

ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ С РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРОЙ

© 2011 Н.С. Астапов

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск  
Новосибирский государственный университет

Поступила в редакцию 26.05.2010

Напряженно деформированное состояние при сжатии под действием собственного веса трехступенчатого вертикального стержня, составленного последовательно из трех структурированных стержней, исследуется аналитически. Напряжения в каждом стержне вычислены методом, осреднения. На конкретном примере детально описана процедура склейки решений на стыках ступеней. Показано, что сжимающие напряжения в каждой ступени составного стержня существенно превышают максимальные напряжения в поперечном сечении эквивалентного однородного стержня.

Ключевые слова: прочность структурированного стержня, асимптотическое разложение, задача склейки.

ВВЕДЕНИЕ

Эффективным методом исследования свойств материалов с периодической структурой является асимптотический метод осреднения [1], в котором решение уравнения разыскивается в виде ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon$ .

В данной работе, являющейся непосредственным продолжением работы [2], показывается возможность применения метода осреднения в задаче оценки прочности многоступенчатой высотной башни с междуэтажными перекрытиями. За основное определяющее уравнение выбрано уравнение  $(S(x/\varepsilon)E(x)u'(x))' = f_1(x)$ , где  $u(x)$  – величина смещения поперечного сечения башни,  $S(x/\varepsilon)$  – площадь поперечного сечения с абсциссой  $x$ ,  $f_1(x) = S(x/\varepsilon)\gamma(x)$  – плотность равнодействующей внешних сил, действующих на сечение с абсциссой  $x$  вдоль оси башни [3]. Модуль Юнга  $E(x) = E_0$  и удельный вес материала  $\gamma(x) = \gamma_0$  считаются постоянными, не зависящими от  $x$ . Аналогичные задачи возникают при растяжении–сжатии композитных стержней, когда структура стержня периодически меняется, причем параметр  $\varepsilon = 2r_0/l$ , где  $2r_0$  – диаметр структурной ячейки, характеризует быструю осцилляцию [4]. Ниже основное внимание уделяется задаче прочности. С этой целью необходимо получить асимптотическое разложение производной решения с точностью до  $\varepsilon$ , а само решение – с точностью до  $\varepsilon^2$  включительно.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуем распределение напряжений при сжатии под действием собственного веса трехступенчатого вертикального стержня, составленного последовательно из трех стержней, с быстроменяющейся по периодическому закону площадью поперечного сечения в каждом стержне (рис. 1). Такой составной стержень может моделировать, например, многоступенчатое высотное здание с учетом междуэтажных перекрытий. В качестве математической модели данной задачи рассмотрим уравнение

$$(K(x/\varepsilon)U')' = f(x) + g(x/\varepsilon), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1)$$

при граничных условиях

$$U(0) = 0, \quad U'(l) = 0, \quad (2)$$

где  $l$  – высота стержня,  $\varepsilon = l/n$  – малый параметр (при достаточно больших натуральных  $n$ ;  $n$  – либо количество этажей, либо количество однотипных структурных элементов), характеризующий частоту изменения жесткости  $K(x/\varepsilon) = S(x/\varepsilon)E_0$  поперечного сечения стержня. Предположим, что исходный трехступенчатый стержень составлен последовательно из трех стержней, длины которых  $l_1 = n_1\varepsilon$ ,  $l_2 = n_2\varepsilon$ ,  $l_3 = n_3\varepsilon$ ,  $n_i$  – натуральные числа, причем  $l_1 + l_2 + l_3 = l$ . Функция  $K(x/\varepsilon)$  является кусочно гладкой, поэтому потребуем дополнительно выполнения условий непрерывности перемещений на стыках ступеней

$$[U]_{|x=l_i} = [U]_{|x=l_i+l_j} = 0 \quad (3)$$

и непрерывности усилий

$$[KU']_{|x=l_i} = [KU']_{|x=l_i+l_j} = 0. \quad (4)$$

Астапов Николай Степанович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры высшей математики. E-mail: nika@hydro.nsc.ru

