УДК 656

МАТРИЧНЫЙ ПОДХОД В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ С НЕСКОЛЬКИМИ ТРАНСПОРТНЫМИ СРЕДСТВАМИ

© 2011 С.А. Ишков, Е.С. Ишкова

Самарский государственный аэрокосмический университет

Поступила в редакцию 11.12.2010

В статье рассматривается задача планирования доставки грузов с использованием нескольких транспортных средств с учетом ограничений на объемы и массы перевозимых грузов. В качестве методологического подхода применяется т.н. матричный метод, позволяющий исходную задачу разделить на три задачи линейного программирования меньшей размерности. Достоинства данного подхода иллюстрируются на примере доставки грузов между одиннадцатью пунктами тремя транспортными средствами.

Ключевые слова: матричный метод, задача маршрутизации, коммивояжер, несколько транспортных средств, ограничения на массу, ограничения на объем.

Несмотря на значительные успехи, достигнутые в решении практических задач транспортной логистики, актуальной остается проблема сокращения вычислительных затрат на поиск оптимальных решений [1]. В настоящей работе рассмотрен подход, позволяющий упростить решение задачи маршрутизации для варианта доставки (сбора) груза несколькими транспортными средствами. Классическая задача коммивояжера, лежащая в основе такого рода задач, заключается в отыскании самого выгодного маршрута, проходящего через указанные пункты с возвратом в исходную точку. С вычислительной точки зрения эта так называемая NP сложная задача, требующая для своего решения значительных вычислительных ресурсов [2]. Развитие вычислительной техники несколько снижает остроту этой проблемы, однако практика, в свою очередь, выдвигает все более сложные задачи, как по количеству оптимизируемых параметров, так и по количеству ограничений, учитываемых при ее решении [3]. Одним из вариантов усложнения задачи коммивояжера является постановка задачи маршрутизации с несколькими транспортными средствами (ТС) [4]. При этом накладываются ограничения на массу перевозимого груза каждым ТС, на ее объем, совместимость по типам и т.д. Решение данной задачи методами линейного целочисленного программирования приводит к многократному увеличению размерности и делает ее "неподъемной" для оперативного использования. Существующие подходы к решению задач подобного типа предусматривают введение эвристических приемов (гипотез) [5], [6] позволяющих осуществить декомпозицию задачи [7].

Ишков Сергей Алексеевич, доктор технических наук, профессор, директор института дополнительного профессионального образования. E-mail: idpo@ssau.ru
Ишкова Елена Сергеевна, инженер. E-mail: ishlena@gmail.com

В настоящей статье на основе матричного подхода разрабатывается процедура разделения исходной задачи с несколькими ТС на ряд более простых задач с одним ТС.

1. Рассмотрим симметричную задачу выбора маршрута для нескольких ТС.

Графически изобразим постановку задачи на рис. 1.

Введем обозначения: j – номер пункта посещения ТС $\forall j = \overline{1, J}$, где J – количество пунктов;
i – номер пути $\forall i = \overline{1, I}$, где I – количество путей.

Как нетрудно заметить, в общем случае количество путей связано с количеством пунктов соотношением:

$$I = \frac{J(J-1)}{2}. \qquad (1)$$

Введем в рассмотрение матрицу примыкания Π, размерности JxI, определяющая связь между j-м пунктом посещения ТС и i-м путем. Если пути, примыкающие к j пункту нулевые, то посещения

