

УДК 517.94

СИНГУЛЯРНЫЕ МОДЕЛИ ПЕРЕДАТОЧНЫХ И ИМПУЛЬСНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

© 2011 Н.В. Дилигенский^{1,2}, А.П. Ефимов²

¹ Институт проблем управления сложными системами РАН, г. Самара

² Самарский государственный технический университет

Поступила в редакцию 14.09.2011

Статья посвящена построению аппроксимативных решений для базовых моделей - передаточных и импульсных переходных функций для объектов с распределенными параметрами.

Ключевые слова: объекты с распределенными параметрами; сингулярные модели; параболические уравнения; передаточные функции; импульсные переходные функции.

Для линейных объектов с сосредоточенными параметрами базовыми моделями являются передаточная функция $W(p)$, характеризующая линейную связь между трансформантами входа и выхода, и весовая (импульсная переходная) функция $g(\tau)$, являющаяся реакцией объекта на идеальное импульсное воздействие, связанные преобразованием Лапласа. Для типовых сосредоточенных объектов $W(p)$ и $g(\tau)$ имеют простую форму и обеспечивают получение конструктивных решений для временных траекторий переходных процессов.

Для распределенных объектов импульсными переходными функциями являются функции Грина краевых задач для соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных [1] и передаточными функциями их трансформанты Лапласа. Эти конструкции достаточно сложные, приводят к неудовлетворительно сходящимся рядам и малоприменимы на практике. Далее будем рассматривать распределенные объекты, описываемые параболическими уравнениями теплопроводности.

Импульсные переходные функции $G(\tau, x)$ для них находятся как обобщенные решения уравнения

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \omega(\tau, x), \quad (1)$$

где $\omega(\tau, x)$ сингулярные функции дельтаобразного типа, определяемые видом соответствующих краевых задач, τ и x соответственно, временная и пространственная координаты с областью определения $\tau \in [0, \infty)$, $x \in [0, 1]$.

Дилигенский Николай Владимирович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой "Управление и системный анализ в теплоэнергетике".

Ефимов Александр Порфирьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры "Управление и системный анализ в теплоэнергетике". E-mail: usat@samgtu.ru

Для одномерного протяженного объекта единичной длины с краевыми условиями первого рода, и симметрии $\omega_1(\tau, x) = \delta(\tau)\delta'(x-1)$ и точное решение для передаточной функции имеет вид [1]

$$W_1(p, x) = \frac{\exp(\sqrt{p}x) + \exp(-\sqrt{p}x)}{\exp(\sqrt{p}) + \exp(-\sqrt{p})} = \frac{ch(\sqrt{p}x)}{ch(\sqrt{p})}, \quad (2)$$

где p – оператор преобразования Лапласа.

Конструктивного представления для импульсной переходной функции, отвечающей обращению по Лапласу (2), в рамках стандартных, аналитических функций не существует, и для этих целей (2) представляется бесконечным рядом экспонент

$$W_1(p, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\exp(-(2k+1-x)\sqrt{p}) + \exp(-(2k+1+x)\sqrt{p})). \quad (3)$$

Все члены ряда (3) имеют одинаковую стандартную форму и единообразным способом элементарно трансформируются во временную область описания. Однако практическое использование (3), и соответствующего ему оригинала, встречает серьезные затруднения, связанные со сходимостью рядов.

Для больших значений p и, соответственно, для малых моментов времени τ члены ряда (3) быстро убывают, и для удовлетворительного описания достаточно использовать первые несколько членов (часто на практике два – три). Так, двухчленное представление, соответствующее (3), имеет вид

$$W_1(p, x) \approx \exp(-\sqrt{p}(1-x)) + \exp(-\sqrt{p}(1+x)). \quad (4)$$

Отвечающее ему временное представление для импульсной переходной функции имеет форму

$$G_1(\tau, x) \approx \frac{1-x}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{(1-x)^2}{4\tau}\right) + \frac{1+x}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{(1+x)^2}{4\tau}\right). \quad (5)$$

Представления (4), (5) эффективны для малых τ и больших p , однако при малых p и больших временах $\tau \gg 1$ использовать ряд (3), а также приближение (4) реально невозможно из-за неудовлетворительной сходимости (3). Для получения конструктивных решений в этом случае можно непосредственно разложить (2) в ряд Тейлора.

