

МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ПЕТЕЛЬ ГИСТЕРЕЗИСА МНОГОКОНТАКТНЫХ ВИБРОИЗОЛЯТОРОВ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

© 2011 Г.В. Лазуткин, В.А. Антипов, М.А. Петухова, Г.В. Изранова, Т.Ю. Зиновьева

Самарский государственный университет путей сообщения

Поступила в редакцию 14.02.2011

Метод аппроксимации петель гистерезиса многоконттактных систем виброизоляторов с сухим трением основан на экспериментальном определении и аппроксимации заранее найденного множества исходных семейств петель гистерезиса или исходных линий, установлении значений коэффициентов плоскопараллельного переноса их исходных процессов или точек исходных линий и нахождении функциональных связей коэффициентов аппроксимации исходной совокупности процессов деформирования и исходной совокупности линий с конструктивно-технологическими параметрами виброизоляторов.

Ключевые слова: петли гистерезиса, сплайн-аппроксимация, полиномы Чебышева, разложение Фурье, двойной колокольчик, результаты аппроксимации, экспериментальные данные.

Для решения задачи о приближении функции, заданной на точечном множестве установленного числа переменных, необходимо найти удобный и точный способ ее аналитического представления. К таким способам относятся: интерполяция, точечное аппроксимирование и сплайн-аппроксимация [1, 2, 3]. В рассматриваемом случае интерполяция не является подходящим способом, так как большое число узлов интерполяции приводит к громоздким выражениям для многочленов. Кроме того, значения координат точек содержат случайные ошибки, которые при интерполировании могут исказить реальный вид процессов деформирования. В этом смысле более приемлемым оказывается точечное аппроксимирование на основе метода наименьших квадратов. При этом аппроксимирующий полином можно весьма просто и удобно находить с помощью ортогональных функций. Вместе с тем, при точечном аппроксимировании требуется значительное количество точек. Их число должно быть особенно велико при выборе высокой степени аппроксимирующего полинома, что является существенным ограничением рассматриваемого способа.

Предлагается первоначально рассматривать промежуточное приближение к контурам петель гистерезиса с помощью сплайн-аппроксимации, в результате чего приближаемая функция оказывается заданной уже не на точечном множестве, а на конечных отрезках соответствующих переменных. В дальнейшем, с помощью интегрального аппроксими-

рования промежуточного приближения, можно осуществить переход от кусочно-полиномиальных функций к обычным алгебраическим многочленам.

Простота и точность промежуточного приближения достигается применением сплайнов первой степени (рис. 1, 2) в сочетании с выбором определенного количества точек (от 10 до 30) и системы неравно отстоящих абсцисс $x_i^{(k)} = \bar{x}_i \cdot A_k$. Подобный выбор преследует основную цель: как можно полнее и достовернее отразить особенности процессов деформирования виброизоляторов [4, 5].

Запишем уравнение деформации для s отрезков процессов на грузку и разгрузки K -ой петли гистерезиса семейства номера ℓ

$$R_c^{(\ell)(k)} = \begin{cases} R_{n,i}^{(\ell)(k)} + B_{n,c}^{(\ell)(k)}(\bar{x} - \bar{x}_i) & \forall \dot{x}^{(\ell)(k)} > 0; \\ R_{p,i}^{(\ell)(k)} + B_{p,c}^{(\ell)(k)}(\bar{x} - \bar{x}_i) & \forall \dot{x}^{(\ell)(k)} < 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{где } B_{n,c}^{(\ell)(k)} = \frac{R_{n,i}^{(\ell)(k)} - R_{n,i+1}^{(\ell)(k)}}{\bar{x} - \bar{x}_{i+1}};$$

$$B_{p,c}^{(\ell)(k)} = \frac{R_{p,i}^{(\ell)(k)} - R_{p,i+1}^{(\ell)(k)}}{\bar{x} - \bar{x}_{i+1}}$$

Причем для уменьшения погрешностей в определении полигональных функций, необходимо определить среднеарифметические значения $R_{n,i}^{(\ell)(k)}$, $B_{n,i}^{(\ell)(k)}$ и $R_{p,i}^{(\ell)(k)}$ и $B_{p,c}^{(\ell)(k)}$ при достаточно большом количестве повторяемых измерений [6]. Вместе с тем при полигональной форме описания петель гистерезиса их площадь оказывается заведомо меньше искомой. Подобные проблемы могут быть в значительной мере решены выбором достаточно большого количества точек (например, в два раза по сравнению с вышеуказанным количеством), но значительно уменьшения повторяемых измерений.

