

## БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРДИНАТ ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА ТЕСТ-СИГНАЛОМ НА ОСНОВЕ ДВОИЧНОЙ М-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

© 2012 В.Ф. Яковлев

Самарский государственный технический университет

Поступила в редакцию 14.12.2012

Рассмотрен алгоритм вычисления ординат импульсной переходной функции линейного динамического объекта при его возбуждении тест-сигналом на основе двоичной М-последовательности с помощью быстрого преобразования Уолша-Адамара.

Ключевые слова: импульсная переходная функция, тест-сигнал, двоичная М-последовательность, быстрое преобразование Уолша.

Для идентификации линейных динамических объектов используются их различные модели, в том числе и импульсная переходная функция (ИПФ). В этом случае объект может быть описан следующим уравнением:

$$y[i] = h_0 + \Delta t \cdot \sum_{j=0}^{N-1} h[j] \cdot x[i-j]. \quad (1)$$

Здесь  $y[i]$  – реакция объекта,  $\Delta t$  – шаг дискретизации,  $x[i]$  – входной тест-сигнал,  $h[j]$  – ординаты импульсной переходной функции,  $h_0$  – реакция объекта на постоянный рабочий сигнал,  $N$  – время памяти объекта [1].

На практике для независимой оценки ординат ИПФ при идентификации применяют ортогональные к сдвигу кусочно-постоянные тест-сигналы небольшой амплитуды, не нарушающие нормальное функционирование объекта, тогда при измерении реакции объекта один раз на такте тест-сигнала:

$$h[j] = \frac{\sum_{i=0}^p y[i] \cdot x[i-j]}{\sum_{i=0}^p x^2[i-j]}. \quad (2)$$

В качестве тест-сигнала удобно использовать легко реализуемые псевдослучайные двоичные М-последовательности [1, 2]. Определение взаимокорреляционной функции для различных  $j$  по (2) требует большого объема вычислений.

Известен алгоритм, уменьшающий объем вычислений для определения ординат ИПФ при возбуждении динамического объекта тест-сигналом в виде двоичной М-последовательности, на

основе быстрого преобразования Адамара [3, 4, 5]. Целью этой работы является модернизация быстрого алгоритма для вычисления ординат ИПФ.

Двоичная М-последовательность является упорядоченным с помощью сопровождающей матрицы (характеристического полинома  $F(x)$ ), множеством компонент  $S_i$  вектора координат элементов поля Галуа  $GF(2^n)$  в степенном базисе [6]. М-последовательность, генерируемая с помощью характеристического полинома степени  $n$ , имеет период  $P = (2^n - 1)$  тактов.

При генерации тест-сигналов эти компоненты заменяются реальными сигналами с нормированными значениями:

$$x(0) = +1; \quad x(1) = -1. \quad (3)$$

Умножение для реальных сигналов оказывается эквивалентным сложению по модулю 2 для компонент  $S_i$ :

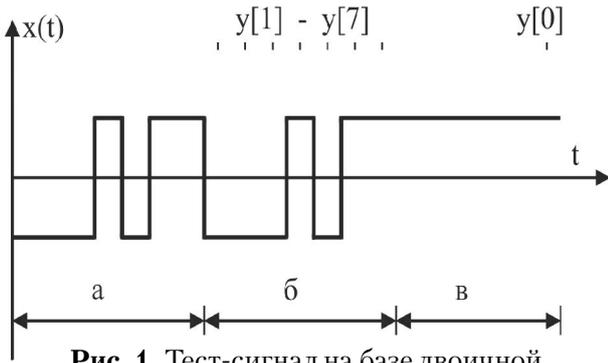
$$\begin{aligned} 1 \oplus 0 &= 1 \Rightarrow (-1) \cdot (+1) = -1 \\ 1 \oplus 1 &= 0 \Rightarrow (-1) \cdot (-1) = +1 \\ 0 \oplus 0 &= 0 \Rightarrow (+1) \cdot (+1) = +1 \\ 0 \oplus 1 &= 1 \Rightarrow (+1) \cdot (-1) = -1 \end{aligned} \quad (4)$$

В тест-сигнал на основе двоичной М-последовательности вводятся дополнительные такты для получения несмещенной оценки  $h[j]$  (“нулевая строка”), а также для устранения погрешности от неверного задания исходного состояния объекта перед началом тестирования [1, 2].

