3. Построение салфетки Серпинского

Размерность салфетки Серпинского легко подсчитать по формуле (8), выбирая в качестве элемента покрытия правильный треугольник со стороной $r=(1/2)^n$. Тогда $N(r)=3^n$, и значит $1 < d = \ln 3 / \ln 2 < 2$.

П р и м е р 3. *Размерность ковра Серпинского.* Это плоская фрактальная фигура, полученная алгоритмическим способом, аналогичным при получении скейлинга типа “салфетки Серпинского”, но начальным элементом здесь является единичный квадрат – рис. 4.



Рис. 4. Построение ковра Серпинского

При построении ковра Серпинского на первом шаге единичный квадрат делится на девять равновеликих маленьких квадратов с длиной стороны, равной $r=1/3$, при этом выбрасывается центральный квадрат (рис. 4) и процедура повторяется с оставшимися квадратами бесконечное число раз. Таким образом, размерность “ковра” равна $1 < d = \ln 8 / \ln 3 < 2$.

Следующий пример показывает, что такой качественный показатель как *дробная размерность Хаусдорфа-Безиковича*, продемонстрированная примерами 1-3, также не может выступать признаком фрактала.

П р и м е р 4. *Размерность пирамиды Серпинского.* Пирамида Серпинского – это объемная фрактальная фигура, полученная рекурсивным способом, аналогичным способу получения плоской салфетки Серпинского; начальным элементом является правильный тетраэдр с единичной длиной ребра. В данном случае фигура получается из тетраэдров, последовательно отсекаемых от вершин исходного тетраэдра, при этом

стороны отсекаемых тетраэдров равны половине стороны тех тетраэдров, от которых они отбрасываются (далее процесс циклически повторяется). Если элемент покрытия – тетраэдр с длиной стороны $r=(1/2)^n$, то требуется $N(r)=4^n$ элементов покрытия, что приводит к размерности, равной 2 – целое число, хотя назвать его размерностью “плоского объекта” вряд ли можно.

Вернемся к основной линии изложения – определению оптимальных координат установки ИИП в постановке, когда область размещения – скейлинг. В качестве геометрической модели рассмотрим фрактала ковра Серпинского (ФКС), что позволит “мотивироваться”⁵ результатами раздела 2 (вариант расчета для “салфетки Серпинского” строится аналогично). Для этого совместим ФКС (рис. 4) с квадратом Q (рис. 1). В данном случае координаты установки ИИП (7) не могут выступать в качестве решения задачи ее размещения, поэтому решение необходимо искать на границе G “квадрата изъятого” в центре ФКС ($n=1$, рис. 4); аналогичное решение строится для любого “пустого” квадрата ФКС при $n>1$.

С этой целью рассмотрим численное решение задачи оптимизации:

$$\min \left\{ F^*(x, z) := \sum_{i=1, \dots, 4} w_i(x, z) : (x, z) \in G \right\}. \quad (9)$$

Пусть L – длина контура G , $h=0.01L$ и (x_j, z_j) , $j=0, \dots, 100$ – точки контура G , у которых расстояние между соседними точками вдоль контура G равно h . В соответствии с построениями из раздела 2 будем иметь:

$$F^*(x, z) = w_1(x, z) + w_2(x, z) + w_3(x, z) + w_4(x, z) = (x^2 + z^2)^{-1} + (x^2 + (1-z)^2)^{-1} + ((1-x)^2 + (1-z)^2)^{-1} + ((1-x)^2 + z^2)^{-1},$$

что позволяет ввести [10, с. 151] кубическую сплайн-функцию $F^\# \rightarrow: [0, L] \rightarrow R$

$$F^\#(jh) = F^*(x_j, z_j), j = 0, \dots, 100; \quad (10)$$

ясно, что если под “квазифракталом ковра” понимать структуру ковра Серпинского при фиксированном n , то шаг сетки (10) имеет ограничение $h \leq (r/9)^n$.

Таким образом, задачу оптимизации (9) можно трансформировать к новой задаче:

$$\min \{ F^\#(y) : y \in [0, L] \},$$

или в координатах стационарных точек $F^\#(y)$, – к корням уравнения [11, с. 131]:

$$dF^\#(y)/dy = 0. \quad (11)$$

Графики функций $F^\#(\cdot)$, $dF^\#(\cdot)/dy$ приведены на рис.5, 6; построение осуществлено с использованием программной среды MATLAB [12].