Лазуткин Геннадий Васильевич, кандидат технических наук, докторант СамГУПС.

Антипов Владимир Александрович, доктор технических наук, профессор. E-mail: ot46@mail.ru.

Петухова Мария Александровна, программист.

Изранова Галина Владимировна, старший преподаватель.

Зиновьева Татьяна Юрьевна, кандидат технических наук, доцент.

При таком подходе уменьшение погрешности определения петель гистерезиса обеспечивается за счет описания их процессов нагрузки и разгрузки кусочно-линейными отрезками. Каждый из них доставляет равномерное приближение по Чебышеву на множестве из трех точек, последовательно следующих группами друг за другом (отрезки 2 см. рис. 1).

Тогда для каждого c^* отрезков ($c^*=0,5c$) можно записать выражение (1) в виде:

$$R_{c^*}^{(\ell)(k)} = \begin{cases} R_{n,j}^{(\ell)(k)} - B_{n,j}^{(\ell)(k)} (\bar{x} - \bar{x}_j) & \forall \dot{\bar{x}}^{(\ell)(k)} > 0; \\ R_{p,j}^{(\ell)(k)} - B_{p,j}^{(\ell)(k)} (\bar{x} - \bar{x}_j) & \forall \dot{\bar{x}}^{(\ell)(k)} < 0; \end{cases} \quad (2)$$

где $j \in [0, 2, \dots, n-2]$;

$$R_{n,j}^{(\ell)(k)} = 0,5 \left(R_{n,i+2}^{(\ell)(k)} - R_{n,i}^{(\ell)(k)} \right) \left(\frac{R_{n,j}^{(\ell)(k)} + R_{n,i+1}^{(\ell)(k)} - \bar{x}_{i+1} - \bar{x}}{R_{n,i+2}^{(\ell)(k)} - R_{n,i}^{(\ell)(k)} - \bar{x}_{i+1} - \bar{x}} \right);$$

$$B_{n,j}^{(\ell)(k)} = \frac{R_{n,i}^{(\ell)(k)} - R_{n,i+2}^{(\ell)(k)}}{\bar{x}_i - \bar{x}_{i+2}}; \quad \forall i \in [0, 1, 2, \dots, n-2].$$

Изменяя индекс “н” на “р” можно записать аналогичные выражения для $R_{p,j}^{(\ell)(k)}$ и $B_{p,j}^{(\ell)(k)}$.

Для решения задачи об интегральном аппроксимировании промежуточного приближения с помощью ортогональных полиномов необходи-

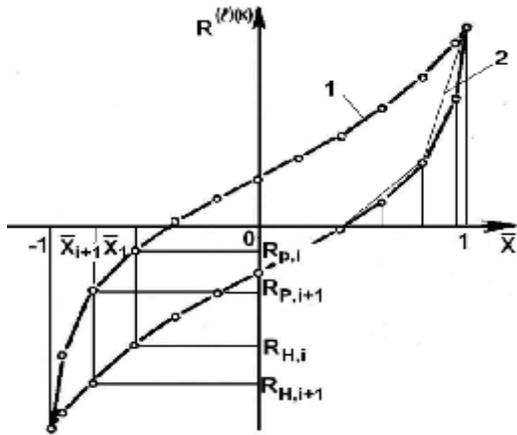


Рис. 1. Построение промежуточного приближения контура петли гистерезиса (вариант 1)

мо представить приближаемую функцию на единичных отрезках $[1, -1]$ значений всех переменных. Это легко осуществляется с помощью соответствующих замен переменных A и q на \bar{A}, \bar{q} :

$$\bar{A}_{(k)} = \frac{2A_{(k)} - A_0 - A_g}{A_g - A_0}; \quad \bar{q}_\ell = \frac{2q_\ell - q_0 - q_v}{q_v - q_0}. \quad (3)$$

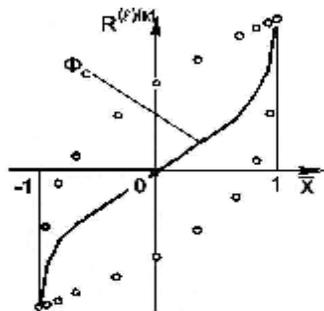
Точность аппроксимаций определяется выбором вида ортогональных многочленов.

