УДК 658.523.05

АНАЛИЗ И РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ И МОДЕЛЕЙ ДЛЯ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ИСПЫТАНИЙ ИЗДЕЛИЙ

© 2011 В.И.Кочергин, М.В.Савин, П.М.Попов

Институт авиационных технологий и управления
Ульяновского государственного технического университета

Поступила в редакцию 12.05.2011

В статье авторы проводят анализ математических методов исследований, к которым относят метод конечных элементов (МКЭ), вариационный метод и метод моделей аппаратов, используемых в оценке состояния технологии испытаний сложных изделий авиационной техники. Авторы также рассматривают процедуры выбора метода построения математической модели технологических процессов испытаний путем сопоставления перечисленных трех методов, то есть их вариации.

Ключевые слова: математические методы, технологии, испытания, вариация.

Моделирование как метод исследования технологических процессов, в том числе и испытаний, которые являются объектами управления, включают в себя два основных этапа: построение модели и использование ее для исследования свойств и поведения объекта. Одному и тому же объекту-оригиналу в зависимости от целей моделирования может соответствовать большое число моделей, отражающих разные его стороны и потому имеющих, как правило, разную структуру. Математическая модель объекта управления включает математическое описание связей между основными переменными и ограничения, накладываемые на их изменение. Математические модели, используемые в САПР, должны быть *предельно простыми*, иметь стандартную форму и обеспечивать достаточную точность. Построение математической модели состоит из следующих основных этапов:

- выделение объекта моделирования (в пространстве, во времени и в координатах его проведения);
- выбор вида модели и способа ее разработки;
- разработка модели, включая ее идентификацию.

К построению математической модели объекта управления приступают при условии, что известна цель управления. При этом необходимо иметь в виду, что конечной задачей исследований, при создании САПР испытаний, является разработка алгоритма и лингвистической модели управления. Учитывая изложенное и, исходя из объема первого этапа внедрения в управление испытаниями СВТ, выделим объекты моделирования в *пространстве*. Для этого ограничимся агрегатами: насосной станцией и стендом ресурсных испытаний подъемников.

Далее эти два объекта выделим во *времени*. Период моделирования во времени должен совпадать с расчетным интервалом времени, на котором задан критерий управления. Для оборудования *непрерывного* действия – это, как правило, межремонтный срок (межрегламентный период); для оборудования *периодического* действия – длительность рабочего цикла.

Работу гидравлической насосной станции можем отнести к оборудованию непрерывного действия, поэтому математическая модель контроля работы станции должна охватывать период между двумя очередными обслуживаниями станции.

Математическая модель стенда ресурсных испытаний подъемников по времени должна охватывать период времени выполнения одного блока испытаний, то есть время выполнения 9375 циклов функционирования и повторно - статических нагружений.

Выделение объекта моделирования в *пространстве координат его проведения* тесно связано с выбранной целью управления, так как из всей совокупности входных воздействий, влияющих на ход процесса, и входных переменных, характеризующих протекание процесса, необходимо выбрать те величины, которые будут изменяться при решении задачи исследования или управления [2]. К этим величинам относятся *управляющие* воздействия $u_1, u_2, ...u_n$, которые являются целенаправленно изменяемыми в процессе управления входными воздействиями, и *управляемые* переменные

Кочергин Виктор Иванович, доцент кафедры «Общенаучные дисциплины».
Савин Максим Валерьевич, старший преподаватель кафедры «Самолетостроение».
Попов Петр Михайлович, доктор технических наук, профессор кафедры «Самолетостроение».
E-mail: pmpopov2008@rambler.ru.