Здесь символ  $[\varphi(x)]$  означает разность правого и левого предельных значений функции в данной точке  $[\varphi(x)]|_{x=l_i} = \varphi(l_i + 0) - \varphi(l_i - 0)$ ,  $\varphi(l_i \pm 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0, \delta > 0} \varphi(l_i \pm \delta)$ . Пусть площадь поперечного сечения в каждом стержне-ступени меняется по закону

$$S(x/\varepsilon) = \begin{cases} S_1(x/\varepsilon) = 8 + 4\sin(2\pi x/\varepsilon), & 0 \leq x \leq l_1, \\ S_2(x/\varepsilon) = 4 + 2\sin(2\pi x/\varepsilon), & l_1 \leq x \leq l_1 + l_2, \\ S_3(x/\varepsilon) = 2 + \sin(2\pi x/\varepsilon), & l_1 + l_2 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (5)$$

Для каждого из отрезков (стержней) поместим согласно (5) функцию жесткости  $K(x/\varepsilon)$  поперечного сечения соответственно этому отрезку индексом, например, запишем

$K(x/\varepsilon) = K_2(x/\varepsilon) = (4 + 2\sin(2\pi x/\varepsilon))E_0$  для  $x \in [l_1, l_1 + l_2]$ . Правая часть уравнения (1) – объемные нагрузки – также является кусочно гладкой, включающей кусочно медленно меняющуюся нагрузку  $f(x) = 2^{4-i}\gamma_0$ , связанную со структурой стержня, разбитого на три ступени, и быстро осциллирующую часть нагрузки  $g(x/\varepsilon) = 2^{3-i}\sin(2\pi x/\varepsilon)\gamma_0$ ,  $i = 1, 2, 3$  – номер стержня-ступени, описывающую структуру ячейки (этажа).

Предположительно целесообразно строить асимптотическое разложение решения задачи (1)–(4) до членов, содержащих  $\varepsilon^2$  включительно, чтобы с достаточной точностью можно было получить оценки напряжений, как для медленно меняющейся, так и для быстро осциллирующей составляющей решения. На конкретном примере проведем сравнение численных результатов, полученных с помощью построенного асимптотического решения с точностью до членов, содержащих  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^2$  включительно, и аналитического точного решения.

## 2. ФОРМУЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МЕТОДА ОСРЕДНЕНИЯ

Учитывая линейность уравнения (1), его решение  $U(x, \varepsilon)$  будем разыскивать в виде  $U(x, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) + w(x/\varepsilon)$ . (6)

Так как  $(Ku')' = (K(u+w))' = (Ku' + Kw')' = (Ku')' + (Kw')' = f(x) + g(x/\varepsilon)$ , то функцию  $u(x, \varepsilon)$  – асимптотическое разложение уравнения  $(Ku')' = f(x)$  – построим с помощью аналогичного [1,5] алгоритма, причем функция  $u(x) \equiv u(x, \varepsilon)$  не будет зависеть от  $\varepsilon$  сингулярно; быстро осциллирующую функцию  $w(x/\varepsilon)$  найдем из уравнения  $(Kw')' = g(x/\varepsilon)$ . Произвольные постоянные в общем решении  $U(x, \varepsilon)$  выберем так, чтобы выполнялись граничные условия (2)–(4). Выбор функции  $S(\xi)$ ,

$\xi = x/\varepsilon \in R$  в виде (5) позволяет применить процедуру осреднения [1], так как функции  $K_i(\xi)$  удовлетворяют неравенствам  $1 \leq K_i(\xi) \leq 12$ ,  $i = 1, 2, 3$  и являются бесконечно дифференцируемыми 1-периодическими по  $\xi$  функциями.

