

УДК 532

## ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК НЕСЖИМАЕМОГО ДВУМЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ МЕТОДОМ СЕБИСИ

© 2011 А. Н. Харитонова<sup>1</sup>, В. Г. Шахов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ФГУП ГНПРКЦ “ЦСКБ-ПРОГРЕСС”, г. Самара

<sup>2</sup> Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 16.06.2011

В данной работе рассматривается возможность применения метода Себиси для исследования характеристик несжимаемого пограничного слоя. С помощью данного метода были решены задачи обтекания плоской пластины и круглого цилиндра, а также продольного обтекания профиля крыла НАСА 0012 для нулевого угла атаки.

Ключевые слова: несжимаемый пограничный слой, метод Себиси, коэффициент сопротивления трения, толщина вытеснения

В настоящее время, на практике, достаточно часто приходится сталкиваться с необходимостью решения нестационарных задач двумерного пограничного слоя. Обычно получить точное решение таких задач практически невозможно. Поэтому для решения подобного класса задач используются различные приближённые методы. В последнее время, в связи со значительным развитием компьютерной техники, предпочтение отдаётся конечно-разностным методам, алгоритмы которых наиболее пригодны для программирования и позволяют получить решение за относительно короткое время.

В данной работе рассматривается возможность применения метода Себиси для решения нестационарных задач несжимаемого двумерного пограничного слоя [1, 2].

Система уравнений для несжимаемого двумерного пограничного слоя, в общем случае, может быть записана следующим образом [2, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \\ + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

при этом граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} u = v = 0 \quad \text{при } y = 0, \\ u \rightarrow U_e \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

где  $u, v$  – продольная и поперечная компоненты скорости,  $x, y$  – декартовы координаты,  $U_e$  – скорость на внешней границе пограничного слоя,  $t$  – время,  $n$  – кинематический коэффициент вязкости.

При этом касательное напряжение  $-\overline{u'v'}$  может быть заменено в формуле (1) соотношением:

$$-\overline{u'v'} = \varepsilon_m \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_m$  – коэффициент турбулентной кинематической вязкости. Данное соотношение используется для того, чтобы в дальнейшем можно было применять модель турбулентности Себиси-Смита.

Для использования метода Себиси, который в свою очередь основывается на неявном методе Келлера (схема “прямоугольник”), вводятся следующие переменные:

$$\eta = \sqrt{\frac{U_0(x)}{\nu x}} y, \quad \psi = \sqrt{(\nu x U_0)} f(x, \eta, t), \quad (4)$$

где  $f(x, \eta, t)$  – безразмерная функция тока, а  $U_0(x)$  – некоторая функция, зависящая только от  $x$ . Тогда уравнение неразрывности в системе (1) тождественно удовлетворяется, если функция тока  $\psi$  определяется соотношением:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5)$$

Используя правило дифференцирования сложной функции и соотношения (4) и (5) уравнение движения в системе (1) можно представить в следующей форме (штрихом обозначено дифференцирование по  $h$ ):

Харитонова Анна Николаевна, начальник группы.

E-mail: anpqwer@mail.ru

Шахов Валентин Гаврилович, кандидат технических наук, профессор, заведующий кафедрой аэродинамики.

E-mail: shakhov@ssau.ru

$$(bf''')' + \frac{m+1}{2} ff'' - m(f')^2 + m_1 = x \left( f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{U_0} \frac{\partial f'}{\partial t} \right), \quad (6)$$

где

$$f' = \frac{u}{U_0}, \quad m = \frac{x}{U_0} \frac{dU_e}{dx}, \quad b = 1 + \frac{\varepsilon_m}{\nu},$$

$$m_1 = \frac{x}{U_0^2} \left( U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{\partial U_e}{\partial t} \right).$$

При этом граничные условия (2) примут вид:

$$f = f' = 0 \quad \text{при } \eta = 0,$$

$$f' = U_e/U_0 \quad \text{при } \eta \rightarrow \eta_\infty. \quad (7)$$

Решение уравнения (6) с граничными условиями (7) осуществляется конечно-разностным методом Себиси в следующие четыре этапа:

1. Уравнение (6) заменяется системой дифференциальных уравнений первого порядка (для этого вводятся новые переменные).
2. Дифференциальные уравнения заменяются конечно-разностными с использованием формул центральных разностей.
3. Полученная система нелинейных конечно-разностных уравнений линеаризуется с помощью метода Ньютона и записывается в векторно-матричном виде.
4. Система линейных уравнений решается методом матричной прогонки.

