УДК 621.746.628: 517.958

О ЗАДАЧЕ СТЕФАНА И РАСЧЕТАХ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВОК

© 2012 В.И. Васенин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Поступила в редакцию 09.11.2012

Проанализированы формулы И. Стефана и других авторов для расчета затвердевания отливок.

Ключевые слова: отливка, форма, затвердевание, тепловой баланс

Впервые задача затвердевания без учета теплоты перегрева была решена академиками РАН Г. Ляме и Б.П. Клапейроном в 1831 г. [1]. В 1860 г. Ф. Нойман производил расчет затвердевания с учетом теплоты перегрева на лекциях, которые он читал в Кенигсбергском университете [2, 3]. А общепризнанным является решение задачи венским математиком И. Стефаном [4, 5] в 1889 г., по имени которого она теперь и называется. С тех пор количество статей и книг по проблеме Стефана исчисляется сотнями. Отметим книги [6-8] и обзоры [9, 10], опубликованные в СССР. Однако проблема действительно есть, и она заключается в том, что И. Стефан решил задачу не совсем правильно. Попытаемся это доказать. Надо сразу оговориться, что в работах Г. Ляме и Б. П. Клапейрона, Ф. Ноймана, И. Стефана формулы выведены для процессов замерзания воды и промерзания влажного грунта, однако полученные зависимости оказались пригодными и для расчетов затвердевания отливок, металлических и неметаллических.

Рассмотрим затвердевание полуограниченного тела. Температуры отсчитываем от 20°С. Введем следующие обозначения температур (в °С): θ_1 — текущая температура жидкого металла; θ_2 — текущая температура твердого металла (затвердевшей корочки); $\theta_{\text{ж}}$ — начальная температура жидкого металла; $\theta_{\text{кp}}$ — температура кристаллизации металла; θ_n — температура на поверхности отливки. Считаем θ_n постоянной величиной, что соответствует граничным условиям 1-го рода (ГУ1). Дифференциальное уравнение теплопроводности Фурье для жидкого металла, т. е. для $\tau > 0$ и $\xi > x < \infty$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} \,. \tag{1}$$

Васенин Валерий Иванович, кандидат технических наук, доцент. E-mail: lip@pstu.ru

Для затвердевшей части отливки, т. е. для $\tau > 0$ и $0 < x < \xi$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} \,. \tag{2}$$

Здесь a_1 и a_2 – коэффициенты температуропроводности жидкого и твердого метала, м²/с.

Граничные условия:

- а) для x = 0 и $\tau \ge 0$ $\theta_1(0, \tau) = \theta_n$;
- б) для $x = \infty$ и $\tau \ge 0$ $\theta_1(\infty, \tau) = \theta_{\mathcal{H}}$;
- в) на фронте затвердевания для $x = \xi$ и $\tau > 0$ $\theta_1(\xi, \tau) = \theta_2(\xi, \tau) = \theta_{\kappa p}$.

Займемся потоками тепла на фронте затвердевания, где $x = \xi$. В объеме металла толщиной $d\xi$ есть три потока тепла (в Bt/M^2): q_1 – поток тепла от жидкого металла к фронту затвердевания; q_2 – поток тепла от фронта затвердевания к поверхности охлаждения; q_L – поток тепла, выделяющегося (или поглощающегося) при затвердевании (расплавлении) слоя толщиной $d\xi$. Знаки q_1, q_2 и q_L зависят от величины перегрева жидкого металла и интенсивности теплоотвода на поверхности охлаждения. Предположим, что идет затвердевание металла. Тепло передается от более нагретых участков тела к менее нагретым, поэтому потоки тепла q_1 и q_2 противоположны направлениям градиентов температур (и положительному направлению оси x) и запишутся так:

$$q_1 = -\lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x}, q_2 = -\lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x},$$
 (3), (4)