Поэтому для каждого из отрезков (стержней) решение задачи (1)–(3) будем разыскивать в виде (6), где все функции  $U, u, w$  поместим соответствующими этому отрезку индексами. Переформулируем задачу (1)–(4) следующим образом

$$(K_1 u_1')' = 8\gamma_0, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad u_1(0) = 0,$$

$$(K_1(u_1' + w_1') - K_2(u_2' + w_2'))|_{x=l_1} = 0,$$

$$(K_2 u_2')' = 4\gamma_0, \quad l_1 \leq x \leq l_1 + l_2,$$

$$(u_1 + w_1 - u_2 - w_2)|_{x=l_1} = 0,$$

$$(K_2(u_2' + w_2') - K_3(u_3' + w_3'))|_{x=l_1+l_2} = 0,$$

$$(K_3 u_3')' = 2\gamma_0, \quad l_1 + l_2 \leq x \leq l,$$

$$(u_2 + w_2 - u_3 - w_3)|_{x=l_1+l_2} = 0,$$

$$(u_3' + w_3')|_{x=l} = 0,$$

где функции  $w_i, i = 1, 2, 3$  являются решениями уравнений

$$(K_i w_i')' = 2^{3-i}\sin(2\pi x/\varepsilon)\gamma_0. \quad (7)$$

Правые части уравнений (7) являются 1-периодическими по  $\xi = x/\varepsilon$  функциями, среднее по периоду которых равно нулю, то есть

$$\langle \sin(2\pi\xi) \rangle \equiv \int_0^1 \sin(2\pi\xi) d\xi = 0.$$

Если дополнительно потребовать, чтобы решение уравнения (7) удовлетворяло условию  $w_i(0) = 0$ , то, как следует из леммы 1 [1, С. 43], существуют и единственны 1-периодические по  $\xi$  решения уравнений (1) не зависящие от  $i$

$$w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = -\frac{\varepsilon^2 b_0}{4\pi^2} \ln\left(1 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right)\right), \quad (8)$$

где  $b_0 = \gamma_0/E_0$ . Пользуясь выражениями (5) и (8), вычислим значения  $K_i, w_i$  и  $w_i'$  на стыках стержней, в том числе  $w_1(l_1) = w_2(l_1) = w_2(l_1 + l_2) = w_3(l_1 + l_2) = 0$  и  $w_1'(l_1) = w_2'(l_1) = w_2'(l_1 + l_2) = w_3'(l_1 + l_2) = w_3'(l) = -\varepsilon b_0/4\pi$ .

Перепишем задачу (1)–(4) в виде

$$(K_1 u_1')' = 8\gamma_0, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (9)$$

$$u_1(0) = 0, \quad u_1'(l_1) = u_2'(l_1)/2 + \varepsilon b_0/8\pi, \quad (10)$$

$$(K_2 u_2')' = 4\gamma_0, \quad l_1 \leq x \leq l_1 + l_2, \quad (11)$$

$$u_1(l_1) - u_2(l_1) = 0, \quad u_2'(l_1 + l_2) = u_3'(l_1 + l_2) / 2 + \varepsilon b_0 / 8\pi, \quad (12)$$

$$(K_3 u_3')' = 2\gamma_0, \quad l_1 + l_2 \leq x \leq l, \quad (13)$$

$$u_2(l_1 + l_2) - u_3(l_1 + l_2) = 0, \quad u_3'(l) = \varepsilon b_0 / 4\pi. \quad (14)$$

Из уравнения (13), учитывая второе граничное условие (14), находим  $u_3'(x) = b_0(2x + \varepsilon / 2\pi - 2l) / (2 + \sin(2\pi x / \varepsilon))$ . Затем из уравнения (11), учитывая второе условие (12), находим  $u_2'(x) = b_0(4x + \varepsilon / \pi - 2l - 2(l_1 + l_2)) / (4 + 2\sin(2\pi x / \varepsilon))$  и, наконец, из уравнения (9) с учетом краевого условия (10) получим  $u_1'(x) = b_0(8x + 2\varepsilon / \pi - 8l_1 - 4l_2 - 2l_3) / (8 + 4\sin(2\pi x / \varepsilon))$ . Теперь задачу (1)–(4) можно записать в пригодном для применения алгоритма осреднения виде