$x_1, x_2, \dots x_m$, относящиеся к тем выходным переменным, информация об изменении которых используется для формирования управляющих воздействий. Остальные входные воздействия $z_1, z_2, \dots z_l$ следует отнести к *возмущающим*, а выходные переменные к *неуправляемым*. Возмущающие воздействия следует классифицировать как *внешние*, связанные с подачей энергии, и *внутренние*, связанные с состоянием оборудования. При составлении математической модели рекомендуется использовать преимущественно векторную форму записи:

$$x = \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$$

$$y = \{y_1, y_2, \cdots y_n\}$$

$$z = \{z_1, z_2, \cdots z_n\}.$$

Для исследования процессов управления существует большое количество *методов* создания математических моделей описывающих работу тех или иных технических систем. В исследованиях процессов управления испытаниями оценим возможность использования *трех* из них.

Метод конечных элементов (МКЭ) – численный метод получения приближенных решений для широкого круга инженерных задач [95]. В настоящее время он распространился на решение задач механики сплошных сред. Приложение МКЭ может быть разделено на три категории в зависимости от природы решаемой задачи.

К *первой* категории относятся задачи, известные как задачи равновесия, независящие от времени. При решении этих задач необходимо найти распределение температур, давлений и скорости в механике потоков.

Ко *второй* категории относятся задачи собственных значений механики твердого тела и потоков. Это задачи, не зависящие от времени, при решении которых определяются значения собственных частот и форм колебаний твердых тел и потоков. Примерами этих задач могут являться такие как определение условий устойчивости конструкций и ламинарных потоков, а так же колебаний жидкости в упругих базах.

К *третьей* категории относятся задачи зависимые от времени. Обычно эти задачи формулируются из задач первых двух категорий, когда они начинают зависеть от времени.

МКЭ применим почти в каждой отрасли техники, но это не означает, что этот метод является наилучшим именно для этой модели. В континуальных задачах поле переменных (давление, температура, перемещение, напряжение и другие параметры) принимает бесконечное множество значений, поскольку это есть *функция* отдельной точки системы (тела). Следовательно, такие задачи имеют бесконечное множество неизвестных. Для сведения к конечному числу неизвестных рассматриваемую область (систему) разбивают на элементы и выражают неизвестное поле внутри каждого элемента через аппроксимирующие функции. Аппроксимирующие функции определяют через значения поля переменных в отдельных точках, которые называют узлами элементов. Узлы обычно выбирают на границах элементов. Кроме наружных узлов могут быть и внутренние узлы, которые лежат внутри элемента. Узловые точки и аппроксимирующие функции полностью определяют поле переменных внутри элемента. Результаты решения и степень погрешности зависят от числа и размеров используемых элементов, а так же от выбранных аппроксимирующих функций. Эти функции нельзя выбирать произвольно, так как они должны удовлетворять условиям совместимости.

Точность, с которой множество отдельных частей описывают целое, обычно зависит от числа, размеров и типа элементов.

Началом составления математической модели по МКЭ является дискретизация какой-либо системы, то есть замены реальной системы идеализированной системой, состоящей из отдельных элементов, которые соединяются друг с другом в отдельных точках, называемых узлами. В примере гидравлической насосной станции можно гидравлическую систему разделить на составные части: гидробак, фильтр, гидравлический насос, радиатор охлаждения, магистрали между вентилями и гидравлическими редукторами.

Рассмотрим гидравлическую систему, представленную на рис. 1.

Гидравлическая система состоит из нескольких пересекающихся ветвей. Необходимо найти давление и расход исходящий как из насоса, так и в каждом элементе этой системы.

Разобьем систему трубопроводов на конечные элементы. Как видно из рис. 1 идеальная система состоит из 15 узлов и 20 элементов. Выделим отдельно элемент (рис. 2).