где λ_1 и λ_2 — коэффициенты теплопроводности жидкого и твердого металла, $Bт/м\cdot$ град. Раз мы условились, что идет затвердевание, то этот процесс происходит с выделением тепла и q_L имеет знак «+»:

$$q_L = +L\rho_2 \frac{d\xi}{d\tau} \,, \tag{5}$$

где L – удельная теплота кристаллизации, Дж/кг; ρ_2 – плотность твердого металла, кг/м³. Температуру объема металла толщиной $d\xi$ можно считать постоянной и равной температуре кристаллизации $\theta_{\kappa p}$. Поэтому сумма источников и стоков тепла равна 0:

$$q_1 + q_2 + q_L = 0. (6)$$

Подставив значения входящих в (6) величин и сделав преобразования, получим:

$$\lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = L \rho_2 \frac{d\xi}{d\tau} \,. \tag{7}$$

Общепринятой является запись в таком виде (так называемое условие Стефана):

$$\lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = L \rho_2 \frac{d\xi}{d\tau} \,. \tag{8}$$

Хотя непонятно, как получено это выражение. Если из потока тепла q_2 вычесть q_1 и приравнять q_L , то получится

$$-\lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = L\rho_2 \frac{d\xi}{d\tau} \tag{9}$$

а не соотношение (8). По-видимому, значения q_1 и q_2 были взяты со знаком «+», из q_1 вычли q_2 и приравняли q_L . Все дело в этом знаке «+» перед вторым членом выражения (7), а не «-», как у И. Стефана, Ф. Ноймана и других. Дальнейший ход решения известен. Наиболее подробно, без пропусков простых преобразований он изложен в книге [2]. Достаточно хорошо рассмотрена тема в книгах [11-13]. Правда, во всех этих четырех книгах используется зависимость (8), а не (7). Посмотрим, к чему приведет неверная запись тепловых потоков на фронте затвердевания. После ряда преобразований имеем такие соотношения для текущих температур жидкой и твердой фаз:

$$\theta_{1} = \theta_{\infty} - \left(\theta_{\infty} - \theta_{\kappa p}\right) \frac{1 - \operatorname{erf}\left(x/2\sqrt{a_{1}\tau}\right)}{1 - \operatorname{erf}\left(k/2\sqrt{a_{1}}\right)}, \tag{10}$$

$$\theta_{2} = \theta_{n} + \left(\theta_{\kappa p} - \theta_{n}\right) \frac{\operatorname{erf}\left(x/2\sqrt{a_{2}\tau}\right)}{\operatorname{erf}\left(k/2\sqrt{a_{2}}\right)} \tag{11}$$

где erf – функция ошибок Гаусса; k – коэффициент затвердевания, м/с1/2. Дифференцируя (10) и (11) по *x*, имеем:

(11)

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} = -\frac{\left(\theta_{\infty} - \theta_{\kappa p}\right) \exp\left(-k^2 / 4a_1\right)}{\left[1 - \operatorname{erf}\left(k / 2\sqrt{a_1}\right)\right] \sqrt{a_1 \pi \tau}},\tag{12}$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial x} = \frac{\left(\theta_{\kappa p} - \theta_n\right) \exp\left(-k^2 / 4a_2\right)}{\operatorname{erf}\left(k / 2\sqrt{a_2}\right) \sqrt{a_2 \pi \tau}}.$$
(13)

Толщина затвердевшей корочки изменяется во времени так:

$$\xi = k\sqrt{\tau} \tag{14}$$

а производная

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{k}{2\sqrt{\tau}} \tag{15}$$

Коэффициент аккумуляции тепла жидкого металла

$$b_1 = \sqrt{a_1} \tag{16}$$

твердого металла

$$b_2 = \lambda / \sqrt{a_2} \tag{17}$$

Подставляя (12), (13), (15) в (7) и учитывая (16) и (17), окончательно имеем:

$$\frac{b_2(\theta_{sp} - \theta_n)}{\exp(k^2 / 4a_2)\operatorname{erf}(k / 2\sqrt{a_2})} - \frac{b_1(\theta_{sp} - \theta_{sp})}{\exp(k^2 / 4a_1)[1 - \operatorname{erf}(k / 2\sqrt{a_1})]} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}L\rho_2 k$$
(18)