$$(K_1 u_1')' = 8\gamma_0, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (15)$$

$$u_1(0) = 0, \quad u_1'(l_1) = b_0(\varepsilon / 4\pi - l_2 / 2 - l_3 / 4), \quad (16)$$

$$(K_2 u_2')' = 4\gamma_0, \quad l_1 \leq x \leq l_1 + l_2, \quad (17)$$

$$u_2(l_1) = u_1(l_1), \quad u_2'(l_1 + l_2) = b_0(\varepsilon / 4\pi - l_3 / 2), \quad (18)$$

$$(K_3 u_3')' = 2\gamma_0, \quad l_1 + l_2 \leq x \leq l, \quad (19)$$

$$u_3(l_1 + l_2) = u_2(l_1 + l_2), \quad u_3'(l) = \varepsilon b_0 / 4\pi. \quad (20)$$

Заметим, что исходная задача (1)–(4) распалась на три отдельные для каждого стержня задачи (15)–(16), (17)–(18) и (19)–(20), последовательным решением которых находятся все функции  $u_i$  и с учетом выражений (6) и (8) строится решение исходной задачи для всего составного стержня.

### 3. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Асимптотическое разложение решения задачи (15)–(16) разыскивается в виде

$$u_1(x) = v(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i N_i(\xi) \frac{d^i v(x)}{dx^i}, \quad (21)$$

где  $N_i(\xi)$  – 1-периодические функции по  $\xi = x / \varepsilon$ ; функция  $v(x)$  не зависит от  $\xi$  и имеет асимптотическое разложение  $v(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j v_j(x)$ , причем  $v_j(x)$  не зависят от  $\varepsilon$ . Используя асимптотический метод осреднения [1,5], найдем следующие представления функций  $N_i(\xi)$  и  $v(x)$  разложения (21)

$$N_1(\xi) = \sqrt{3} \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{2 + \sin(2\pi\xi)} - \xi, \quad (22)$$

$$N_2(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{dN_2}{d\xi} d\xi = \int_0^{\xi} (4\sqrt{3}E_0 \langle N_1 \rangle / K - N_1) d\xi, \quad (23)$$

$$v(x) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x) = \frac{x(x - 2l_1 - l_2 - l_3 / 2)b_0}{\sqrt{3}} + \varepsilon \frac{2b_0}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{4\pi} - \langle N_1 \rangle \right) x. \quad (24)$$

Окончательно для решения  $U(x, \varepsilon)$  задачи (1)–(4) на отрезке  $0 \leq x \leq l_1$  получим асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} U(x, \varepsilon) = U_1(x, \varepsilon) = & x(x - 2l_1 - l_2 - l_3 / 2)b_0 / \sqrt{3} + \\ & + \varepsilon \cdot 2b_0 x (1 / 4\pi - \langle N_1 \rangle) / \sqrt{3} + \\ & + \varepsilon \cdot N_1 b_0 (2x - 2l_1 - l_2 - l_3 / 2 + 2\varepsilon(1 / 4\pi - \langle N_1 \rangle)) / \sqrt{3} + \\ & + \varepsilon^2 \cdot 2N_2 b_0 / \sqrt{3} - \\ & - \varepsilon^2 \cdot b_0 \ln \left( (2 + \sin(2\pi x / \varepsilon)) / 2 \right) / 4\pi^2. \end{aligned}$$

Учитывая представления (22) и (23) функций  $N_1$  и  $N_2$ , для производной  $U'(x, \varepsilon)$  решения задачи (1)–(4) на отрезке  $0 \leq x \leq l_1$  имеем выражение

$$\begin{aligned} U_1'(x, \varepsilon) = & \frac{2b_0}{2 + \sin(2\pi x / \varepsilon)} \text{I} \\ & \text{I} \left( x - l_1 - \frac{l_2}{2} - \frac{l_3}{4} + \frac{\varepsilon}{4\pi} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi x}{\varepsilon} \right) \right) \right). \quad (25) \end{aligned}$$