Рис. 1. Гидравлическая схема

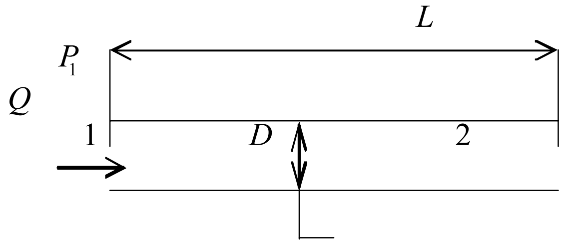

Рис. 2. Элемент гидравлической системы

Зависимость перепада давлений P и расхода Q описывается законами гидравлики. Если предположить что поток ламинарный, то перепад давлений между узлами 1 и 2 можно получить через выражение:

$$P_1 - P_2 = \frac{128Q\,L_\mu}{\pi D^4}, \qquad (1)$$

где L –длина трубы, Q – расход жидкости, D – диаметр трубы, μ – динамическая вязкость жидкости.

Выражая потоки для каждого узла можно записать:

$$Q_1 = \frac{\pi D^4}{182\,L_\mu}(P_1 - P_2), \qquad (2)$$

$$Q_2 = \frac{\pi D^4}{128\,L_\mu}(P_2 - P_1). \qquad (3)$$

В матричной форме:

$$\frac{\pi D^4}{182\,L_\mu}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

или

$$\lfloor \lambda_p \rfloor = \{P\} \cdot \{Q\}, \qquad (4)$$

где $\lfloor \lambda_p \rfloor$ – матрица текучести;

$\{P\}$ – вектор узловых давлений;

$\{Q\}$ – вектор узловых потоков.

Эти матричные уравнения представляют *математическую модель* элемента гидравлической системы. Потери давления на вентилях не учитываются. Обычно их учитывают введением в систему исполнительных труб с эквивалентной длиной. Рассмотренные уравнения справедливы только для ламинарного потока. Задачи с турбулентным потоком становятся нелинейными и для изучения этих процессов применяются другие законы гидравлики.

Математическая модель всей приведенной гидравлической системы будет представлять совокупность матричных уравнений являющихся моделями отдельных участков гидравлической системы.

Вариационный метод – основан на применении вариационного исчисления для создания математических моделей. Вариационное исчисление занимается задачей отыскания наибольших и наименьших значений функционалов, определенных на множестве линий и поверхностей. То есть экстремальными значениями, где исследование экстремумов проводят методом вариаций малого возмущения аргументов и функционалов. Задачи, относящиеся к вариационному исчислению, в этом смысле, являются конкурирующими *дискретным* задачам оптимизации. Весьма широкий круг задач описывает следующая схема. Требуется минимизировать функционал:

$$J(Y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx,$$

где $F(x, y, y')$ некоторая известная функция трех переменных в классе C (класс допустимых функций или функций сравнения).

Пусть E – класс функций сравнения функционала J. Функционал J имеет в этом классе относительный минимум (максимум), реализуемый функцией $\bar{y}(x) \in E$, если для любой функции $y(x) \in E$ выполняется неравенство $J(y(x)) \geq J(\bar{y}(x))$ $[J(y(x)) \leq J(\bar{y}(x))]$, то есть приращение функционала $\Delta J = J(y(x)) - J(\bar{y}(x))$ неотрицательно (неположительно). Если функция $y = y(x)$, принадлежащая к классу функций сравнения, удовлетворяет граничным условиям и реализует экстремум функционала, то она является решением уравнения (уравнения Эйлера):

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0. \qquad (5)$$

Данное уравнение определяет математическую модель процесса описываемого с помощью математической теории оптимального управления.

Метод моделей аппаратов. Аппараты – самые простые среди объектов управления технологическими процессами. Структура и вид модели аппарата зависят от характера исходной информации об объекте управления, цикличности его режимов работы и назначения модели [2]. Для определения характера цикличности работы во временном интервале функционирования разрабатываемой модели выделяют время $t_{непр}$ непрерывного протекания процесса и время $t_{пер}$ осуществления периодического процесса. Цикличность работы технологического оборудования характеризуется с помощью коэффициента периодичности:

$$\eta = \frac{t_{пер}}{t_{пер} + t_{непр}} \qquad (6)$$

по значению которого технологические аппараты на принятом временном интервале разделяют на аппараты непрерывного $(\eta = 0)$, полунепрерывного $(0 \leq \eta \leq 1)$, и периодического $(\eta = 1)$ действия.