В статьях и книгах [2-13] итоговая зависимость отличается от (18) знаком «+» перед вторым членом этого выражения. Назовем формулу этих книг и статей как (18St). Знак «+» меняется на «→» в (7), а «→» на «+» в (8) из-за того, что правая часть выражения (12) имеет знак «-» и после подстановки в (7) или (8) происходит смена знака перед вторым членом уравнений (18) и (18St). Выясним, к чему приведет замена знака с

«—» на «+» в формуле (18St) по сравнению с (18). Для этого проведем расчеты затвердевания по выражениям (18) и (18St). На примере чугунной отливки – неограниченной плиты толщиной 2X = $30\cdot10^{-3}$ м. Значения коэффициентов возьмем из книги [14]: λ₁=18,6 Вт/м·град; λ₂=36,2 Вт/м·град; c_1 838 Дж/кг-град; c_2 =753 Дж/кг-град; ρ_1 =6950 кг/м³; ρ_2 =7200 кг/м³; L=215000 Дж/кг; θ_{xc} =1280°C; θ_{xp} =1180°C; a_1 =31,9·10⁻⁷ м²/c; a_2 =66,7·10⁻⁷ м²/с; b_1 =10400, b_2 =14000, b_{ϕ} =1380 Вт·с¹²/м²·град. Нужно задаться температурой поверхности металла. Для граничных условий 1-го рода рассчитаем ее по следующему соотношению [11]:

$$\theta_{n} = \theta_{\kappa p} \frac{b_{2} / b_{\phi}}{1 + b_{2} / b_{\phi}} \tag{19}$$

Получаем θ_n =1074°С, или T_n =1094°С. Хотя формы, конечно, нет. Просто поддерживается на поверхности отливки такая температура,

соответствующая затвердеванию отливки в песчаной форме, но при отсутствии формы. θ_n нельзя принимать равной $\theta_{\kappa\rho}$: будет мал отвод тепла от отливки. Результаты расчетов приведены в таблице. Величину коэффициента затвердевания изменяли от $0,500\cdot10^{-3}$ до $5,000\cdot10^{-3}$ м/с^{1/2}. Обозначения в табл. 1 такие: A, B и C – это первый, второй и третий члены выражений (18) и (18St), A+B – суммирование по (18St), A-B – вычитание по (18). A, B, A+B, A-B и C измеряются в $Bt^{-1/2}/M^2$ и должны быть умножены на $t^{-1/2}/M^2$ и должны быть умножены на $t^{-1/2}/M^2$

Таблица 1. Влияние коэффициента затвердевания на отвод тепла от отливки

$k \cdot 10^{3}$	\boldsymbol{A}	В	A+B	A-B	C
$M/c^{1/2}$					
0,500	12,754	1,211	13,965	11,543	0,662
0,800	7,893	1,317	9,210	6,576	1,059
1,000	6,250	1,390	7,640	4,860	1,324
1,301*	4,727	3,006	7,733	1,721	1,722
1,500	4,043	1,579	5,622	2,464	1,986
1,605	3,747	1,619	5,366	2,128	2,125
2,000	2,900	1,775	4,675	1,125	2,647
2,084**	2,759				2,759
2,500	2,190	1,939	4,129	0,251	3,310
2,950	1,742	2,167	3,909	-0,425	3,906
3,000	1,694	2,182	3,876	-0,488	3,972
4,000	1,059	2,619	3,678	-1,560	5,300
5,000	0,663	3,071	3,734	-2,408	6,620
5,260*	0,584	6,378	6,962	-5,793	6,964

Примечание: * - перегрев чугуна $\theta_{xc} - \theta_{\kappa p} = 200$ °C; ** - перегрев чугуна $\theta_{xc} - \theta_{\kappa p} = 0$ °C

Начнем с решения уравнений (18) и (18St). В книгах [2, 3, 11-13] утверждается, что выражение (18St) очень сложно и его нужно решать графически. На самом деле (18) и (18St) решаются элементарно, нужно задаться несколько раз (5-7 раз) значением k, вычислить значения A+B и A-B и добиться, чтобы отличие этой суммы или разности от C не превышало заданной величины.