Первые два члена соответствующего разложения $W(p, x)$ при $p \rightarrow 0$ имеют вид

$$W_1(p, x) \approx 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)p + \dots \quad (6)$$

Представление (6) удовлетворительно описывает решение (1) при малых p (больших τ), однако оно имеет принципиально иную форму чем ряд экспонент (3), и обратными трансформантами Лапласа от (5) являются сингулярные обобщенные функции времени

$$W_1(\tau, x) = \delta(\tau) + \frac{1}{2}(x^2 - 1)\delta'(\tau) + \dots, \quad (7)$$

применять которые в рамках обычных классических функций затруднительно.

Полученные приближенные описания передаточной функции (4), (6) и импульсной временной функции (функции Грина) (5), (7) являются сингулярными асимптотическими представлениями на разных границах $\tau = 0$ и $\tau = \infty$ временного интервала, описывающими существенно различные черты поведения распределенных объектов: (4), (5) – динамику импульсных, резконестационарных режимов, определяемую, главным образом, структурой оператора в частных производных, и (6), (7) – стадию квазиравновесных слабо изменяющихся процессов, в значительной степени отвечающих воздействию внешней среды, т.е. наличию граничных условий. Построим приближенное решение, которое по структуре отвечало разложению (3) с характерной функцией $\exp(-\gamma\sqrt{p})$ и на границах временного интервала $\tau = 0$ и $\tau = \infty$ совпадало с асимптотическими представлениями (4) и (6).

Непосредственно согласовать между собой внутреннее и внешнее асимптотические разложения для параболического оператора невозможно [2] и сконструируем мультипликатор Ω , обеспечивающий гладкое сопряжение представлений (4) и (6).

В соответствии со структурой решения (3) мультипликатор построим в виде

$$\Omega_k(\gamma\sqrt{p}) = \exp_k(\gamma\sqrt{p}) \cdot \exp(-\gamma\sqrt{p}), \quad (8)$$

где $\exp_k(z) = \sum_{n=0}^k \frac{z^n}{n!}$ n -членный ряд Тейлора для $\exp(z)$.

Параметры мультипликатора k и γ выбираются из условий согласований асимптотических представлений (4), (6) для различного чис-

ла членов рядов приближений и разных граничных условий.

На основе сопряжений первых двух членов разложений (4), (6) и (8) конструируется следующее простейшее приближенное представление для передаточной функции

$$W_1(p, x) \approx \exp(-\sqrt{p}(1-x)) + \exp(-\sqrt{p}(1+x)) - \frac{1+p(x^2-1)}{2} \exp(-2\sqrt{p}). \quad (9)$$

Приближение (9) имеет форму, отражающую структуру параболического оператора, и асимптотики (8) на границах $p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$ совпадают с (4), (6).

Приближенным описанием импульсной переходной функции, отвечающей оригиналу от (9) является квазиасимптотическое представление

$$G_1(\tau, x) \approx \frac{1-x}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{(1-x)^2}{4\tau}\right) + \frac{1+x}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{(1+x)^2}{4\tau}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{1}{\tau}\right) - \frac{(x^2-1)(2-3\tau)}{2\sqrt{\pi\tau^7}} \exp\left(-\frac{1}{4\tau}\right). \quad (10)$$

В отличие от (4), (5) приближенные представления (9), (10) работоспособны во всей области определения τ и x .

Переходная функция для распределенного объекта, отвечающая постоянному входному воздействию и являющаяся интегралом от (10), описывается выражением

$$E_1(\tau, x) = \operatorname{erfc}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{\tau}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{1+x}{2\sqrt{\tau}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right) - \frac{x^2-1}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{1}{\tau}\right), \quad (11)$$

аппроксимирующим функцию влияния во всей области определения краевой задачи $\tau \in [0, \infty)$, $x \in [0, 1]$.

Полученное приближение имеет относительную погрешность менее 7% и может быть уточнено путём учёта дополнительных членов в разложениях (3) и (6).

Изложенный подход работоспособен для распределенных объектов иной формы и другими граничными условиями.