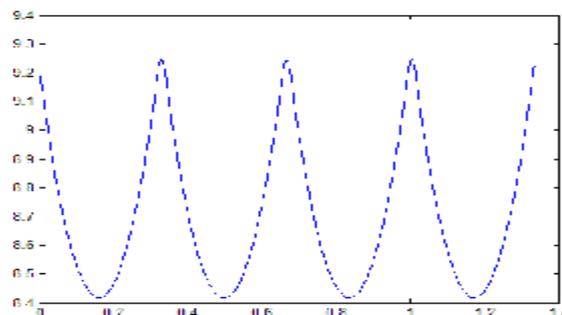


Рис. 5. График функции $F^\#(Ч)$

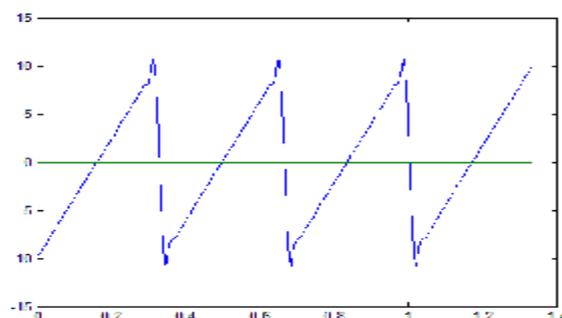


Рис. 6. График функции $dF^\#(\cdot)/dy$

В соответствии с соотношениями (10) для сплайн-функции $F^\#(\cdot)$ на сетке $h=0.01L$, (x_j, z_j) , $j=0, \dots, 100$ задача оптимизации (9)-(11) имеет неединственное (!) решение в точках контура G с координатами:

$$\begin{aligned} (x^*, z^*) &= (0.4949, 0.3333), & (x^*, z^*) &= (0.6667, 0.4983), \\ (x^*, z^*) &= (0.4983, 0.6667), & (x^*, z^*) &= (0.3333, 0.4949). \end{aligned}$$

Ограничившись наброском голый вычислительной схемы, мы не коснулись фактической организации вычислений (профессиональные тонкости математика-вычислителя не входили в круг данной статьи); современная вычислительная математика располагает для этой цели широким арсеналом средств [12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано (численно) нелинейное регрессионное моделирование задачи электромагнитного сканирования ИИП; метод разработан в [1] и отличается от известных тем, что использует аппарат тензорного описания апостериорной модели ИИП.

⁵ Данная мотивировка возникает в положении, когда экстремальная точка (7) оптимального размещения ИИП лежит внутри запретной области квадрата Q (рис. 1).

В развитие данной постановки предложен метод решения задачи оптимизации на областях, получивших в последнее время геометрическое представление в терминах фрактальных объектов [5, 6]. Показано, что данная задача по существу сводится к построению вещественнозначной функции вещественного аргумента с применением варианта сплайн-метода (кубического с равномерной сеткой на отрезке), что позволяет алгоритмически использовать существенно меньшую размерность по отношению к исходной плоской задаче оптимизации. При этом остался открытым вопрос: как найти решение *общей задачи оптимизации* заданного нелинейного функционала (включая вариант с невыпуклой формой) на реальном (“не квази”) фрактале; например, как частный случай, на поверхности ковра Серпинского при $n=\infty$ (“ковер” с 0-площадью и размерностью Хаусдорфа-Безиковича = $\ln 8/\ln 3$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козырев В.А., Куменко А.Е., Рудых А.Г., Русанов В.А. Нелинейный регрессионно-тензорный анализ оптимальной установки электромагнитного источника излучения при несанкционированном сканировании его электромагнитного поля // Известия вузов. Приборостроение. 2010. Т. 53. № 10. С. 10-17.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
3. ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1979. 624 с.
4. Шарпинский Д.Ю., Русанов В.А., Данеев Р.А. Оптимальное размещение источника электромагнитного поля «ОРИЭП» // Свидетельство Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам о государственной регистрации программы для ЭВМ, № 2010613002 от 06.05.2010 г.
5. Шустер П. Динамический хаос. М.: Мир, 1988. 382 с.
6. Потапов А.А. Фракталы и хаос как основа прорывных технологий в современных радиосистемах // В кн.: Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Техносфера, 2006. 488 с. / С. 374-457.
7. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
8. Чуличков А.И. Математические модели нелинейной динамики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. 296 с.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа М.: Наука, 1976. 544 с.
10. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975. 496 с.
11. Банах С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1972. 424 с.
12. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB и SCILAB. СПб: Наука, 2001. 288 с.

COMPUTER MODELING OF ELECTRIC-MAGNETIC LATENTITY OF HARDWARE

© 2011 V.A. Rusanov¹, R.A. Daneev², D.U. Sharpinsky¹

¹ Institute of Dynamic Systems and Control Theory of Siberian Branch of RAS

² Irkutsk State Railway University

There is considered the regression tensor modeling of computer optimal place (the planning of work table) for protection from non-sanction scanning its electric-magnetic field, for example, the monitor as a canal of confident information transmission without criptograph protocol. It is investigated the variant of fractal brunch of computer space orientation.

Vjacheslav Rusanov, the Doctor of the Physic and Mathematic Sciences, the Main Scientific Employee.

E-mail: idstu@icc.ru, V.Rusanov@mail.ru

Roman Daneev, The Post-Graduated Student.

Dmitry Sharpinsky, the Scientific Employee.

E-mail: sharpinskii@icc.ru