Теперь об обещанном доказательстве ошибочности выражения (18St). При нулевом перегреве, то есть при равенстве 0 вторых членов уравнений (18) и (18St) коэффициент затвердевания равен 2,084·10 $^{-3}$ м/с $^{1/2}$ по обеим формулам (см. табл. 1). При перегреве 100 и 200°С этот коэффициент получается равным 1,605·10 $^{-3}$ и 1,301·10 $^{-3}$ по зависимости (18), 2,950·10 $^{-3}$ и 5,260·10 $^{-3}$ м/с $^{1/2}$ – по (18St). То есть с увеличением перегрева коэффициент затвердевания (и скорость затвердевания) по соотношению (18St) растем (?!), а не уменьшается, как это должно быть и как получается по (18).

Как видно, уравнения (18) и (18St) *имеют решения*. Замена «+» на «-», т. е. переход от (18St) к (18) ведет к важному результату:

значительно уменьшается расхождение между теоретическими и экспериментальными значениями коэффициента затвердевания. В данном примере теоретическое значение к при переходе от (18St) к (18) уменьшилось с $2,950 \cdot 10^{-3}$ до $1,605 \cdot 10^{-3}$ при экспериментальном его значении $\approx 0.8 \cdot 10^{-3}$ м/с^{1/2} [15]. Разница между теоретическим и экспериментальным значениями k стала равной 2, а не 3,7. Хотя время затвердевания будет больше теоретического в соответствии с (14) в $2^2 = 4$ раза по (18) и в $3,7^2 = 13,7$ раза по (18St). Разница в 4 раза (для данного конкретного случая затвердевания чугуна в песчаной форме при ГУ1), конечно, существенная, но все же это не 13,7 раза, как получается при расчете по (18St). Хотя и была принята температура поверхности отливки, какой она была бы при затвердевании чугунной отливки в песчаной форме при идеальном контакте, и, следовательно, завышенном теплоотводе по сравнению с реальными условиями литья. При ГУ1 термическое сопротивление отводу тепла от стенки отливки равно нулю, а поверхность отливки мгновенно принимает температуру окружающей среды, то есть θ_n . Лимитирующим звеном в процессе охлаждения

является внутренний теплообмен – отвод тепла твердым металлом. Это внутренняя задача. На практике ГУ1 осуществляют при очень высокой интенсивности внешнего теплообмена, например, при закалке изделий в жидкостях, температура кипения которых ниже температуры нагрева изделий под закалку. При этом температура поверхности остается постоянной и равной температуре кипения жидкости [16]. Например, при закалке данной чугунной отливки при $\theta_n = 80^{\circ}\text{C}$ рассчитанный по (18) коэффициент затвердевания составляет $4,572 \cdot 10^{-3}$ м/с^{1/2}. При ГУ1 нет проблем с отводом тепла с поверхности отливки: все тепло «убирается» каким-то образом. Но при литье теплоотвод с поверхности отливки ограничивается не подводом тепла из центра отливки к ее поверхности, а от поверхности отливки внутрь формы. Это задача внешняя, теплоотвод определяется отводом тепла формой, а у песчаной формы коэффициент аккумуляции тепла на порядок ниже коэффициента аккумуляции тепла отливки. Теплоотвод от отливки гораздо ниже, чем при ГУ1, когда мы задались θ_n из расчета температуры идеального контакта отливки и песчаной формы. Расхождения между теоретическими и экспериментальными значениями к объясняются не тем, что θ_n меняется во времени (этим можно пренебречь за время затвердевания отливки), или изменением свойств металла и формы. b_{ϕ} определяется при заливке в заданную форму по времени затвердевания при минимальном перегреве. Изменение свойств металла невелико, по крайней мере, никак не объясняет 4кратное замедление времени затвердевания по сравнению с теоретическим. Дело в изменении задачи с внутренней на внешнюю из-за резкого замедления отвода тепла с поверхности отливки.