Аналогично строится асимптотическое разложение решения  $u_2(x)$  задачи (17)–(18) и затем решение  $u_3(x)$  задачи (19)–(20). Так как функции  $K_i$  отличаются друг от друга только постоянным множителем, то выражения (22), (23) для функций  $N_1, N_2$  и выражение (8) для функции  $w_i$  остаются прежними. Изменится лишь цепочка краевых задач для определения функции  $v$ . Таким образом, для производной  $U'(x, \varepsilon)$  решения задачи (1)–(4) на отрезке  $l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$  получим выражение

$$\begin{aligned} U_2'(x, \varepsilon) = & \frac{2b_0}{2 + \sin(2\pi x / \varepsilon)} \text{I} \\ & \text{I} \left( x - l_1 - l_2 - \frac{l_3}{2} + \frac{\varepsilon}{4\pi} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi x}{\varepsilon} \right) \right) \right), \quad (26) \end{aligned}$$

и на отрезке  $l_1 + l_2 \leq x \leq l$  получим

$$U_3'(x, \varepsilon) = \frac{2b_0}{2 + \sin(2\pi x / \varepsilon)} \left( x - l + \frac{\varepsilon}{4\pi} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi x}{\varepsilon} \right) \right) \right). \quad (27)$$

*Замечание.* Использованная здесь процедура построения асимптотического разложения решения легко переносится на случай многоступенчатого стержня с числом ступеней большим трех. Кроме того, задание для каждой ступени с номером  $i$  своего характерного размера структурной ячейки  $\varepsilon_i$  не вносит существенных изменений в процедуру построения решения.

#### 4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

По-прежнему для каждого из отрезков (стержней) решение  $U(x, \varepsilon)$  задачи (1)–(4) пометим индексом, соответствующим этому отрезку. На отрезке  $l_1 + l_2 \leq x \leq l$  из уравнения (1) с учетом краевого условия  $U_3'(l) = 0$  следует равенство

$$K_3(x/\varepsilon)U_3'(x, \varepsilon) = \int_l^x S_3(x/\varepsilon)\gamma_0 dx = \gamma_0(2x - \varepsilon \cos(2\pi x/\varepsilon)/2\pi + c_3), \quad (28)$$

где  $c_3 = \varepsilon/2\pi - 2l$ . Заметим, что асимптотическое разложение (27) полностью совпадает с выражением для производной точного аналитического решения, которое следует из (28). Аналогично на отрезке  $l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$  из уравнения (1) с учетом соотношения (28) и второго из краевых условий (4) следует равенство

$$K_2(x/\varepsilon)U_2'(x, \varepsilon) = \gamma_0(4x - \varepsilon \cos(2\pi x/\varepsilon)/\pi + 2c_2), \quad (29)$$

где  $c_2 = \varepsilon/2\pi - 2l + l_3$ . Так же на отрезке  $0 \leq x \leq l_1$  из уравнения (1) с учетом соотношения (29) и первого из краевых условий (4) следует равенство

$$K_1(x/\varepsilon)U_1'(x, \varepsilon) = \gamma_0(8x - 2\varepsilon \cos(2\pi x/\varepsilon)/\pi + 4c_1), \quad (30)$$

где  $c_1 = \varepsilon/2\pi - 2l + l_2 + 3l_3/2$ . Проинтегрируем уравнение (30), учитывая первое из краевых условий (2), получим

$$U_1(x, \varepsilon) = b_0 \int_0^x \frac{2x - \varepsilon \cos(2\pi x/\varepsilon)/2\pi + c_1}{2 + \sin(2\pi x/\varepsilon)} dx.$$