Если целью управления аппаратом непрерывного действия (АНД) является *стабилизация* технологических режимов в соответствии с технологическим регламентом, то для разработки соответствующих систем управления используют наиболее полные модели управляемых объектов, в которых учитываются динамика, нелинейность, возмущающие воздействия. Если возникает задача *оптимизации* таких объектов, то при значительной размерности модели ее упрощают, используя статические, а в некоторых

случаях и линеаризованные модели при условии, что их точность будет не ниже требуемой.

Математическая модель аппаратов периодического действия (АПД) имеет логико–динамическую структуру. В общем виде она может быть представлена системой выражений:

$$\left\{\begin{matrix} \left[U_j \to \bigvee_{l=1}^{q} Q_l U_l\right] \\ j = 0,1,\ldots s \\ z_l \\ l = 1,2,\ldots q \end{matrix}\right\} \to x_l(t) \quad \text{где } l = 1,2,...q. \qquad (7)$$

В левой части выражения в квадратных скобках приведена логическая часть модели, которая описывает условия перехода от одной операции элементарной стадии цикла к другой и может быть построена с использованием языка циклических процессов (ЯЦП). В логической части модели указан включающий оператор U_j, после первого знака следования "$\to$" дизъюнкция членов, каждый из которых содержит включающий оператор U_l и логическое условие Q_l, определяющее и внешние воздействия при которых осуществляется переход. При записи логической части модели используются комбинационные функции (функции алгебры логики, функции суммирования и сравнения), и предикаты или последовательностные функции (функции памяти, задержки, перехода и т.п.).

Правая часть выражения является динамической частью модели, которая описывает реакцию инерционного объекта на команды, поступившие в начале операции, возмущающие воздействия z_l. Для разработки этой части модели могут быть использованы принципы разработки детерминированных моделей статики и динамики. При этом следует учитывать, что для АПД нестационарный режим является естественным технологическим режимом в отличие от АНД, для которых характерен квазистационарный режим, слагающийся из ряда аналогичных периодически повторяющихся незавершенных переходных процессов. В этих условиях уравнения динамики АПД, в отличие от уравнений динамики АНД, должны описывать значительные отклонения управляемых величин от их начальных и конечных значений. Поэтому здесь не приемлемы применяемые обычно с целью упрощения динамических моделей АНД допущения об их стационарности и линейности. Динамическую часть модели чаще всего представляют в виде дифференциальных уравнений с коэффициентами, являющимися функциями времени или переменных. В некоторых случаях возможна линеаризация таких моделей за счет составления математического описания для каждой операции, и даже микрооперации отдельной стадии. В то же время переход от одной части цикла к другой может вызвать не только изменения значений коэффициентов дифференциальных уравнений, но и изменение структуры математической модели.

Для удобства дальнейшего использования, особенно при разработке алгоритма управления, логико-динамическую модель АПД предлагается представить в виде таблицы [2], в которой кроме названия операций и стадий процесса, приводятся соответствующие им управляющие команды, логические условия, вызывающие появление этих команд, и реакции объекта управления на эти команды и возмущения. Вариант АПД приведен на рис. 3.

Выбор метода построения математической модели технологических процессов следует интерпретировать следующим образом:

I. Сопоставляя метод конечных элементов и условия задачи исследования заключаем следующее.

1.1. Для построения математической модели работы испытательного стенда или модели контроля параметров энергетического модуля нет необходимости описывать динамические процессы течения жидкости в гидравлических сис-

Наименование операции или стадии	Логические условия	Команды	Основные возмущающие воздействия	Реакция объекта
Включение гидромотора	$Q_{вкл}$	$U_{вкл}$	$Z_{вкл}$	$X_{вкл}(t)$
……………	…………….	……………	……………...	…………….
Включение гидроцилиндра	$Q_{ху}$	$U_{ху}$	$Z_{ху}$	$X_{ху}(t)$

Рис. 3. Логико-динамическая модель

темах испытательных стендов и гидравлических насосных станций.