Для упрощения изложения алгоритм вычисления ординат ИПФ далее рассматривается для небольшого количества  $h[j]$ . На рис. 1 приведен тест-сигнал на основе двоичной М-последовательности с характеристическим полиномом  $F(x) = x^3 + x + 1$  и периодом 7 тактов, точками указаны моменты измерения реакции объекта.

На практике используются М-последовательности с характеристическими полиномами степени не менее 8.

Яковлев Вадим Фридрихович, кандидат технических наук, доцент кафедры “Теоретическая и общая электротехника”. E-mail: vf7415@mail.ru



**Рис. 1.** Тест-сигнал на базе двоичной М-последовательности.  
 а – формирование начальных условий,  
 б – период М-последовательности,  
 в – формирование “нулевой строки”.

В соответствии с (2):

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ h[3] \\ h[4] \\ h[5] \\ h[6] \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} + + + + + + + \\ + - - - + - + + \\ + + - - - + - + \\ + + + - - - + - \\ + - + + - - - + \\ + + - + + - - - \\ + - + - + + - - \\ + - - + - + + - \\ + - - + - + + - \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \\ y[5] \\ y[6] \\ y[7] \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$H = \frac{1}{P+1} \cdot X \cdot Y. \quad (6)$$

Здесь H и Y – векторы-столбцы оценок ординат ИПФ и реакции объекта, X - задержанные реплики входного сигнала, матрица плана эксперимента. С целью упрощения записи в матрице X приведены только знаки нормированных значений тест-сигнала, дополнительная “нулевая строка” размещена в левом столбце X.

В аппаратном или программном генераторе непосредственно доступны М-последовательность и ее реплики с запаздыванием от 1 до (n-1) такта. М-последовательности с запаздыванием  $j \geq n$  являются линейными комбинациями последовательностей с запаздываниями меньше n того же характеристического полинома:

$$S_{i-j} = a_1 \cdot S_i \oplus a_2 \cdot S_{i-1} \oplus \dots \oplus a_n \cdot S_{i-n+1}. \quad (7)$$

Для тест-сигналов выражение (7) записывается так:

$$x[i-j] = (x[i])^{a_1} \cdot (x[i-1])^{a_2} \cdot \dots \cdot (x[i-n+1])^{a_n} \quad (8)$$

Коэффициенты  $a_i$  в (7, 8) совпадают с коэффициентами полинома-остатка  $R_j(x)$  в  $GF(2^n)$  [6]:

$$R_j(x) = x^j \text{ mod } F(x). \quad (9)$$

Выражение (9) иногда называют алгоритмом Дэвиса, его применяют для генерации задержанных М-последовательностей при идентификации

линейных динамических объектов. Например, в пятой строке матрицы X приведен тест-сигнал с запаздыванием на 4 такта по отношению к входному сигналу генератора М-последовательности. Вычислим коэффициенты полинома-остатка по (9) для этого случая:

$$R_4 = x^4 \text{ mod } (x^3 + x + 1) = (x^2 + x), \text{ т.к.}$$

$$\frac{x^4}{x^3 + x + 1} = x + \frac{x^2 + x}{x^3 + x + 1}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0$  и  $x[i-3] = x[i] \cdot x[i-1]$ .