Широкое распространение в задачах приближения получили ортогональные многочлены Якоби, частным случаем которых являются полиномы Чебышева и Лежандра [2]. Главное их отличие заключается в выборе вида весовых функций, что приводит в приближениях как бы к различному закону распределения погрешностей по длине отрезков $[-1, 1]$. При выборе весовой функции необходимо учитывать характер поведения приближаемой функции на отрезках $[-1, 1]$. Нелинейность процессов деформирования виброизоляторов с сухим трением, в том числе и из материала МР в наибольшей степени проявляется на концах отрезков, где и требуется повышенная точность аппроксимаций. Таким свойствам обладают полиномы Чебышева. Заметим, что эти полиномы широко применяются для решения многих задач, связанных с вопросами виброизоляции [4, 7, 8]. Указанные обстоятельства позволяют выбрать полиномы Чебышева в качестве аппроксимирующих.

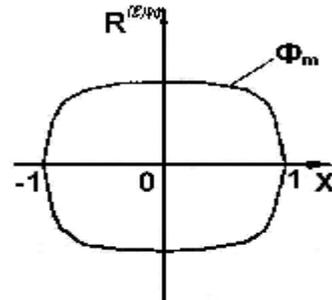
Рассмотрим вопрос об аппроксимации K -ой петли гистерезиса семейства ℓ в классе непрерывных и разрывных функций.

В первом случае необходимо, чтобы на множествах значений \bar{x} было задано недостающее множество значений скоростей $\dot{\bar{x}}_i^{(k)(\ell)}$ [8]. Тогда задача интегрального аппроксимирования петли гистерезиса (3) полиномами Чебышева, обеспечивающими минимальную среднеквадратическую погрешность приближения

при весовых функциях $f_1(\bar{x}) = \left(\sqrt{1 - \bar{x}^2} \right)^{-1}$



а)



б)

Рис. 2. Построение промежуточного приближения петель гистерезиса (вариант 2): а – срединная линия; б – гистерезисная функция

и $f_2(\bar{x}) = \left(\sqrt{1 - \dot{\bar{x}}^2}\right)^{-1}$, может быть сформулирована в виде

$$\min \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\Phi^{(\ell)(\kappa)} - Q^{(\ell)(\kappa)}]^2 f_1(\bar{x}) f_2(\dot{\bar{x}}) d\bar{x} d\dot{\bar{x}} \right\}. \quad (4)$$

Здесь

$$\Phi^{(\ell)(\kappa)} \cong Q^{(\ell)(\kappa)} = \sum_{|\lambda|=0}^m P_{\lambda_1 \lambda_2}^{(\ell)(\kappa)} \cdot \bar{x}^{\lambda_1} \dot{\bar{x}}^{\lambda_2} \quad (5)$$

разложение функции $\Phi^{(\ell)(\kappa)}$ по полиномам Чебышева $Q^{(\ell)(\kappa)}$ двух переменных \bar{x} и $\dot{\bar{x}}$, причем $P_{\lambda_1 \lambda_2}$ - коэффициенты Чебышевской аппроксимации и

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\dot{\bar{x}}^{(\ell)(\kappa)}}{v^{(\ell)(\kappa)}};$$

$v^{(\ell)(\kappa)}$ - амплитуда скорости при циклическом деформировании. Установим ограничения, накладываемые на вид множества $\dot{\bar{x}}^{(\ell)(\kappa)}$.

При решении задачи об аппроксимации в форме (4) коэффициенты $P_{\lambda_1 \lambda_2}^{(\ell)(\kappa)}$ вычисляются с помощью коэффициентов $a_{\lambda_1 \lambda_2}^{(\ell)(\kappa)}$ разложения Фурье для двойного ряда.

$$a_{\lambda_1 \lambda_2}^{(\ell)(\kappa)} = \frac{4}{\pi^2} \iint_{00}^{\pi \pi} [\Phi^{(\ell)(\kappa)}(\cos \varphi_1, \cos \varphi_2) \cos \lambda_1 \varphi_1 \cos \lambda_2 \varphi_2] d\varphi_1 d\varphi_2, \quad (6)$$

где $\varphi_1 = \arccos \bar{x}$, а $\varphi_2 = \arccos \dot{\bar{x}}$.

Для упрощения дальнейших записей индексы (ℓ) и (κ) будем опускать.

С помощью подстановки $\bar{x} = \cos \varphi_1$ можно представить разложение петли гистерезиса в виде ряда Фурье из четных и нечетных слагаемых

$$\Phi = \sum_{|\lambda|=0}^m (a_{\lambda_1} \cos \lambda_1 \varphi_1 + a_{\lambda_2} \sin \lambda_1 \varphi_1).$$

Здесь и далее индексы (ℓ) и (κ) для упрощения записей исключаются, но при этом подразумевается зависимость функций и их коэффициентов от номеров семейств (ℓ) и петель гистерезиса (κ) .