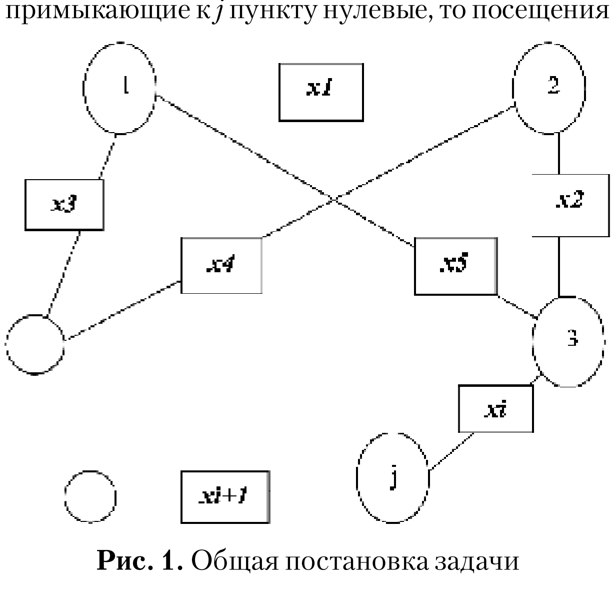

Рис. 1. Общая постановка задачи

пункта нет, если единичные, посещение есть.

Если элемент матрицы n_{ij} =0, то путь i не примыкает к пункту j, если n_{ij} =1 – то примыкает.

Введем в рассмотрение вектор переменных x_k размерности I, определяющий маршрут k транспортного средства $\forall k=\overline{1,K}$, где k общее количество используемых ТС (они могут быть как одного, так и разного типа). Элементы вектора x_k – булевые переменные, означающие: x_{ki} =0 – пути i нет, x_{ki} =1 - путь i есть. Пусть задана матрица строка T_k, размерности I, определяющая затраты (времени, топлива, денежных средств и т.п.) "k" ТС на перемещение по путям i.

Будем полагать, что каждый пункт на маршруте посещается только одним ТС, а после выполнения транспортной операции возвращается в исходный пункт (пусть это будет пункт i=1). С учетом этого можно записать:

$$\prod \cdot x_k = 2P_k,\ \forall k=\overline{1,K}, \qquad (2)$$

где P_k – вектор посещения "k" ТС пунктов маршрута размерности J, элементы вектора P_k – булевые переменные, $P_{kj}\in[0,1]$. P_{kj} =1 означает, что пункт посещается "k" ТС, P_{kj} =0 – не посещается.

Таким образом, к каждому пункту, в случае его посещения, примыкают два пути: один прибывающий, другой убывающий.

Пусть каждое ТС имеет две характеристики:

1. G_k – максимальная масса перевозимого груза для k-го ТС, $\forall k=\overline{1,K}$

2. V_k – максимальный объем перевозимого груза для k-го ТС, $\forall k=\overline{1,K}$.

Запишем следующие ограничения:

$$\sum_{j=1}^{J} g_j \cdot P_{kj} \le G_k \ \ \forall k=\overline{1,K}$$
$$\sum_{j=1}^{J} v_j \cdot P_{kj} \le V_k \ \ \forall k=\overline{1,K}, \qquad (3)$$

где g_j, v_j – массы и объемы перевозимых грузов по "j" пунктам ($\forall j=\overline{1,J}$).

Если подставить условия посещаемости пунктов (2) в ограничения (3), получим:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}5\cdot \mathrm{g}\cdot \Pi \cdot \mathrm{x}_k \le G_k \\ 0{,}5\cdot v\cdot \Pi \cdot \mathrm{x}_k \le V_k \end{array}\right. \ \forall k=\overline{1,K} \qquad (4)$$

где g и v – матрицы строки размерности J, состоящие из элементов масс и объемов g_j, v_j соответственно.

С учетом введенных переменных, запишем выражение для целевой функции в следующем виде:

$$L=\sum_{k=1}^{K} T_k \cdot x_k \to \min \quad \forall k=\overline{1,K} \qquad (5)$$

Таким образом, задача выбора оптимального маршрута для "k" ТС формулируется следующим образом: определить вектора маршрутов x_k для каждого ТС по критерию минимума суммарных временных затрат (5) с учетом выполнения ограничений (4).

Сформулированная задача относится к классу задач целочисленного линейного программирования с "KxJ" количеством переменных и с "$2K$" количеством ограничений в форме неравенств.