Используя полученное выражение, вычислим  $U_1(l_1)$  и, проинтегрировав уравнение (29), получим решение задачи (1)–(4) на отрезке  $l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$

$$U_2(x, \varepsilon) = b_0 \int_{l_1}^x \frac{2x - \varepsilon \cos(2\pi x/\varepsilon)/2\pi + c_2}{2 + \sin(2\pi x/\varepsilon)} dx + U_1(l_1, \varepsilon).$$

Наконец, на отрезке  $l_1 + l_2 \leq x \leq l$  получим следующее решение задачи (1)–(4)

$$U_3(x, \varepsilon) = b_0 \int_{l_1+l_2}^x \frac{2x - \varepsilon \cos(2\pi x/\varepsilon)/2\pi + c_3}{2 + \sin(2\pi x/\varepsilon)} dx + U_2(l_1 + l_2, \varepsilon).$$

*Замечание.* Рассмотрим общий случай, когда для каждой ступени с номером  $i$  выбран свой характерный размер структурной ячейки  $\varepsilon_i$ , то есть в формуле (5) площади поперечного сечения для каждого стержня-ступени задано индивидуальное значение  $\varepsilon_i$ . В этом случае формулы (28)–(30) остаются справедливыми после замены  $\varepsilon$  на соответствующее данной ступени  $\varepsilon_i$ . Более того, если  $l_i$  не кратно  $\varepsilon_i$  или  $l_1$  не кратно  $\varepsilon_2$ , или  $l_1 + l_2$  не кратно  $\varepsilon_3$ , то формулы (28)–(30) по-прежнему остаются справедливыми, но постоянные интегрирования  $c_i$  примут несколько более сложный вид.

#### 5. СРАВНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО И ТОЧНОГО РЕШЕНИЙ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

Точное значение напряжения в каждой ступени структурированного стержня дается выражением  $H_2(x) = E_0 U_i'(x, \varepsilon)$ , в котором деформации  $U_i'$  соответствующей ступени вычисляются из соотношений (28)–(30) или по формулам (25)–(27) асимптотических разложений  $U_i'$ . В эквивалентном однородном трехступенчатом стержне с удельным весом материала  $\gamma_0$  и с постоянными площадями поперечного сечения в каждой ступени равными соответственно 8, 4 и 2 напряжение дается формулой [6]

$$H_3(x) = \begin{cases} \gamma_0(x - l_1 - l_2/2 - l_3/4), & 0 \leq x \leq l_1, \\ \gamma_0(x - l_1 - l_2 - l_3/2), & l_1 \leq x \leq l_1 + l_2, \\ \gamma_0(x - l), & l_1 + l_2 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (31)$$

Сравним напряжения в стержне со структурой с напряжениями в эквивалентном трехступенчатом стержне с  $\gamma_0 = 1.8$ , в котором высоты ступеней заданы так:  $l_1 = 7$ ,  $l_2 = 5$ ,  $l_3 = 3$ . На рис. 2 построены графики напряжений  $H_2$  (быстро осциллирующие кривые 1, соответствующие напряжениям в трех ступенях) и  $H_3$  (отрезки прямых 2 соответствуют напряжениям в эквивалентном однородном стержне) в зависимости от высоты  $x$  поперечного сечения стержня, в котором каждая ступень имеет свой характерный размер структурной ячейки:  $\varepsilon_1 = 1/3$ ,  $\varepsilon_2 = 1/5$ ,  $\varepsilon_3 = 1/7$ . Заметим, что для любых  $\varepsilon$  справедливо неравенство  $H_2(x)/H_3(x) \leq 2/(2 + \sin(2\pi x/\varepsilon)) \leq 2$ . При этом правое равенство достигается в  $n = l/\varepsilon$  точках  $x = x_k = \varepsilon k - \varepsilon/4$ , где  $k = 1, 2, \dots, n$ . Следовательно, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в бесконечном числе

различных внутренних точек стержня коэффициент концентрации напряжения за счет структуры стремится к двум, что согласуется с графиком рис. 2.