Точная передаточная функция для пластины с граничными условиями второго рода с $\omega_2(\tau, x) = \delta(\tau) \delta(x-1)$ имеет вид

$$W_2(p, x) = \frac{ch(\sqrt{p} \cdot x)}{\sqrt{p} sh(\sqrt{p})}. \quad (12)$$

Квазиасимптотическим решением для (12) является

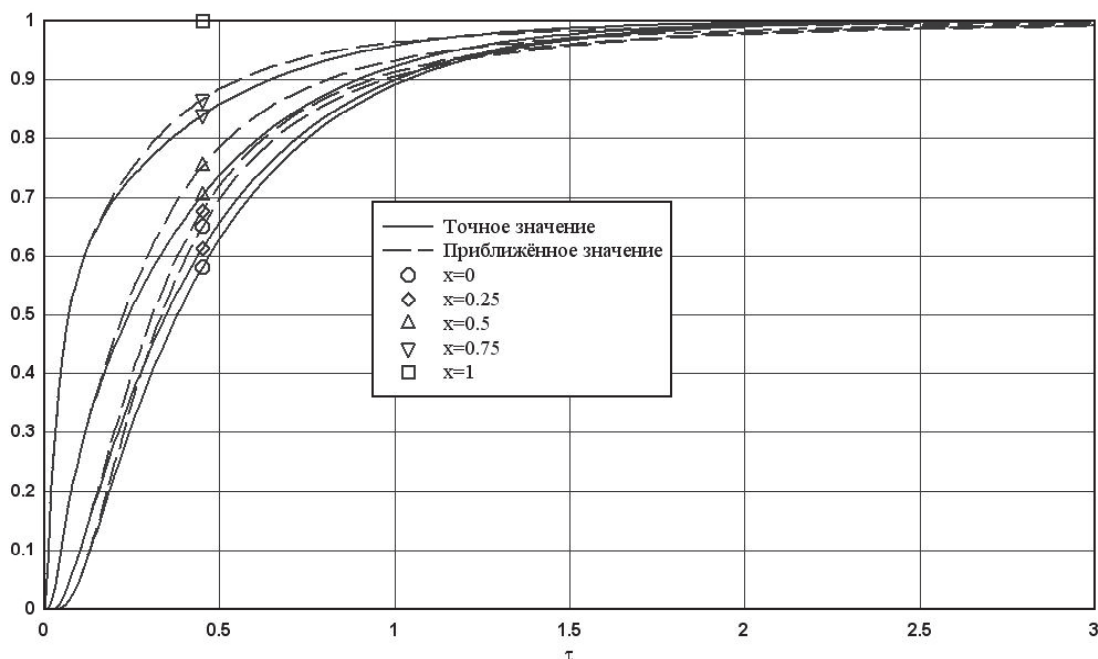


Рис. 1. Сравнение точного и приближённого (11) решений для некоторых значений координат

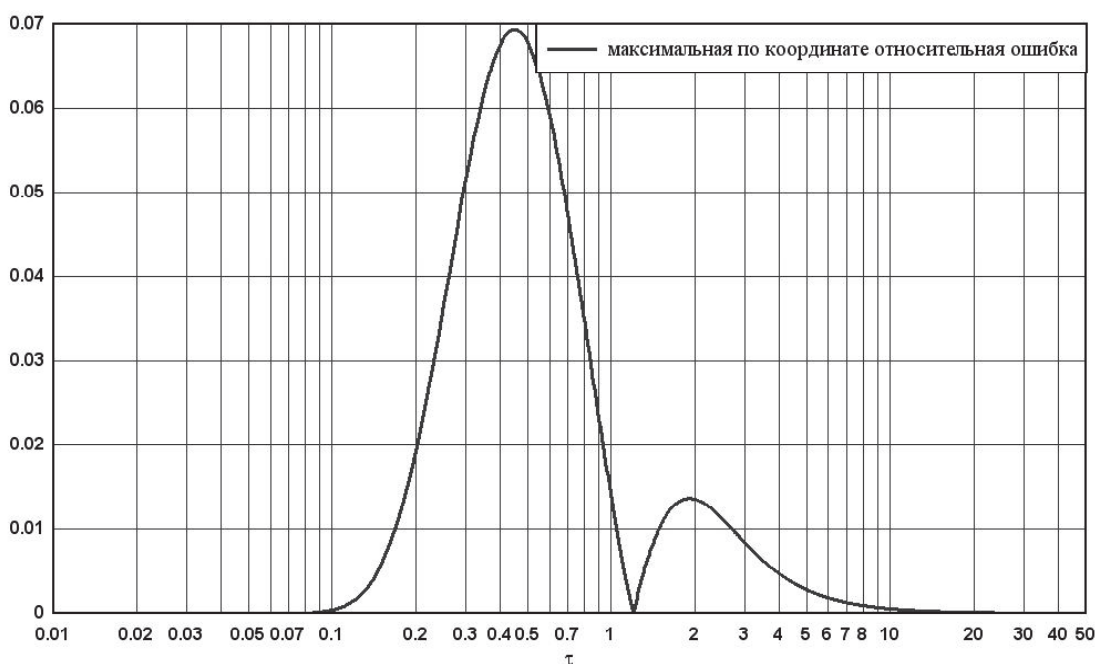


Рис. 2. Зависимость максимальной относительной ошибки приближённого решения (11) от времени