2. Разделим вектор x_k на два вектора $x_k{}^A$ и $x_k{}^B$, соответственно с размерностями J и (I-J).

$$x_k = [x_k{}^A,\ x_k{}^B]$$

Аналогичным образом разделим матрицы $T_к$ и $П$:

$$T_k = \left[T_k{}^A; T_k{}^B\right]$$
$$\Pi = \left[\Pi^A; \Pi^B\right]$$

где Π^A – квадратная матрица размерности $J\times J$, Π^B – матрица размерности $J\times(I$-$J)$.

В общем случае данное деление может быть осуществлено произвольно, однако полученная матрица Π^A должна быть не особой, т.е. иметь обратную матрицу $\left(\Pi^A\right)^{-1}$.

Запишем условие посещаемости (2) с учетом проведенного деления:

$$2\mathrm{P}_\mathrm{k} = (\Pi^A \cdot x_k{}^A + \Pi^B \cdot x_k{}^B). \qquad (6)$$

Находим из этого равенства $x_k{}^A$:

$$x_k{}^A = 2\left(\Pi^A\right)^{-1}\cdot P_k - \left(\Pi^A\right)^{-1}\cdot \Pi^B \cdot x_k{}^B. \quad (7)$$

Запишем выражение для целевой функции с учетом (7):

$$L=\sum_{k=1}^{K}\left\{T_k^A \cdot 2\left[\left(\Pi^A\right)^{-1}\cdot P_k - \left(\Pi^A\right)^{-1}\cdot \Pi^B \cdot x_k^B\right] + T_k^B\cdot x_k^B\right\}\to \min$$
$$(8)$$

$$L=2\sum_{k=1}^{K} T_k^A\cdot\left(\Pi^A\right)^{-1}\cdot P_k + \sum_{k=1}^{K}\left[-T_k^A\cdot\left(\Pi^A\right)^{-1}\cdot\Pi^B\cdot x_k^B + T_k^B\cdot x_k^B\right]\to\min$$

Введем обозначения:

$$M_k = 2T_k{}^A\left(\Pi^A\right)^{-1};$$

$$L^* = \sum_{k=1}^{K} M_k \cdot P_k; \qquad (9)$$

$$L_0 = \sum_{k=1}^{K}\left\{-T_k^A\cdot\left(\Pi^A\right)^{-1}\cdot\Pi^B\cdot x_k^B + T_k^B\cdot x_k^B\right\}\to\min.$$

Таким образом, проделанные преобразования позволяют представить целевую функцию в виде двух частей: первая часть линейно зависит от P_k; вторая часть зависит от $x_k{}^B$. Ограничения, в соответствии с (3), зависят только от P_k. Это позволяет разделить задачу оптимизации на две независимые задачи. Запишем целевую функцию и ограничения с учетом введенных обозначений:

$$L = L^* + L_0 \to \min\,; \qquad (10)$$

$$\begin{matrix} g \cdot P_k \le G_k \\ v \cdot P_k \le V_k \end{matrix} \qquad \forall k = \overline{1, K}\,; \qquad (11)$$

$$\sum_{k=1}^{K} P_{jk} = 1 \qquad \forall j = \overline{2, J}\,; \qquad (12)$$

$$P_{1k} = 1 \qquad \forall k = \overline{1, K}\,. \qquad (13)$$

Выполнение равенства (12) означает, что каждый пункт, кроме первого, посещается только одним ТС.

Таким образом, в соответствии с (10), из общей задачи оптимизации может быть выделена задача определения пунктов посещения P_k каждым ТС с учетом ограничений (11) и условий (13). Далее должна решаться классическая задача маршрутизации для каждого ТС.

Как следует из приведенных выше соотношений, основной вычислительной проблемой при данном разделении будет являться обращение матрицы Π^A. При большой размерности задачи это может наложить на предлагаемый метод существенные ограничения.