Если в разложении (21) учесть только два первых члена, то есть пренебречь членами, содержащими  $\varepsilon$  во второй и более высокой степени, то для  $0 \leq x \leq l_1$  получим приближенное выражение производной

$$u_3'(x) \approx (v(x) + \varepsilon N_1(x/\varepsilon)v'(x))' = \frac{2b_0}{S_3} \left( x - l + \frac{\varepsilon}{4\pi} \right) + 2\varepsilon b_0 \left( \frac{N_1}{\sqrt{3}} - \frac{\langle N_1 \rangle}{S_3} \right), \quad (32)$$

где  $S_3 = 2 + \sin(2\pi x/\varepsilon)$ . Согласно (8) функция  $w_3(x/\varepsilon) \approx O(\varepsilon^2)$ , поэтому приближенное с точностью до  $\varepsilon$  разложение производной  $U_3'(x)$  решения задачи (1)–(4) для  $0 \leq x \leq l_1$  дается по-прежнему выражением (32).

Исследуем с помощью разложений (27) и (32) влияние членов различного порядка малости по  $\varepsilon$  на величину напряжения. Численное сравнение полученных результатов приведено для верхней ступени  $l_1 + l_2 \leq x \leq l$  структурированного стержня с удельным весом материала  $\gamma_0 = 1.8$ . Высоты ступеней выбраны по-прежнему:  $l_1 = 7, l_2 = 5, l_3 = 3$ . Расчеты показывают, что с уменьшением  $\varepsilon$  (начиная с  $\varepsilon = 1/6$ ) графики напряжений  $H_1(x) = E_0 u_3'(x)$  и  $H_2(x) = E_0 U_3'(x)$  становятся практически неразличимыми. На рис. 3 при  $\varepsilon = 1/2$  кривая 1 показывает вклад в зависимость напряжения  $H_2(x)$  членов, содержащих в разложении решения  $U(x)$  только члены с  $\varepsilon^2$ , то есть приведен график функции  $\delta_2(H_2) = \varepsilon^2 E_0 [N_2(\xi)v''(x) - \ln(1 + \sin(2\pi x/\varepsilon)/2)/4\pi^2]$ . Заметим, что функция  $\delta_2(H_2)$  является 1 периодической функцией по  $\xi$ , так как  $v''(x) = 2/\sqrt{3}$  и функция  $N_2(\xi)$  является 1

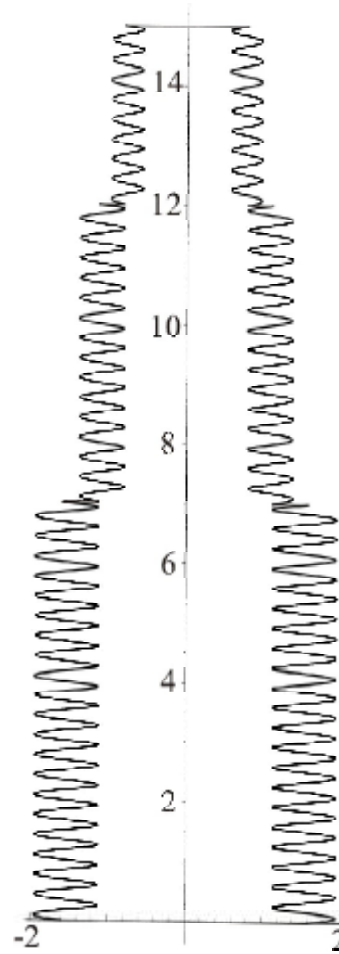


Рис. 1. Структурированный стержень ( $\varepsilon = 1/3$ )

периодической. Кривая 2 на этих рисунках показывает относительную погрешность, то есть величину  $(H_2 - H_1)/H_2 = \delta_2(H_2)/H_2$ . Из графика видно, что в асимптотических разложениях решений данной задачи можно не учитывать члены с  $\varepsilon$  во второй и более высокой степени, так как влияние этих членов заметно лишь для небольшой верхней части верхней ступени стержня.