Двоичная запись матрицы  $X_2$  имеет вид:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 00000000 \\ 01110100 \\ 00111010 \\ 00011101 \\ 01001110 \\ 00100111 \\ 01010011 \\ 01101001 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

В (12) представлены матрица Уолша-Адамара [7] W и ее двоичный аналог  $W_2$  размерностью  $8 \cdot 8$ .

$$W = \begin{pmatrix} + + + + + + + \\ + - + - + - + - \\ + + - - + + - - \\ + - + - - + - + \\ + + + - - - - \\ + - - + - + + - \\ + - - + + - - + \\ + + - - - + + \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} 00000000 \\ 01010101 \\ 00110011 \\ 01011010 \\ 00001111 \\ 01101001 \\ 01100110 \\ 00111100 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

При умножении вектора-столбца на матрицу Уолша-Адамара используют эффективное быстрое преобразование Уолша-Адамара (БПУ), значительно уменьшающее объем вычислений [7].

Согласно (7) любая строка матрицы  $X_2$  является линейной комбинацией по модулю 2 n строк, соответствующих последовательной смене n-разрядных двоичных чисел в генераторе М-последовательности. В  $X_2$  это вторая, третья и четвертая строки. Для тест-сигналов в X этот алгоритм трансформируется в (8).

В матрице Уолша-Адамара размерностью  $2^n \cdot 2^n$  строки также определяются линейной комбинацией по модулю 2 n строк, соответствующих последовательному возрастанию двоичных n-разрядных чисел, образованными пересечением столбца и этими строками. Верхний (второй) элемент столбца соответствует младшему разряду.

В [3, 4] предложена методика применения БПУ для вычисления оценок ординат ИПФ при возбуждении динамического объекта тест-сигналом на основе М-последовательности.

В матрице  $X_2$  столбцы упорядочены в порядке появления двоичных  $n$ -разрядных чисел в генераторе М-последовательности. После перестановки столбцов в порядке возрастания двоичных  $n$ -разрядных чисел матрица  $X_2$  совпадает с  $W_2$  (соответственно  $X$  с  $W$ ). Чтобы результат умножения матрицы на вектор-столбец не изменился, следует переставлять и компоненты  $y[i]$  вектора  $Y$  и спектральные коэффициенты Уолша, порядок следования которых отличается от расположения элементов  $h[j]$  в векторе  $H$ . Таким образом:

$$H = A_2 \cdot W \cdot A_1 \cdot Y. \tag{13}$$

Здесь  $A_1$  и  $A_2$  – матрицы перестановок, определяемые характеристическим полиномом М-последовательности.

Для перестановки элементов в векторе  $Y$  достаточно записывать замеры реакции объекта  $y[i]$  в массив не в естественном порядке, а по адресам, задаваемым двоичными числами в генераторе М-последовательности. Например, из (5) и (11) следует, что в векторе  $Y$  элементы должны быть переписаны в следующем порядке:  $y[0], y[1], y[6], y[2], y[7], y[5], y[4], y[3]$ , матрица  $A_1$  тогда имеет вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 10000000 \\ 01000000 \\ 00000010 \\ 00100000 \\ 00000001 \\ 00000100 \\ 00001000 \\ 00010000 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Разумно применить алгоритм БПУ на осно-

ве факторизации матрицы преобразования Уолша-Адамара на произведение  $n$  одинаковых матриц. В отличие от алгоритма типа “бабочка” [7] в этом случае в каждом из  $n$  этапов БПУ выполняется одна и та же процедура, что упрощает программную реализацию алгоритма.

На рис. 2 алгоритм БПУ изображен в виде графа для рассматриваемого примера. Спектральные коэффициенты, вычисленные с помощью БПУ упорядочены по возрастанию номеров функций Уолша.

В [3, 4] показано, что адреса в двоичном формате, по которым расположены оценки ординат ИПФ  $h[j]$  в векторе спектральных коэффициентов Уолша, могут быть определены из матрицы  $K$  размерностью  $n \cdot 2^n$ . В матрицу  $K$  отбираются  $n$  столбцов из  $X_2$ , так чтобы верхние строки матрицы  $K$ , начиная со второй, образовали единичную матрицу размерностью  $n \cdot n$ . Младший бит адреса располагается в левом столбце.