$$W_2(p, x) = \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\exp(-\sqrt{p}(1-x)) + \exp(-\sqrt{p}(1+x)) \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi\tau^3}} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6} \right) \exp \left(-\frac{1}{\tau} \right). \quad (14)$$

$$- \frac{1}{p} \left(1 + p \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6} \right) \right) \exp(-2\sqrt{p}). \quad (13)$$

Приближенная импульсная переходная функция, отвечающая (13) имеет вид

$$G_2(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \left(\exp \left(-\frac{(1-x)^2}{4\tau} \right) + \exp \left(-\frac{(1+x)^2}{4\tau} \right) \right) - E_2(\tau, x) = 2\sqrt{\tau} \left(\operatorname{ierfc} \left(-\frac{(1-x)}{2\sqrt{\tau}} \right) + \operatorname{ierfc} \left(-\frac{(1+x)}{2\sqrt{\tau}} \right) \right) + 4\tau i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} \right). \quad (15)$$

Приближенные конструкции (13), (14), (15) работоспособны во всей области определения

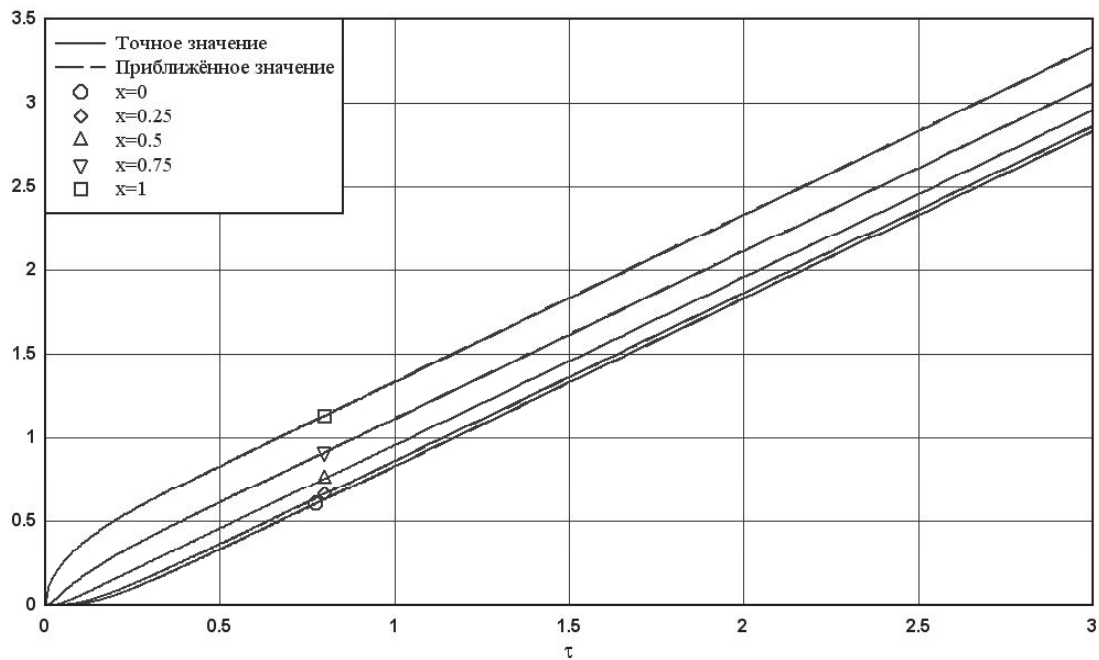


Рис. 3. Сравнение точного и приближённого (15) решений для некоторых значений координат