Проведенные численные исследования задачи позволили сформировать следующее правило формирования матрицы Π^A, обеспечивающее ее обратимость: при нечетном количестве пунктов посещения вектор x^A должен включать только те пути, которые образуют замкнутый маршрут с возвращением в исходную точку i=1; при четном количестве пунктов посещения вектор x^A будет содержать пути, образующий замкнутый маршрут с возвращением в точку i=2.

Как показали численные расчеты, при таком правиле формирования вектор x^A и Π^A (правиле нумерации пунктов посещения и путей) матрица Π^A будет иметь обратную, т.е. будет являться не особой. Проведенные расчеты обратных матриц $\left(\Pi^A\right)^{-1}$ различного порядка сформулированы по вышеописанному правилу и рассчитаны в соответствии с (9) для произвольных значений матриц T_k элементы матрицы M_k. Матрица M_k - матрица-строка размерности J. Полученные решения запишем в виде таблиц для нечетного (табл. 1) и четного (табл. 2) количества пунктов посещения J.

Таблица 1. Элементы матрицы M_k для нечетного числа пунктов J

j / i	2	3	4	5	6	7	8	9
M_3	T1+T2-T3	-T1+T2+T3	-					
M_5	T1+T2-T3+T4-T5	-T1+T2 +T3-T4+T5	T1-T2+T3+T4-T5	-T1+T2-T3+T4+T5	-			
M_7	T1+T2-T3+T4-T5+T6-T7	-T1+T2+ T3-T4+T5-T6+T7	T1-T2+T3+T4-T5+T6-T7	-T1+T2-T3+T4+T5-T6+T7	T1-T2+T3-T4+T5+T6-T7	-T1+T2-T3+T4-T5+T6+T7	-	
M_9	T1+T2-T3+T4-T5+T6-T7+T8-T9	-T1+T2+ T3-T4+T5-T6+T7-T8+T9	T1-T2+T3+T4-T5+T6-T7+T8-T9	-T1+T2-T3++T4+T5-T6+T7-T8+ T9	T1-T2+T3-T4+T5+T6-T7+T8-T9	-T1+T2-T3+T4-T5+T6+T7-T8+ T9	T1-T2+T3-T4+T5-T6+T7+T8-T9	-T1+T2-T3+T4-T5+T6-T7+T8+T9

Таблица 2. Элементы матрицы M_k для четного числа пунктов J

j / i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_4	T2-T3+T4	T2+T3-T4	-T2+T3+T4	-					
M_6	T2-T3+T4-T5+T6	T2+T3-T4+T5-T6	-T2+T3+T4-T5+T6	T2-T3+T4+T5--T6	-T2+T3-T4+T5+T6	-			
M_8	T2-T3+T4-T5+T6-T7+T8	T2+T3-T4+T5-T6+T7-T8	-T2+T3+T4-T5+T6-T7+T8	T2-T3+T4+T5-T6+T7-T8	-T2+T3-T4+T5+T6-T7+T8	T2-T3+T4-T5+T6+T7-T8	-T2+T3-T4+T5-T6+T7+T8	-	
M_{10}	T2-T3+T4-T5+T6-T7+T8-T9+T10	T2+T3-T4+T5-T6+T7-T8+T9-T10	-T2+T3+T4-T5+T6-T7+T8-T9+T10	T2-T3+T4+T5-T6+T7-T8+T9-T10	-T2+T3-T4+T5+T6-T7+T8-T9+T10	T2-T3+T4-T5+T6+T7-T8+T9-T10	-T2+T3-T4+T5-T6+T7+T8-T9+T10	T2-T3+T4-T5+T6-T7+T8+T9-T10	-T2+T3-T4+T5-T6+T7-T8+T9+T10

Дедуктивный анализ полученных результатов позволил получить аналитические формулы для расчета искомых компонент матрицы M_k для произвольного J.

$$M_{k,\,j,\,i} = (-1)^j \left[-\sum_{i=1}^{j-1} (-1)^i T_i + \sum_{i=j}^{k} (-1)^i T_i \right]. \quad (14)$$

Таким образом, соотношение (14) позволяет осуществить разделение задачи выбора маршрута для нескольких ТС, не прибегая к обращению матрицы Π^A.