Для случая  $F(x) = x^3+x+1$  матрица  $K$  и матрица перестановок  $A_2$  на ее основе имеют вид:

$$K = \begin{pmatrix} 000 \\ 100 \\ 010 \\ 001 \\ 110 \\ 011 \\ 111 \\ 101 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 10000000 \\ 01000000 \\ 00100000 \\ 00001000 \\ 00010000 \\ 00000010 \\ 00000001 \\ 00000100 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Соответствие спектральных коэффициентов Уолша и ординат ИПФ указано и на рис. 2.

Недостатком рассмотренного быстрого алгоритма является необходимость генерации в процессе вычислений всей матрицы  $X_2$  размерностью  $2^n \cdot 2^n$ , например, при  $n = 8$  это уже 65536 элементов.

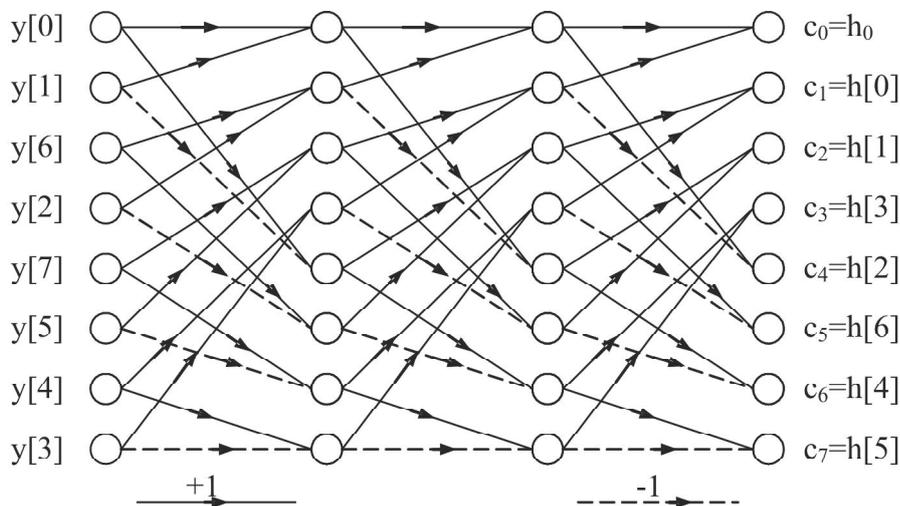


Рис. 2. Алгоритм БПУ

В этой статье предлагается другой способ сопоставления ординат ИПФ  $h[j]$  со спектральными коэффициентами Уолша в БПУ.

Спектральные коэффициенты, полученные в результате применения БПУ (Рис 2), расположены по возрастанию номеров функций Уолша при их естественном упорядочивании (по Адамару) [7].

Полная ортонормированная система  $2^n$  функций Уолша (Рис.3) определяется на основе  $n$  функций Радамахера  $R_i(t)$  [7]. Функции Уолша определяются через произведение функций Радамахера. Наличие или отсутствие  $j$ -й функции Радамахера при получении  $i$ -й функции Уолша определяется  $j$ -м разрядом двоичного представления числа  $i$ . Например,  $w_1(t) = w_{001}(t) = R_1(t)$ ,  $w_5(t) = w_{101}(t) = R_1(t) \cdot R_3(t)$  и т.д.

Матрицы  $X$  (5) и  $W$  (12) отличаются только перестановкой столбцов, следовательно строка  $x[i]$  в (5) соответствует  $R_1(t)$  в (12), строка  $x[i] \cdot x[i-1]$  в (5) соответствует  $R_1(t) \cdot R_2(t) = w_{011}(t) = w_3(t)$  в (12) и т.д.

Таким образом, двоичная запись номера спектрального коэффициента Уолша  $c_j$  указывает сигналы с каких разрядов генератора  $M$ -последовательности использовались при его вычислении. Адреса, по которым находятся оценки ординат ИПФ  $h[j]$  в векторе спектральных коэффициентов Уолша определяются так:  $h_0 = c_0$  и  $h[j] = c_k$ ,  $k = 2^j$  при  $j < n$ ,  $k$  определяется по (9) при  $j \geq n$ . Необходимости генерировать всю матрицу  $X$  при таком алгоритме не возникает.