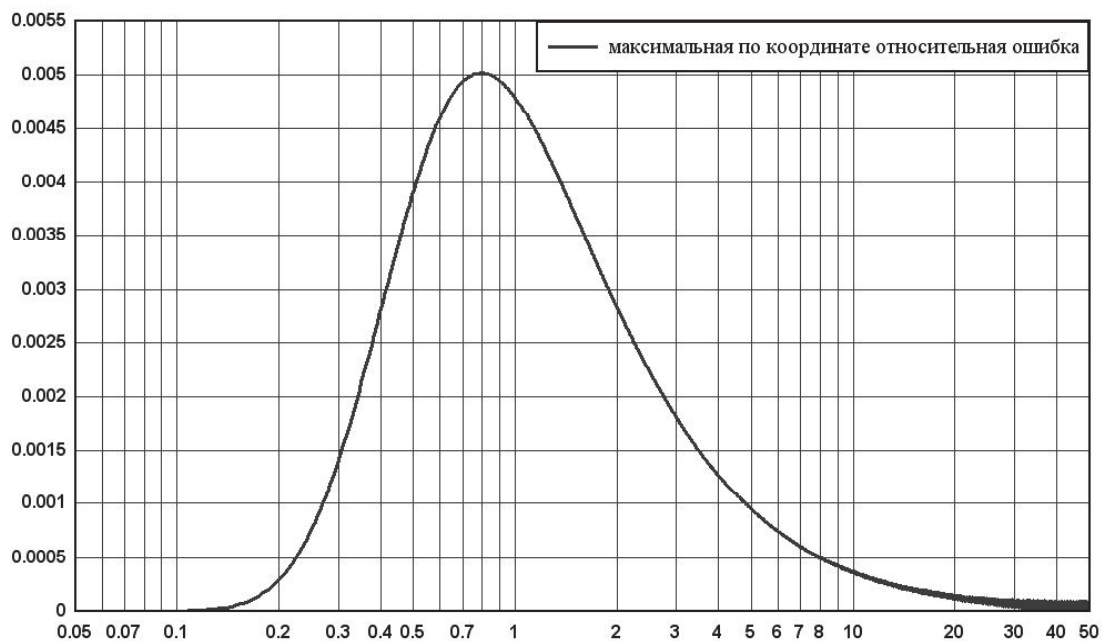


Рис. 4. Зависимость максимальной относительной ошибки приближённого решения (15) от времени

краевой задачи. Полученное квазиасимптотическое представление (15) имеет относительную погрешность около 0.5%.

Для пластины с граничными условиями третьего рода точное решение для передаточной функции имеет вид

$$W_3(p, x) = \alpha \cdot \frac{ch(\sqrt{px})}{\alpha \cdot ch(\sqrt{p}) + \sqrt{p} \cdot sh(\sqrt{p})}, \quad (16)$$

где α – безразмерный коэффициент теплоотдачи (число Био).

Построение квазиасимптотического приближенного представления для (16) является технически

более сложной задачей по отношению к предыдущим примерам, поскольку в решении (16) появляется новый параметр α , вызывающий при сопряжении внешних и внутренних сингулярных асимптотических разложений дополнительные трудности.

Проводя соответствующие вычислительные процедуры, квазиасимптотическое представление для передаточной функции получим в виде

$$W_3(p, x) = \alpha T_c \cdot \frac{2 \cdot ch(\sqrt{px})}{\alpha + \sqrt{p}} \cdot \exp(-\sqrt{p}) - \alpha T_c \left[\frac{-x^2}{(\alpha + 2)} + 2 \cdot \frac{\alpha^2 x^2 + 2}{(\alpha^2 + 2\alpha + 2)(\alpha + \sqrt{p})} - \frac{4\sqrt{p}}{2\alpha + p(\alpha + 2)} \cdot \frac{\alpha(1 - x^2) + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 2} \right]$$

$$-2 \cdot \frac{\alpha(\alpha^2 + 2\alpha - 2)x^2 - (\alpha^3 + 4\alpha^2 + 2\alpha - 4)}{(\alpha + 2)(2\alpha + p(\alpha + 2)(\alpha^2 + 2\alpha + 2))} \cdot \exp(-2\sqrt{p}). \quad (17)$$