Как же выйти из этого положения? Нам нужно сохранить $\theta_n = \theta_{no} = \theta_{n\phi}$, где θ_{no} и $\theta_{n\phi}$ – температура поверхности отливки и температура поверхности формы. Иначе невозможно получить решение в замкнутом виде, т. е. в виде интегралов от элементарных и специальных функций. И в то же время задать равенство тепловых потоков из отливки и в форму:

$$-\lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = -\lambda_\phi \frac{\partial \theta_\phi}{\partial x} \tag{20}$$

То есть используются одновременно ГУ1 и ГУ4. Конечно, в случае идеального контакта отливки и формы равенство (20) выполняется. И в работах С. Шварца [17, 18] было получено выражение, учитывающее литейную форму, отличающееся от (18St) только первым членом и появлением знака «—» между первым и вторым членами.

Обозначим формулу С. Шварца как (18S) и приведем только часть ee:

$$\frac{b_2 \theta_{sp}}{\exp\left(k^2/4a_2\right)\left[b_2/b_\phi + \operatorname{erf}\left(k/2\sqrt{a_2}\right)\right]} - \dots$$
(18S)

Сначала займемся знаком «-». На самом деле должен быть «+» из-за того, что после подстановки (12) в (8) два «минуса» дадут «плюс». Расчет по (18S) при прежних условиях дает k=0,342·10⁻³ м/с^{1/2}, что в 2,34 раза ниже экспериментального значения k, а время затвердевания, следовательно, будет в $2,34^2 = 5,48$ раза больше опытного. Таким образом, формула (18) дает значения k, в 2 раза большие, (18S) – в 2,34 раза меньшие экспериментальных. А по (18St), как уже говорилось, расчетные значения k в 3,7 раза больше опытных. Однако положение еще хуже, чем оно может показаться из сказанного. Дело в том, что при наличии формы резко замедляется отвод тепла от твердой корочки металла, а формулы (7) и (20) не отражают этого, а (18S) учитывает это не полностью. По (7) и (20) для твердой корочки поток тела $q_2 = -\lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x}$, но ведь форма отводит тепла гораздо меньше. Известно, что величина потока тепла в форму при постоянной температуре на ее поверхности определяется так [11, 19]:

$$q_{\phi} = -\frac{b_{\phi}\theta_{n}}{\sqrt{\pi\tau}} \tag{21}$$

Мы можем убрать форму, но считать, что тепло от твердой корочки уходит в форму в виде потока q_{ϕ} . Понятно, что выражение (20) верно, но в (7) стоит q_2 — сколько может отвести тепла твердая корочка. А ведь форма «возьмет» тепла значительно меньше. Нужно ориентироваться на q_{ϕ} . Теплоотвод лимитируется формой, а не твердой корочкой металла. Поэтому (6) следует записать в таком виде:

$$q_1 + q_{\phi} + q_L = 0, \tag{22}$$

а (7) будет выглядеть так:

$$\lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \frac{b_\phi \theta_n}{\sqrt{\pi \tau}} = L \rho_2 \frac{d\xi}{d\tau}$$
 (23)

Однако уравнение (23) может быть решено только численными методами и должно стать предметом отдельного исследования. А пока сказать что-нибудь об этом решении невозможно.

Из зависимости (18) можно сделать следующее важное заключение. Приравняем второй член этого уравнения нулю, а теплоту перегрева

добавим к теплоте кристаллизации в правой части:

$$\frac{b_2(\theta_{\kappa\rho} - \theta_n)}{\exp(k^2/4a_2)\operatorname{erf}(k/2\sqrt{a_2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\rho_2 k \left[L + c_1(\theta_{\kappa} - \theta_{\kappa\rho})\right]$$
(24)

При перегреве в 100° С k будет равен $1,605\cdot10^{-3}$ и $1,790\cdot10^{-3}$ м/с $^{1/2}$ соответственно по (18) и (24), а перегрев в 200° С дает $1,301\cdot10^{-3}$ и $1,602\cdot10^{-3}$ м/с $^{1/2}$. То есть включение теплоты перегрева в теплоту кристаллизации приводит к увеличению коэффициента затвердевания на 11,5 и 23,1% по сравнению с его учетом во втором члене уравнения (18). А время затвердевания отливки будет соответственно в 1,24 и 1,52 раза меньше — весьма значительные величины. Надо сказать, что, что уравнение Стефана получено для полубесконечного тела. И использование этой зависимости для тел конечных размеров дает завышенную величину времени затвердевания отливки.