Процесс идентификации связан с автоматическим управлением объектом исследования, оборудованием для подачи тест-сигнала и сбора данных, обработкой данных. Это удобно осуществлять в специализированной среде программирования LabVIEW [8]. Разумно и подготовительную работу делать в той же среде. Автором был разработан несложный виртуальный прибор для определения ординат ИПФ  $h[j]$  линейного динамического объекта при его возбуждении тест-

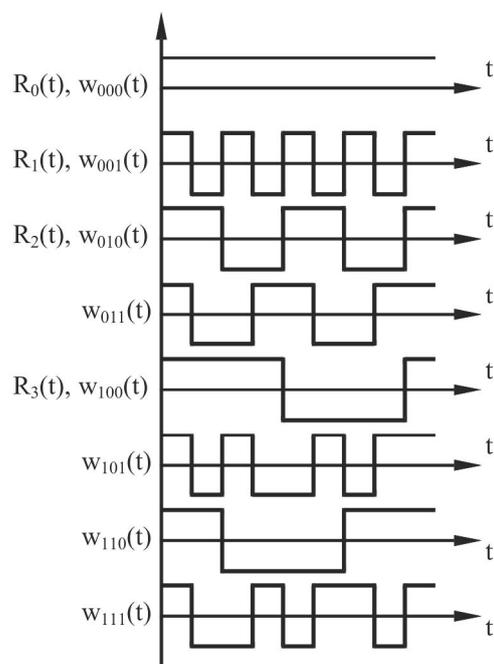


Рис. 3. Функции Уолша, упорядоченные по Адамару

сигналом на основе двоичной  $M$ -последовательности. На рис. 4 приведен фрагмент панели виртуального прибора, на рис. 5 часть блок-схемы.

В разработанном виртуальном приборе динамический объект моделировался набором ординат ИПФ (100, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12). На рисунке 4 представлено состояние панели виртуального прибора после проведения идентификации. Использовалась  $M$ -последовательность с характеристическим полиномом  $x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + 1$ , который задан в двоичной форме. Ординаты ИПФ полностью восстановлены, указаны их адреса в массиве спектральных коэффициентов Уолша.