Введением новой переменной $\bar{y} = \cos \varphi_2$ (где $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$), форму петли гистерезиса

можно описать только в классе четных функций, но уже двух переменных \bar{x} и \bar{y} [4]. Следовательно, при разложении функции Φ по переменным \bar{x} и $\dot{\bar{x}}$ можно применять полиномы Чебышева первого рода, а коэффициенты разложения определяются с помощью (6), но при условии

$$\dot{\bar{x}} \equiv \bar{y} = \sigma \sqrt{1 - x^2}, \quad (7)$$

где σ - ступенчатая функция.

При таком ограничении форма петли гистерезиса не зависит от скорости. При невыполнении условия (7) форма петли зависит от скорости \dot{x}_i .

С учетом соотношений (1), (7) проинтегрируем (6) и запишем

$$a_{\lambda_1 0} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^n \int_{\varphi_{1,i}}^{\varphi_{1,i+1}} (R_{c,h} + R_{c,p}) \cos \lambda_1 \varphi_1 d\varphi_1; \quad (8)$$

$$a_{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{4}{\lambda_2 \pi^2} \sin \frac{\lambda_2 \pi}{2} \sum_{i=0}^n \int_{\varphi_{1,i}}^{\varphi_{1,i+1}} (R_{c,h} - R_{c,p}) \cos \lambda_1 \varphi_1 d\varphi_1, \quad (9)$$

где $l_1 = 0, 1, 2, \dots, m$; $l_2 = m, m-1, \dots, 0$; $j_{1,i}$ - О $[0, p]$; $R_{c,h}, R_{c,p}$ - соответствующие значения R_c для c -го отрезка ломанных.

В качестве примера приведем зависимости коэффициентов $P_{\lambda_1 \lambda_2}$ от $a_{\lambda_1 \lambda_2}$ при $m=5$ [8]:

$$\begin{aligned} P_{00} &= \frac{1}{4} a_{00} - \frac{1}{2} a_{20} + \frac{1}{2} a_{40} - \frac{1}{4} a_{02} + a_{22} + \frac{1}{2} a_{04}; \\ P_{10} &= \frac{1}{2} a_{10} - \frac{3}{2} a_{30} + \frac{5}{2} a_{50} - a_{12} + 3a_{32} + a_{14}; \\ P_{20} &= a_{20} - 4a_{40} - 2a_{22}; \quad P_{30} = 2a_{30} - 10a_{50} - 4a_{32}; \quad (10) \\ P_{40} &= 4a_{40}; \quad P_{50} = 8a_{50}; \quad P_{11} = a_{11} - 3a_{31} - 3a_{13}; \\ P_{21} &= 2a_{21} - 8a_{41} - 6a_{23}; \quad P_{31} = 4a_{31}; \quad P_{41} = 8a_{41}; \end{aligned}$$

$$P_{22} = 4a_{22}; \quad P_{32} = 8a_{32}$$

Рассмотрим аппроксимацию петли гистерезиса с помощью полиномов Чебышева, представленных в классе разрывных функций. В этом случае форма петли гистерезиса описывается с помощью двух функций:

$$R = \Phi_c(\bar{x}, A, q) + \sigma \Phi_m(\bar{x}, A, q),$$

причем первая из них описывает срединную линию петли гистерезиса (условную упругую составляющую), а вторая - неупругую составляющую (гистерезисную функцию) (см. рис. 2).

Эти функции можно представить в виде

$$\Phi_c = \frac{\Phi_h + \Phi_p}{2}; \quad \Phi_m = \frac{\Phi_h - \Phi_p}{2}.$$

Задачу интегрального аппроксимирования формы петли гистерезиса сформулируем в виде

$$\begin{aligned} \min & \left[\int_{-1}^1 (\Phi_c - Q_c)^2 f_1(\bar{x}) d\bar{x} \right]; \\ \min & \left[\int_{-1}^1 (\Phi_m - Q_m)^2 f_1(\bar{x}) d\bar{x} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

обеспечивающим наилучшее приближение раз-

дельно для функций Φ_c и Φ_m :

$$\Phi_c \cong Q_c = \sum_{\lambda_1=0}^m P_{c\lambda_1} \bar{x}^{\lambda_1}; \quad \Phi_m \cong Q_m = \sum_{\lambda_1=0}^m P_{m\lambda_1} \bar{x}^{\lambda_1},$$