1.2. Для составления модели достаточно формализованного описания изменения входных и выходных величин процессов работы стендов и станций.

1.3. Излишне представлять оборудование в виде сплошной среды с последующим делением на конечные элементы и описанием каждого из них уравнениями, составленными на основе законов гидравлики. Это ведет к чрезмерному усложнению математической модели и далее к трудностям при составлении алгоритмов и программ. Так же излишняя сложность модели влечет за собой увеличение количества элементов в системе управления при аппаратном решении поставленной задачи управления процессами испытаний. Из приведенного следует, что МКЭ для решения задачи управления процессами испытаний излишне сложен, вследствие чего может оказаться малоэффективным.

II. Задачи моделирования, решаемые *вариационным методом,* ищут способ оптимизации процессов. Задача же управления процессом испытаний определяется жесткой Программой испытаний, сформулированной в технических условиях на изготовление испытуемого изделия (ОИ). Из этого следует, что испытательному оборудованию задается жесткий режим работы, и поэтому нет необходимости поиска оптимальных вариантов процесса испытаний.

III. Задаче моделирования процессов управления испытаниями, по сравнению с рассмотренными методами, более соответствует метод *моделей аппаратов*. При этом математическая модель аппаратов непрерывного действия лучшим образом подходит для создания модели процессов контроля параметров работы энергетических модулей, а математическая модель аппаратов периодического действия достаточно полно описывает процесс управления работой испытательного стенда для испытания подъемников. Данный метод математического моделирования достаточно прост для аппаратного решения задачи управления оборудованием.

Исходя из изложенного, для дальнейшего исследования и формализации процессов в работе используется метод *моделей аппаратов*.

На основании вышеизложенного следует отметить, что метод *моделей аппаратов* с *математической точки зрения* вполне приемлем для исследований производственно-технологических процессов ресурсных испытаний и работы технологического оборудования этих испытаний, поскольку для проектирования моделей достаточно формализованного описания измерений *входных* и *выходных* величин соответствующих процессов работы испытательных стендов, приборных комплексов и станций (гидравлических, пневматических и др.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *В.И. Кочергин.* Средства автоматизированного проектирования процессов управления ресурсными испытаниями механических приводов летательных аппаратов. Дисс... канд техн.наук. 2008.
2. *В.И. Кочергин, П.М. Попов.* Оптимизация процессов управления контрольными испытаниями изделий собственного изготовления // Известия Самарского научного центра РАН. Выпуск “Технологии, процессы и системы в ходе их эволюционного развития”, 2006. Т. 1. С. 54-58.

THE ANALYSIS AND DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL METHODS AND MODELS FOR PERFECTION OF TECHNOLOGICAL PROCESSES OF TESTS OF PRODUCTS

© 2011 V.I. Kochergin, M.V. Savin, P.M. Popov

Institute of Aviation Technologies and Managements,
Ulyanovsk State Technical University

In clause authors spend the analysis of mathematical methods of researches to which carry a method of final elements, a variation method and a method of models of the devices used in an estimation of a condition of technology of tests of complex products of aviation techniques. Authors also consider procedures of a choice of a method of construction of mathematical model of technological processes of tests by comparison of the listed three methods that is their variations.
Key words: mathematical methods, technology, tests, variations.

Victor Kochergin, Associate Professor at the General Scientific Disciplines Department.
Maxim Savin, Senior Lecturer at the Aircraft Construction Department.
Petr Popov, Doctor of Technics, Professor at the Aircraft Construction Department. E-mail: pmpopov2008@rambler.ru.