## ВЫВОДЫ

При вычислении оценок ординат ИПФ линейных динамических объектов при возбужде-

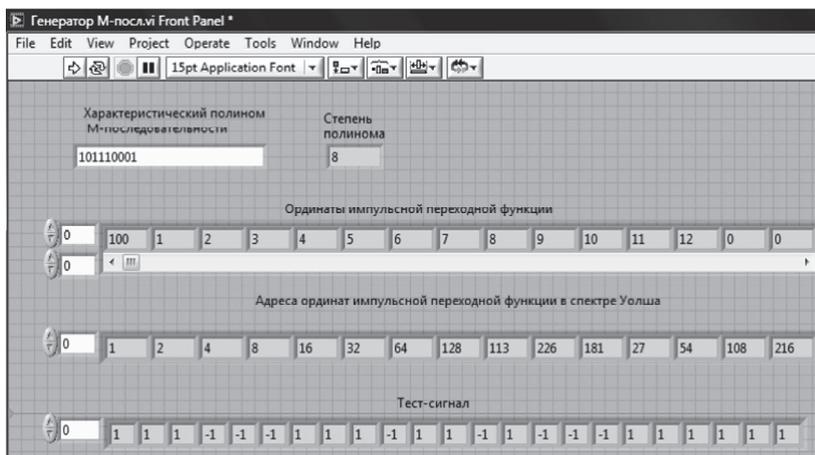


Рис. 4. Лицевая панель виртуального прибора

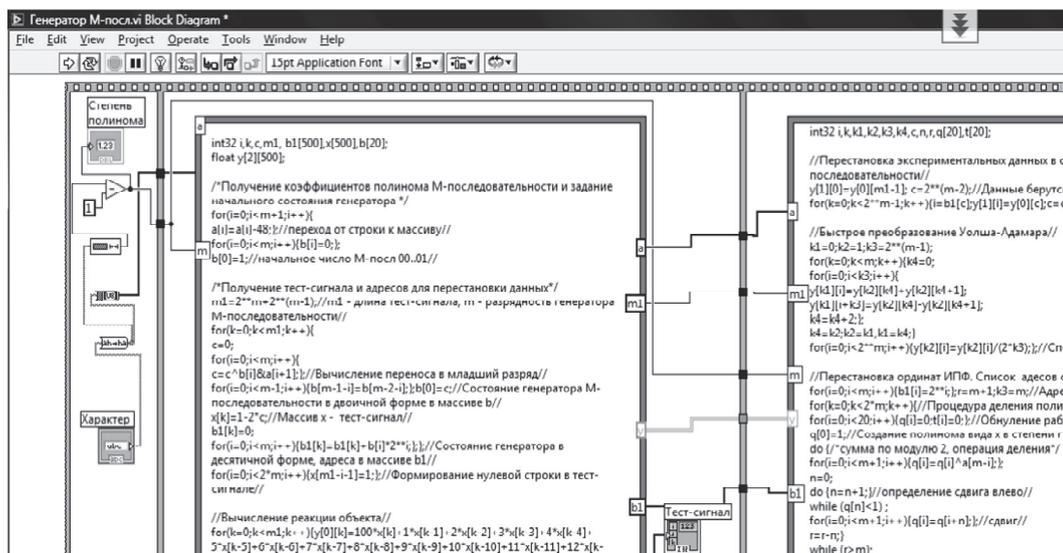


Рис. 5. Часть блок-схемы виртуального прибора

нии их тест-сигналом на основе двоичных M-последовательностей используется эффективный алгоритм быстрого преобразования Уолша-Адамара. При этом необходимо в зависимости от вида характеристического полинома M-последовательности произвести перестановки компонентов в векторах реакции объекта и спектральных коэффициентов Уолша. В статье предложен более простой алгоритм определения соответствия между оценками ординат ИПФ и спектральными коэффициентами, полученными в результате БПУ, не требующий генерации всего плана эксперимента размерностью  $2^n \cdot 2^n$ .

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Ikonen E. Advanced process identification and control. New York: Marcel Dekker Inc., 2002. 316 p.
2. Яковлев В.Ф. Выбор характеристического полинома

ма двоичной M-последовательности для идентификации нелинейного динамического объекта // Известия Самарского научного центра РАН. 2011. Т.13. №4. С.133-135.

3. Cohn M., Lempel A. On fast M-sequences transforms // IEEE Trans Inform. Theory. – 1977. IT – 23. С.135-137.
4. Jens Hee Impulse response measurements using MLS // Bruel & Kjaer, Denmark. – 2003. 16 pp. URL: http://jenshee.dk (дата обращения 18.11.2011).
5. Perrett M. Implementation of a M-sequence pseudo random binary sequence audio measurement system based on the Hadamard transform // University College London. -2010. 4 pp. URL: http://www.ee.ucl.ac.uk/lcs/previous/LCS2010/lens2010\_submission\_25.pdf (дата обращения 18.11.2011).
6. Davies W.D.T. System identification for self-adaptive control. New York: Wiley-Interscience, 1970. 290 p.
7. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989. 496 с.
8. Тревис Дж. LabVIEW для всех. М.: ДМК Пресс, 2005. 540 с.

**FAST ALGORITHM FOR COMPUTING THE IMPULSE RESPONSE OF A LINEAR DYNAMIC OBJECT USING BINARY M-SEQUENCE AS INPUT**

© 2012 V.F. Yakovlev

Samara State Technical University

The paper considers algorithm of computing the impulse response of a linear dynamic object using binary M-sequence as input via fast Walsh-Hadamard transform.

Keywords: impulse response, test-signal, binary M-sequence, fast Walsh-Hadamard transform.

Vadim Yakovlev, Candidate of Technics, Associate Professor at the of Theoretic Electro Technology Department. E-mail: vf7415@mail.ru