Рассмотрев работы И. Стефана и С. Шварца по затвердеванию, сделаем обзор существующему положению дел. Все последующие работы сводятся к двум формулам для определения времени затвердевания отливки. Первая из них записывается так:

$$\tau_{3ame} = \left\{ \frac{\sqrt{\pi} X \left[c_1 \rho_1 \left(\theta_{,\kappa} - \theta_{\kappa p} \right) + L \rho_2 \right]}{2 b_{\phi} \theta_n} \right\}^2 . \tag{25}$$

По второй подсчитывается текущая температура отливки [20], задаваясь которой находят время достижения отливкой этой температуры:

$$\theta = \theta_{H} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\omega \sqrt{\tau} \right) \right] \exp \left(\omega^{2} \tau \right), \tag{26}$$

где начальная температура отливки

$$\theta_{_{_{\mathit{H}}}} = \theta_{_{\mathit{KP}}} + \frac{c_1 \left(\theta_{_{\mathscr{H}}} - \theta_{_{\mathit{KP}}}\right) + L}{c_2},\tag{27}$$

а коэффициент

$$\omega = \frac{b_{\phi}}{c_2 \rho_2 X} \,. \tag{28}$$

В (27) теплота кристаллизации суммируется с теплотой перегрева, переводится в температуру и прибавляется к температуре кристаллизации. Как уже говорилось, судя по (18) и (24), простое сложение теплоты перегрева и теплоты кристаллизации приводит к завышению коэффициента затвердевания, что, конечно, скажется

и на (25). По-видимому, это относится и к (26). Включение теплоты перегрева в теплоту кристаллизации первым произвел С. Сайто в 1921 г. [21]. Затем формула (25) с незначительными отличиями приводится в статье Н. Хворинова [22] и используется во многих статьях и книгах, в т. ч. во всех книгах А.И. Вейника и Г.Ф. Баландина. Не занимаясь обсуждением этих отличий, отметим только, что в знаменателе (25) должна быть θ_n , а не $\theta_{\kappa p}$. Анализ зависимостей (25) и (26) проведен в статье [23].

Расчет времени затвердевания отливки по (25) и (26) дает близкие результаты. Так, τ_{3ame} по (25) для чугунной отливки с $2X = 30 \cdot 10^{-3}$ м равно 317 с, по (26) – 296 с. И какая из этих формул точнее, может рассудить только эксперимент. Но зависимость (26), в отличие от (25), не требует постоянства коэффициента затвердевания и пропорциональности толщины намерзшей корочки корню квадратному из времени (не используется «закон квадратного корня»), не нужно принимать $\theta_n = \text{const.}$ Температура контакта отливки с формой непрерывно меняется. И, что очень важно, выражение (26), в отличие от (25), может быть использовано для расчетов охлаждения отливки в форме до заданной температуры – температуры выбивки. Причем в литературе нет формул, по которым можно было бы рассчитать охлаждение отливки до нужной температуры, так как имеющиеся зависимости неудовлетворительны по своему математическому обоснованию. По (26) время охлаждения чугунной отливки с $2X = 30.10^{-3}$ м до 500° C составляет 9660 с, по экспериментальным данным оно равно 9000 с.