3. Проиллюстрируем эффективность предлагаемого подхода на примере решения симметричной упрощенной задачи маршрутизации с одиннадцатью пунктами посещения и решим ее с использованием трех транспортных средств.

Необходимо найти значения элементов векторов P^*_k (k=3) посещения каждого пункта каждым транспортным средством, и оптимальные маршруты объезда пунктов посещения для каждого транспортного средства, обеспечивающие минимум целевой функции.

Правило нумерации путей данной задачи построен ниже (табл. 3), где в ячейках графа записаны номера путей (X_{kj}), а в заголовках строк и столбцов – номера пунктов, к которым примыкают пути X_{kj} .

В соответствии с графом путей задачи (табл. 3) общее количество пунктов J = 11 (причем первый пункт – база всех ТС), а общее количество путей I = 55.

Зададим затраты на перемещение каждого транспортного средства T^*_k (k=3) по соответствующим путям.

T^*_1 = [7 6 8 11 8 10 9 4 5 8 6 3 4 5 6 4 3 5 6 5 4 3 6 6 5 4 3 7 6 5 4 8 7 6 5 10 8 7 6 12 10 8 7 6 5 4 3 10 12 7 8 8 6 5 12]

Предполагается, что затраты на перемещение для второго и третьего ТС превышают затраты для первого ТС в 1,2 раза и в 1,25 раза, соответственно: $T^*_2 = 1.2 \cdot T^*_1$, $T^*_3 = 1.25 \cdot T^*_1$.

Основной проблемой решения данного типа задач матричным методом является проблема нахождения обратной матрицы $\left(\Pi^A\right)^{-1}$. Пусть

$$\Pi = \left[\Pi^A,\ \Pi^B\right].$$

Тогда, в соответствии с правилом формирования матрицы Π разделим затраты на перемещение для каждого транспортного средства следующим образом:

T_1^A = [7 6 8 11 8 10 9 4 5 8 6]

T_1^B = [3 4 5 6 4 3 5 6 5 4 3 6 6 5 4 3 7 6 5 4 8 7 6 5 10 8 7 6 12 10 8 7 6 5 4 3 10 12 7 8 8 6 5 12]

$T_2^A = 1.2 \cdot T_1^A$, $T_2^B = 1.2 \cdot T_1^B$

$T_3^A = 1.25 \cdot T_1^A$, $T_3^B = 1.25 \cdot T_1^B$

Решим данную задачу несколькими вариантами: без учета и с учетом ограничений на массу груза.

3.1. Решение задачи без учета ограничений

Необходимо найти значения элементов векторов P^*_k (k=3) посещения каждого пункта каждым транспортным средством, и оптимальные маршруты объезда пунктов посещения для каждого транспортного средства, обеспечивающие минимум целевой функции, с учетом выполнения ограничений на посещаемость ТС заданных пунктов (только одно ТС может посетить данный пункт):

$$L^* = M^*_1 P^*_1 + M^*_2 P^*_2 + M^*_3 P^*_3 \to \min$$

Используя формулу (14) определим элементы матрицы M и запишем выражение для целевой функции:

Таблица 3. Правило нумерации путей между одиннадцатью пунктами

	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***
1	XX	2	12	13	14	15	16	17	18	19	1
2	2	XX	3	28	29	31	34	35	42	49	20
3	12	3	XX	4	30	32	41	36	50	43	21
4	13	28	4	XX	5	33	40	46	37	51	22
5	14	29	30	5	XX	6	39	47	52	38	23
6	15	31	32	33	6	XX	7	48	44	53	24
7	16	34	41	40	39	7	XX	8	54	45	25
8	17	35	36	46	47	48	8	XX	9	55	26
9	18	42	50	37	52	44	54	9	XX	10	27
10	19	49	43	51	38	53	45	55	10	XX	11
11	1	20	21	22	23	24	25	26	27	11	XX