причем

$$R \cong Q_c + sQ_m. \quad (12)$$

Коэффициенты $P_{c\lambda_1}$ и $P_{m\lambda_1}$ линейно зависят от коэффициентов $a_{c\lambda_1}$ и $a_{m\lambda_1}$, которые вычисляются с помощью соотношений

$$a_{c\lambda_1} = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^n \int_{\varphi_{1,i}}^{\varphi_{1,i+1}} (R_{c,n} + R_{c,p}) \cos \lambda_1 \varphi_1 d\varphi_1; \quad (13)$$

$$a_{m\lambda_1} = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^n \int_{\varphi_{1,i}}^{\varphi_{1,i+1}} (R_{c,n} - R_{c,p}) \cos \lambda_1 \varphi_1 d\varphi_1. \quad (14)$$

В частности, для $m=5$:

$$P_0 = \frac{a_0}{2} - a_2 + a_4; \quad P_1 = a_1 - 3a_3 + 5a_5;$$

$$P_2 = 2a_2 - 8a_4; \quad P_3 = 4a_3 - 20a_5;$$

$$P_4 = 8a_4; \quad P_5 = 160a_5. \quad (15)$$

Таким образом, рассмотрены два варианта аппроксимации петли гистерезиса. Полученные соотношения (8), (9) для варианта (4) и (13), (14) для варианта (11) позволяют определять значения коэффициентов полиномов (10) и (15) для разложений (5) и (12), соответственно.

На рис. 3 в качестве примера представлены результаты аппроксимации петель гистерезиса для различных амплитуд прогибов виброизоляторов из МР типа ДК.

Сравнение экспериментальных данных с расчетными, полученными с помощью аппроксимирующих

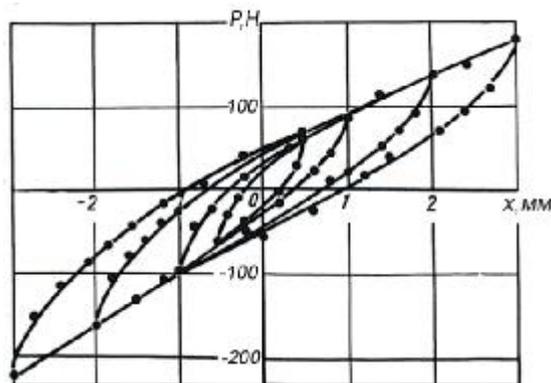


Рис. 3. Поле петель гистерезиса виброизоляторов типа ДК:
• – экспериментальные данные;
— – результаты аппроксимации

многочленов третьей степени ($m=3$), показало достаточно точное их совпадение при гармоническом законе изменения прогибов виброизолятора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Альберг, Э. Нильсон, Дж. Уолт. М.: Мир, 1972. 317 с.
2. Березин И.С., Жидков М.П. Методы вычислений: в 2-т. М.: Физматгиз, 1959. 620 с.
3. Гутер Р.С. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М.: Наука, 1970. 432 с.
4. Лазуткин Г.В. Виброизоляторы на основе материала МР (тип ДКУ). Куйбышев: Куйбышевский авиационный ин-т, 1985. 150 с. Деп. в ВИНТИ 16.08.85, № 6112-85.
5. Щеголев Б.М. Математическая обработка наблюдений. М.: Наука, 1969. 344 с.
6. Кассандров О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. М.: Наука, 1970. 104 с.
7. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961. 778 с.
8. Мельников Г.И. Динамика нелинейных механических и электромеханических систем. Л.: Машиностроение, 1975. 200 с.

METHOD OF APPROXIMATION OF LOOPS OF A HYSTERESIS OF MULTICONTACT DAMPERS WITH A DRY FRICTION

© 2011 G.V. Lazutkin, V.A. Antipov, M.A. Petuhova, G.V. Izranova, T.J. Zinoveva

Samara State University of Means of Communication

The method of approximation of loops of a hysteresis of multicontact systems of dampers with a dry friction is based on experimental definition and approximation of in advance found set of initial families of loops of a hysteresis or initial lines, an establishing of values of factors of plane-parallel carrying over of their initial processes or points of initial lines and a finding of functional communications of factors of approximation of initial set of processes of deformation and initial set of lines with is constructive-technological parameters of dampers.

Key words: loops of hysteresis, spline-approximation, polynomials of Chebyshev, decomposition of Fourier, double bluebell, results of approximation, experimental information.

Gennady Lazutkin, Candidate of Technics, Doctorant.
Vladimir Antipov, Doctor of Technics, Professor.
E-mail: om46@mail.ru.
Mariya Petuhova, programmer.
Galina Izranova, Senior Lecturer.
Tatyana Zinoveva, Candidate of Technics, Associate Professor.