Учитывая, что формула (25) за 91 год не претерпела существенных изменений, на первый план выходит зависимость (26), которая к тому же дает расчет времени охлаждения отливки до заданной температуры. Выражение (26) получается путем строгого решения дифференциального уравнения теплопроводности Фурье для формы. По-видимому, дальнейшие усилия исследователей должны быть направлены на определение граничных условий на фронте затвердевания и на поверхности контакта отливки с формой, анализе и усовершенствовании формулы (18) и получению решений по типу (26).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

- Lame, G. Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide / G. Lame, B.P. Clapeyron // Annales de Chimie et de Physique. 1831. Vol. 47. P. 250-256.
- 2. *Гребер, Г.* Основы учения о теплообмене / *Г. Гребер, С. Эрк, У. Григулль.* М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. 568 с.
- Радол, Р.У. Затвердевание отливок. М.: Машгиз, 1960. 392 с.
- Stefan, J. Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung // Sitzungsberichte der kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematischnaturwissenschaftliche Klasse. 1889. Bd. XCVIII. Abth. IIa. S. 473-484.
- 5. Stefan, J. Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung in Polarmeere // Sitzungsberichte der kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. 1889. Bd. XCVIII. Abth. IIa. S. 965-983.
- Рубинштейн, Л.И. Проблема Стефана. Рига: Звайзгне, 1967. 458 с.
- 7. *Авдонин, Н.А.* Математическое описание процессов кристаллизации. Рига: Зинатне, 1980. 180 с.
- 8. *Мейрманов*, *А.М.* Задача Стефана. Новосибирск: Наука (Сибирское отделение), 1986. 240 с.
- Шахов, Е.М. О задаче Стефана // История физикоматематических наук. Том 34. – М.: Изд-во АН СССР, 1960. С. 512-526.
- Данилок, И.И. О задаче Стефана // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. № 5. С. 133–185.
- Лыков, А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
- Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ; Изд-во «Наука», 2004. 798 с.

- 13. *Мастрюков, Б.С.* Теплофизика металлургических процессов / *Б.С. Мастрюков, Г.С. Сборщиков.* М.: Металлургия, 1993. 320 с.
- Баландин, Г.Ф. Теория формирования отливки. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. 360 с.
- Гуляев, Б.Б. Теория литейных процессов. Л.: Машиностроение, 1976. 216 с.
- Теплотехника металлургического производства.
 Том І. Теоретические основы. М.: МИСИС, 2002.
 608 с.
- 17. *Schwarz, C.* Die rechnerische Behandlung der Abkühlungs- und Erstarrungsvorgänge bei flüssigem Metall // Archiv für das Eisenhüttenwesen. 1931. Bd. 5. Hf. 3. S. 139-148; Hf. 4. S. 177-191.
- 18. *Schwarz, C.* Zur rechnerischen Behandlung der Erstarrungsvorgänge beim Giessen von Metallen // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 1933. Bd. 13. Hf. 3. S. 202-223.
- 19. *Анастасиади*, *Г.П.* Автомодельность температурного поля песчаной формы // Тепловые процессы в отливках и формах / *Г.П. Анастасиади*, *В.М. Голод*. М.: Наука, 1972. С. 82-90.
- Корнилов, А.А. Теоретические основы остывания отливок в неметаллической форме / А.А. Корнилов, В.Д. Репкин, В.Д. Орешкин, Г.В. Куртуков // Затвердевание и охлаждение отливок. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1961. С. 5-20.
- 21. *Saito*, *S. // Science Reports of the Tohoku Imperial University*. 1921. Vol. 10. P. 305-311.
- Chworinoff, N. Theorie der Erstarrung von Guβstűcken // Die Giesserei. 1940. Bd. 27. Hf. 10. S. 177-186; Hf. 11. S. 201-208; Hf. 12. S. 222-225.
- Васенин, В.И. Расчет затвердевания и охлаждения отливки в песчаной форме // Вестник ПГТУ. Машиностроение, материаловедение. 2007. № 3. С. 34-45.

ABOUT STEFAN'S EQUATION AND CALCULATION THE HARDENING OF CASTINGS

© 2012 V.I. Vasenin

Perm National Research Polytechnical University

Are analysed I.Stephane's other authors formulas for calculation the hardening of castings.

Key words: casting, form, hardening, thermal balance

Valeriy Vasenin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor. E-mail: lip@pstu.ru