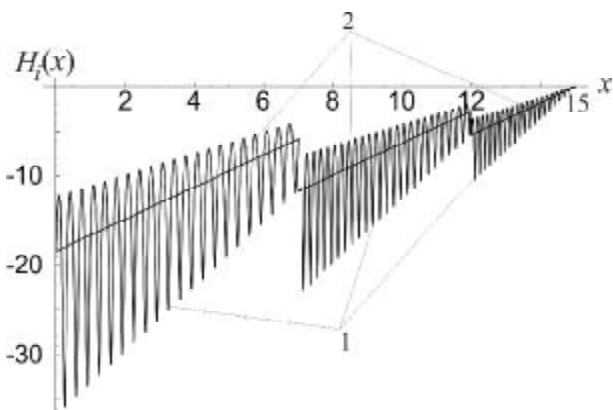


Рис. 2. Напряжения  $H_2$  (кривая 2) и  $H_3$  (отрезки прямых 1) при  $\varepsilon_1 = 1/3, \varepsilon_2 = 1/5, \varepsilon_3 = 1/7$

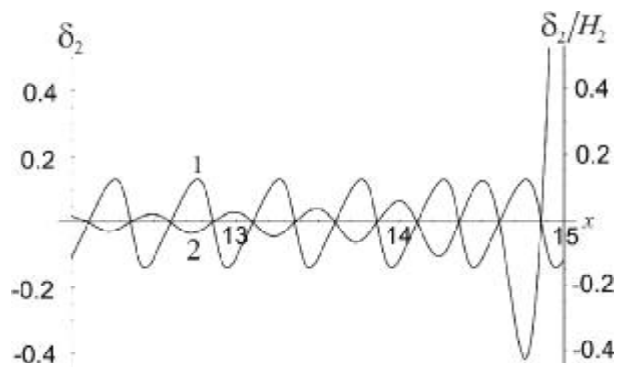


Рис. 3. Вклад в напряжение  $H_2$  членов с  $\varepsilon^2$  при  $\varepsilon = 1/2$ : кривая 1 — график разности напряжений  $H_2 - H_1$ , кривая 2 — график относительной погрешности  $(H_2 - H_1)/H_2$

## ВЫВОДЫ

Численный анализ убеждает, что при  $\varepsilon \leq 1/6$  асимптотическое разложение решения данной задачи достаточно строить лишь до членов с  $\varepsilon$  в первой степени включительно. Показано, что напряжения в структурированном стержне могут существенно превышать напряжения в эквивалентном однородном стержне.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 07-01-00163) и в рамках проекта № 11.16, входящего в программу Президиума РАН.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984, 352 с.
2. Астапов Н.С., Корнев В.М. Оценка прочности структурированного стержня методом осреднения // Известия Самарского научного центра РАН. 2009. Т. 11. №3. С. 294-300.
3. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 432 с.
4. Образцов И.Ф., Власов А.Н., Яновский Ю.Г. Расчетный метод оценки прочностных свойств структурно неоднородных сред // Докл. РАН. 2006. Т.406. №2. С. 196-199.
5. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: МГУ, 1984, 336 с.
6. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960, 380 с.

## STRENGTH ESTIMATION OF COMPOUND ROD WITH REGULAR STRUCTURE

© 2011 N.S. Astapov

Institute of Hydrodynamics named after M.A. Lavrentyev  
of Siberian Branch of RAS, Novosibirsk  
Novosibirsk State University

The stress-deformed state under construction with the action of own weight an three-tread vertical rod compounded one after another from three structural rods is studying analytically. The stresses in each rod are calculated by averaging. The procedure of gluing solution is described in detail. It has been shown that compressive stresses in each one rod essentially exceed maximum stresses in cross-sections of the equivalent homogenous rod.

Key words: structured rod strength, asymptotic expansion, gluing problem.