Временное представление для переходной функции, отвечающее (17), имеет форму

$$\begin{aligned} E_3(\tau, x) = & \operatorname{erfc}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{\tau}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{1+x}{2\sqrt{\tau}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right) - \\ & - \exp\left(\frac{-(1-x)^2}{4\tau}\right) \operatorname{erfcx}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{\tau}} + \alpha\sqrt{\tau}\right) - \\ & - \exp\left(\frac{-(1+x)^2}{4\tau}\right) \operatorname{erfcx}\left(\frac{1+x}{2\sqrt{\tau}} + \alpha\sqrt{\tau}\right) + \\ & + 2 \cdot \frac{\alpha^2 x^2 + 2}{(\alpha^2 + 2\alpha + 2)} \exp\left(\frac{-1}{\tau}\right) \cdot \operatorname{erfcx}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} + \alpha\sqrt{\tau}\right) - \\ & - \frac{\alpha(\alpha^2 + 2\alpha - 2)x^2 - (\alpha^3 + 4\alpha^2 + 2\alpha - 4)}{(\alpha + 2)(\alpha^2 + 2\alpha + 2)} \exp\left(\frac{-1}{\tau}\right) \cdot \\ & \cdot \operatorname{Re} \operatorname{erfcx}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} + i\sqrt{\frac{2\alpha\tau}{\alpha + 2}}\right) - \\ & - \frac{\alpha(1-x^2) + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 2} \sqrt{\frac{2\alpha\tau}{\alpha + 2}} \exp\left(\frac{-1}{\tau}\right) \cdot \operatorname{Im} \operatorname{erfcx}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} + i\sqrt{\frac{2\alpha\tau}{\alpha + 2}}\right). \quad (18) \end{aligned}$$

Как показано в [3], относительная погрешность вычислений по формуле (18) составляет менее 3%.

Предложенный подход работоспособен и для канонических тел иной формы. Так для полого цилиндра с граничным условием первого рода на внешней поверхности и второго на внутренней передаточная функция имеет вид

$$W_3(p, x) = \frac{I_0(\sqrt{p}r)K_0(\sqrt{p}R) - I_0(\sqrt{p}R)K_0(\sqrt{p}r)}{I_0(\sqrt{p}R)K_0(\sqrt{p}R) - I_0(\sqrt{p}r)K_0(\sqrt{p}r)}, \quad (19)$$

где $I_0(z)$, $K_0(z)$ модифицированные функции Бесселя и Макдональда, r , R соответственно,

безразмерные радиальная координата и внутренний радиус.

Квазиасимптотическими решениями для объекта (19) являются

$$\begin{aligned} W_3(p, x) = & \sqrt{\frac{R}{r}} \exp(-\sqrt{p}(r-R)) + \\ & + \left(\frac{\ln r}{\ln R} - \sqrt{\frac{R}{r}}\right) \exp(-\sqrt{p}(1-R)), \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_3(\tau, x) \approx & \sqrt{\frac{R}{r}} \frac{(r-R)}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{(r-R)^2}{4\tau}\right) - \\ & - \left(\frac{\ln r}{\ln R} - \sqrt{\frac{R}{r}}\right) \frac{(1-R)}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{(1-R)^2}{4\tau}\right). \quad (21) \end{aligned}$$

Полученные приближенные представления имеют замкнутую аналитическую форму, достаточную точность, элементарно вычисляются и допускают содержательный параметрический анализ.

Работа выполнена в рамках Целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-13 гг." (государственный контракт №П1448).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979, 224 с.
2. Дилигенский Н.В., Ефимов А.П. Структурный анализ системных свойств квазиасимптотических моделей тепловых систем, пригодных во всей пространственно-временной области определения // Вестник СамГТУ. Выпуск 13. Самара, 2001. С.142-147.
3. Ефимов А.П. Метод построения равномерно пригодных аппроксимаций решений нестационарных задач теплопроводности в телах конечных размеров // Вестник СамГТУ, серия "Технические науки". 2008. Выпуск 2 (22). С.196-200.

SINGULAR MODELS THE TRANSFER RESPONSE AND IMPULSE FUNCTION FOR DISTRIBUTED OBJECTS

© 2011 N.V. Diligensky¹, A.P. Efimov²

¹Institute of Problems of Control by Complex Systems of Russian Academy of Science, Samara

²Samara State Technical University

The paper is devoted to the problem of construction of approximate analytical singular solutions for base models - transfer and impulse response functions for objects with the distributed parameters.

Keywords: objects with distributed parameters, singular models, parabolic equations, transfer function, impulse response functions.

Nikolay Diligensky, Doctor of Technics, Professor, Head at the Management and Systems Analysis in Power System Department. Alexander Efimov, Candidate of Technics, Associate Professor at the Management and Systems Analysis in Power System Department. E-mail: usat@samgtu.ru