Более подробно метод Себиси рассмотрен в работах [1, 2]. На основе данного метода была разработана программа в среде программирования Delphi для решения нестационарных задач несжимаемого двумерного пограничного слоя. Программа позволяет получить решение уравнения (6) с граничными условиями (7) и, дополнительно, ряд характеристик пограничного слоя, в том числе местный коэффициент сопротивления трения ( $c_f$ ) и толщину вытеснения ( $d^*$ ).

В качестве тестовых задач, для проверки работоспособности метода Себиси и программы, были рассмотрены следующие стационарные задачи:

1. Исследование пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении.
2. Обтекание круглого цилиндра в поперечном направлении.

Полученные решения данных задач хорошо согласуются с приближёнными решениями, приведёнными в работах Г. Шлихтинга и Л.Г. Лойцянского [3, 4], что подтверждает правильность работы алгоритма и программы. Так, например, в случае обтекания круглого цилиндра отрыв наблюдается в точке равной примерно  $105^\circ$ , а в работе Шлихтинга [3] отрыв достигается в точке  $104,5^\circ$ .

Кроме того, для случая ламинарного нестационарного пограничного слоя, была рассмотрена задача обтекания движущегося круглого цилиндра радиуса  $R$ , причем скорость  $U_e$  на внешней границе пограничного слоя определялась формулой  $U_e(x, t) = 2tU_\infty \sin(x/R)$ . А для случая как ламинарного, так и турбулентного тече-

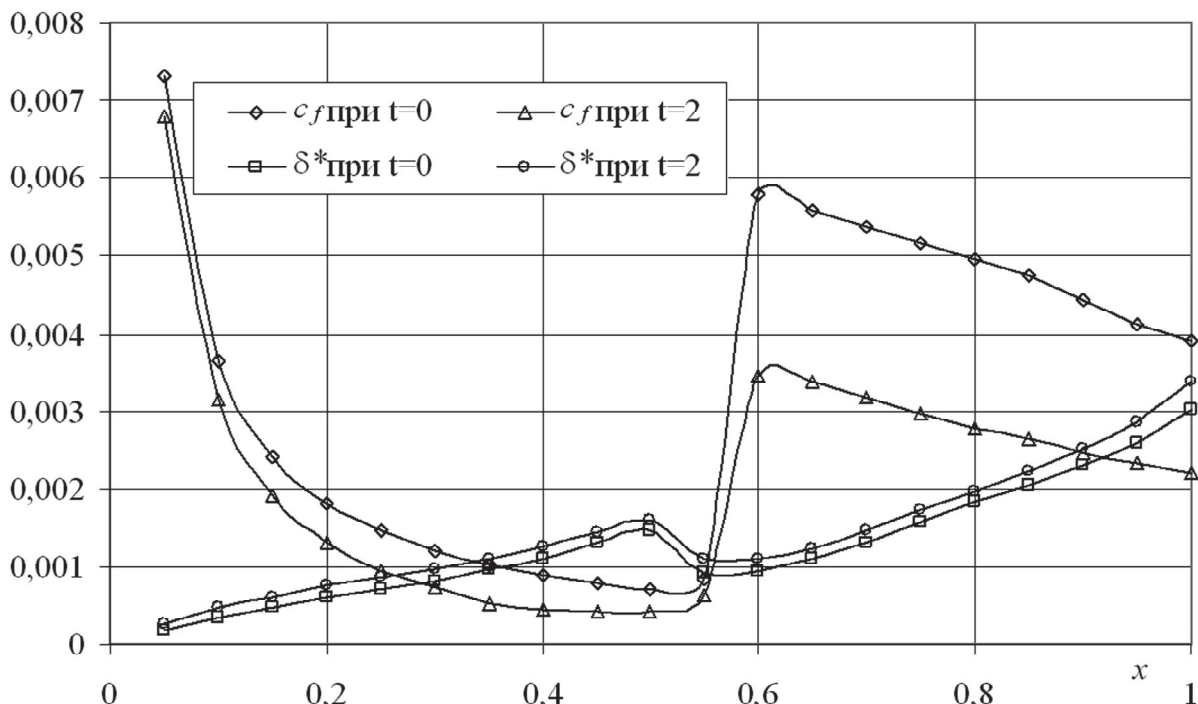


Рис. 1. Изменение местного коэффициента сопротивления трения и толщины вытеснения пограничного слоя в различные моменты времени для профиля крыла NACA 0012