$$L^* = 11P_{12} + P_{13} + 14P_{14} + 8P_{15} + 8P_{16} + 12P_{17} + \\ +5P_{18} + 3P_{19} + 6P_{110} + 9P_{111} + 1.2\,(11P_{22} + P_{23} + \\ +14P_{24} + 8P_{25} + 8P_{26} + 12P_{27} + 5P_{28} + 3P_{29} + \\ +6P_{210} + 9P_{211}) + 1.25(11P_{32} + P_{33} + 14P_{34} + 8P_{35} + \\ +8P_{36} + 12P_{37} + 5P_{38} + 3P_{39} + 6P_{310} + 9P_{311}) \to min \quad (15)$$

Поскольку ограничения данной задачи отсутствуют, нетрудно получить очевидный вывод о распределении ТС – на данной транспортной операции должно быть задействовано только первое ТС. Его маршрут определяется из решения стандартной задачи маршрутизации с одним ТС: 1-11-9-7-10-6-2-4-8-5-3-1. Значение целевой функции составило величину L = 46.

3.2. Решение задачи с учетом ограничений на массу перевозимого груза каждым ТС

Зададим грузоподъемность транспортных средств $G_k = (10, 15, 18)$ и матрицу распределения грузов по пунктам $G^* = [0\ 2\ 1\ 3\ 1\ 2\ 2\ 3\ 4\ 0.5\ 0.5]$.

На первом этапе необходимо найти значения элементов векторов P^*_k (k=3) посещения каждого пункта каждым транспортным средством, и оптимальные маршруты объезда пунктов посещения для каждого транспортного средства, обеспечивающие минимум целевой функции, с учетом выполнения ограничений на массу и на посещаемость ТС заданных пунктов (только одно ТС может посетить данный пункт).

Запишем ограничения для данной задачи:

$$\begin{gathered} 2P_{12} + P_{13} + 3P_{14} + P_{15} + 2P_{16} + 2P_{17} + \\ +3P_{18} + 4P_{19} + 0{,}5P_{110} + 0{,}5P_{111} \le 10 \\ 2P_{22} + P_{23} + 3P_{24} + P_{25} + 2P_{26} + 2P_{27} + \\ +3P_{28} + 4P_{29} + 0{,}5P_{210} + 0{,}5P_{211} \le 15 \\ 2P_{32} + P_{33} + 3P_{34} + P_{35} + 2P_{36} + 2P_{37} + \\ +3P_{38} + 4P_{39} + 0{,}5P_{310} + 0{,}5P_{311} \le 18 \end{gathered} \quad (16)$$

Решение задачи целочисленного линейного программирования (15) с учетом ограничений (16) дает значения векторов P^*_1, P^*_2, P^*_3:

$P^*_1 = [1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1]$ – т.е. первое ТС должно посетить пункты под номерами 1 (база), 2, 4, 6, 7, 10, 11

$P^*_2 = [0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0]$ – т.е. второе ТС должно посетить пункты под номерами 1 (база), 3, 5, 8, 9

$P^*_3 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$ – т.е. третье ТС никакие пункты не посещает.

Решая отдельно каждую задачу для каждых транспортных средств стандартным методом, получим следующие оптимальные маршруты: маршрут первого ТС 1-11-4-2-6-10-7-1; маршрут второго ТС 1-9-8-5-3-1; третье ТС для транспортной операции не используется. Значение целевой функции составило величину L = 55,2 (целевая функция для первого ТС равна 30; целевая функция для второго ТС равна 25,2).

Решим задачу для другого распределения полезного груза.

Зададим грузоподъемность транспортных средств $G_k = (3, 5, 15)$ и матрицу распределения грузов по пунктам $G^* = [0\ 2\ 1\ 3\ 1\ 2\ 2\ 3\ 4\ 0.5\ 0.5]$.