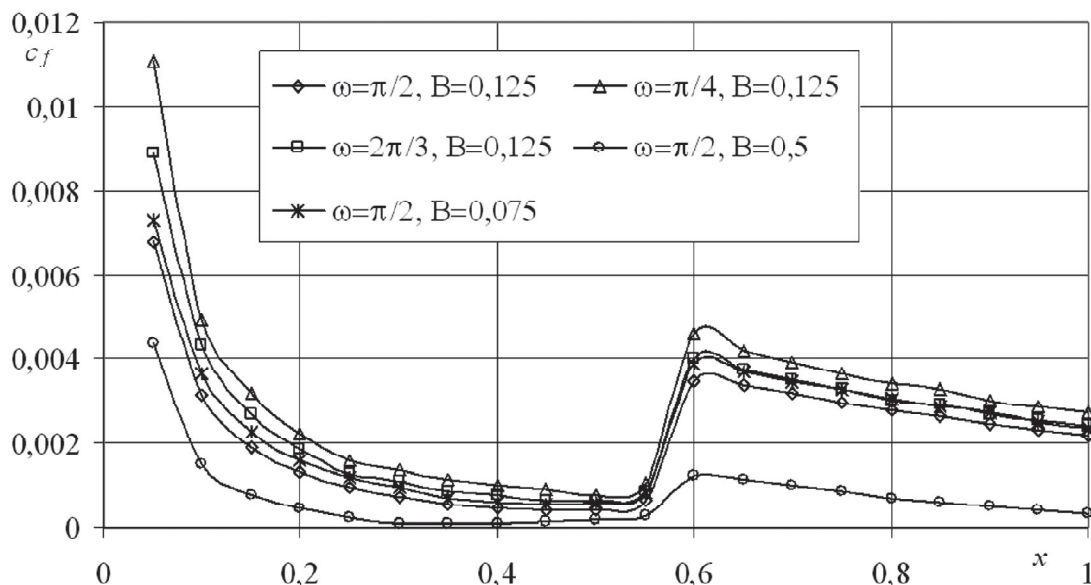


Рис. 2. Изменение местного коэффициента сопротивления трения для профиля крыла NACA 0012 при  $t=2$

ния была рассмотрена задача продольного обтекания профиля крыла NACA 0012 для нулевого угла атаки, где  $U_e(x, t) = U_{e0}(x)(1 + B \cos(\omega t))$ . В данной формуле, предложенной Себиси,  $B$  – амплитуда, а  $\omega$  – угловая частота (рад/с). Примеры, полученных результатов для профиля крыла NACA 0012, представлены на рис. 1 и 2.

При этом графики, представленные на рис. 1 соответствуют результатам, полученным Себиси и представленным в работе [1], что также подтверждает правильность работы алгоритма и программы. На рис. 2 приведены дополнительные расчеты изменения местного коэффициента сопротивления трения при различных значениях амплитуды и угловой частоты.

В заключение, следует отметить, что применение метода Себиси и разработанной на его основе программы, позволяет решать нестационарные задачи несжимаемого двумерного погранич-

ного слоя за относительно короткое время и даёт возможность получить приближённые решения, которые в дальнейшем можно использовать для решения различных технических задач.

*Данная работа проведена в рамках реализации ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Computational Fluid Dynamics for Engineers / T. Cebeci, J. P. Shao, F. Kafyeke, E. Laurendeau. California: Horizons Publishing Inc., 2005. 396 с.
2. Себиси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен. М.: Мир, 1987. 592 с.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
4. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 478 с.

### RESEARCH OF THE CHARACTERISTICS OF THE INCOMPRESSIBLE TWO-DIMENSIONAL BOUNDARY LAYER BY CEBECI'S METHOD

© 2011 A.N. Kharitonova<sup>1</sup>, V.G. Shakhov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> FSUE SRPSRC “TsSKB-Progress”, Samara

<sup>2</sup> Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University)

In the given work the opportunity of application Cebeci's method for research characteristics of the incompressible boundary layer is considered. Using this method problems of the flow the flat plate and the round cylinder, and, also, the longitudinal flow of the NACA 0012 airfoil at zero angle of attack, have been solved.

Key words: an incompressible boundary layer, Cebeci's method, local skin-friction coefficient, displacement thickness.

Anna Kharitonova, Head of Group. E-mail: annqwer@mail.ru  
Valentin Shakhov, Candidate of Technics, Professor, Head at the Aerohydrodynamic Department. E-mail: shakhov@ssau.ru