Запишем ограничения для данной задачи:

$$\begin{gathered} 2P_{12} + P_{13} + 3P_{14} + P_{15} + 2P_{16} + 2P_{17} + \\ +3P_{18} + 4P_{19} + 0{,}5P_{110} + 0{,}5P_{111} \le 3 \\ 2P_{22} + P_{23} + 3P_{24} + P_{25} + 2P_{26} + 2P_{27} + \\ +3P_{28} + 4P_{29} + 0{,}5P_{210} + 0{,}5P_{211} \le 5 \\ 2P_{32} + P_{33} + 3P_{34} + P_{35} + 2P_{36} + 2P_{37} + \\ +3P_{38} + 4P_{39} + 0{,}5P_{310} + 0{,}5P_{311} \le 15 \end{gathered} \quad (17)$$

Решение задачи целочисленного линейного программирования (15) с учетом ограничений (17) дает значения векторов P^*_1, P^*_2, P^*_3:

$P^*_1 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1]$ - т.е. первое ТС должно посетить пункты под номерами 1 (база), 7, 10, 11.

$P^*_2 = [1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$ - т.е. второе ТС должно посетить пункты под номерами 1 (база), 2, 5, 6.

$P^*_3 = [0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0]$ - т.е. третье ТС должно посетить пункты под номерами 1 (база), 3, 4, 8, 9.

Решая отдельно задачу для каждых транспортных средств стандартным методом, получим следующие оптимальные маршруты: маршрут первого ТС 1-7-10-11-1; маршрут второго ТС 1-5-2-6-1; маршрут третьего ТС 1-3-9-8-4-1. Значение целевой функции составило величину L = 63,95 (целевая функция для первого ТС равна 16; целевая функция для второго ТС равна 19,2; целевая функция для третьего ТС равна 28,75).

Таким образом, предложенный подход в решении задачи транспортной логистики, позволяет разделить общую задачу с несколькими ТС, 55 переменными и более 40 количеством ограничений на ряд задач меньшей размерности, тем самым, сократив размерность исходной задачи, а значит и время на ее решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беленький А.С.* Исследование операций в транспортных системах: идеи и схемы методов оптимизации

планирования. М.: Мир, 1992.
2. *Oded Goldreich.* Introduction to Complexity Theory - Weizmann Institute of Science, Israel, 1999.
3. Алгоритмы решения задач коммивояжера большой размерности / *И.Х. Сигал, В.Р. Хачатуров и др.*//Комбинаторные методы и алгоритмы решения задач дискретной оптимизации большой размерности. М.: Наука, 2000. С. 295-317.
4. *Филин Е.А., Dupas R.* Маршрутизация автотранспорта (VRP – Vehicle Routing Problem). Саров: СарФТИ, 2005.
5. *Taillard E.D.* Parallel Iterative Search Methods for Vehicle Routing Problems, Networks 23, 1993.
6. *Меламед И.И., Плотинский Ю.М.* Эвристический алгоритм решения обобщенной задачи развозки //АиТ. 1979. №12. С.167-172.
7. *Сигал И.Х.* Декомпозиционный подход к решению задачи коммивояжера большой размерности и некоторые его приложения //Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1990. №6. С.143-155.

MATRIX METHOD FOR THE SOLVING THE ROUTING PROBLEM WITH SEVERAL VEHICLES

© 2011 S.A. Ishkov, E.S. Ishkova

Samara State Aerospace University

In this paper discussed procedure of separation of the original problem with several vehicles to a number of simpler problems with one vehicle which based on the matrix approach.

Key words: matrix method, routing problem, traveling salesman problem, several vehicles, restrictions

Ishkov Sergey, Doctor of Technics, Professor, Head of Institute of Additional Education. E-mail: idpo@ssau.ru
Ishkova Elena, Engineer. E-mail: E-mail: ishlena@gmail.com