

УДК 53.072; 537.226.4; 548.537.611

ВЛИЯНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ СИГНАЛА НА ФОРМУ ПЕТЛИ ГИСТЕРЕЗИСА

© 2012 А.А. Лукичёв

Институт геологии и природопользования ДВО РАН, г. Благовещенск

Поступила в редакцию 23.03.2012

В работе рассмотрено влияние гармонических составляющих, появляющихся в отклике слабо нелинейной системы при гармоническом воздействии на форму петли гистерезиса. Найдена зависимость формы петли линейного гистерезиса от 2-4-й гармоник. Найдена зависимость искажения от номера и фазы гармоники. Показана применимость полученных результатов для описания гистерезисных зависимостей реальных нелинейных материалов.

Ключевые слова: петля гистерезиса, гармоники, нелинейные материалы.

Известно, что гистерезис обусловлен запаздыванием отклика системы любой природы на внешнее воздействие. Это явление хорошо известно в физике, технике, экономике, социологии, биологии и других отраслях науки. Любая система на внешнее воздействие реагирует не мгновенно, но петли гистерезиса представляют интерес, прежде всего, для систем с нелинейным откликом. В физике гистерезисные зависимости чаще всего применяются для изучения свойств нелинейных материалов: ферромагнетиков и диэлектриков. Нас интересует физическое применение петли гистерезиса.

В настоящее время имеется достаточно много математических моделей гистерезисных зависимостей [1-3]. Имеющиеся модели гистерезиса построены на решении нелинейных дифференциальных уравнений, либо на введении нелинейных гистерезисных членов в линейные уравнения. Подобным образом построены модели Прайса, Джилеса-Атертона, Хаузера и другие. Использование нелинейных уравнений приводит к значительному усложнению модели из-за того, что трудно получить универсальное решение и интерпретировать результаты. В случае линейного уравнения сложно найти достаточно простую добавку, которая не приводила бы к значительным математическим трудностям и позволяла бы воспроизвести параметры петли. Если гистерезисный член прост, как, например, функция Прайса и подобные ей [3], то здесь требуется задание параметров петли, т.е. такой подход позволяет получить только полуэмпирические модели.

Реальные системы с запаздыванием могут описываться петлями гистерезиса самой разно-

Лукичёв Александр Александрович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории керамического материаловедения.

E-mail: Lukichevaa@mail.ru

образной формы. Исчерпывающей классификации петель гистерезиса в настоящее время нет. В работе [4], например, приведено 6 различных типов петель, которые далеко не отражают разнообразие гистерезиса для реальных материалов.

В работе [5] предложен метод построения петли гистерезиса, как параметрической зависимости функции отклика системы от функции внешнего воздействия $Y(t)=f(X(t))$. При этом считается, что система близка к линейной и с достаточной точностью описывается линейным уравнением, решение которого известно. Нелинейные явления учитываются введением в линейное решение дополнительной нелинейной функции. Если известен вид нелинейной функции, этот метод позволяет легко воспроизвести классическую петлю гистерезиса, описывающую насыщение магнитной или диэлектрической проницаемости. В [5] авторы рассмотрели единственный вид нелинейности – ограничение амплитуды в результате насыщения физического параметра материала под действием внешнего поля, или нелинейность типа “насыщение”. В настоящей работе рассматривается влияние произвольных нелинейных искажений на форму петли. Рассматриваем колебания близкие к гармоническим, для учёта нелинейности вводится сумма гармонических составляющих порядка выше первого. Природу нелинейности здесь не рассматриваем.

Любую систему с гистерезисом можно представить в виде очевидной блок-схемы, показанной на рис. 1. Имеется входное воздействие $X(t)$, на которое система, с передаточной функцией $W(\omega, X(t))$, даёт отклик $Y(t) = W \cdot X(t)$. Передаточная функция определяется свойствами системы и зависит от амплитуды и частоты входного сигнала, а так же от свойств самой системы. Петля гистерезиса представляет собой параметрическую зависимость $Y(t)=f(X(t))$.

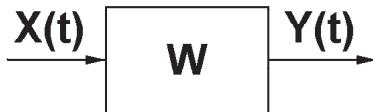


Рис. 1. Блок-схема системы с гистерезисом

Будем рассматривать реакцию системы, близкой к линейной, на гармоническую входную функцию вида

$$X(t) = X_0 \cdot \sin(\omega \cdot t). \quad (1)$$

Здесь X_0 – амплитуда входного воздействия, t – время. Отклик системы в общем случае будет состоять из основной гармоники на частоте входного сигнала и суммы гармонических составляющих с более высокими частотами, т.е. функция отклика может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$Y(t) = Y_0 + \sum_n a_n \cos(n \cdot \omega \cdot t + \varphi_{an}) + \sum_n b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t + \varphi_{bn}), \quad (2)$$

где Y_0 – постоянная составляющая, $n (1, 2, 3\dots)$ – номер гармоники, a_n, b_n – амплитудные коэффициенты, $\varphi_{an}, \varphi_{bn}$ – отставание по фазе составляющих n -й гармоники. Для простоты будем считать $\varphi_{a1} = \varphi_{b1} = \varphi_{an} = \varphi_{bn} = \varphi$.

Используя метод построения петли гистерезиса предложенный в [5] будем рассматривать влияние на форму петли каждой гармонической составляющей по отдельности. Рассмотрим влияние второй гармоники. Функцию отклика, учитывающую вторую гармонику представим в виде: $Y(t) = Y_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + k_a \cos(2\omega \cdot t + \varphi) + k_b \cdot \sin(2\omega \cdot t + \varphi)$, (3) здесь Y_1 – амплитуда первой гармоники, k_a, k_b – амплитудные коэффициенты. Далее принимаем $Y_1 = 1$.

На рис. 2 показаны петли гистерезиса для различных сочетаний амплитудных коэффициентов k_a, k_b и при различных фазах. В работе [5] рассматривался гистерезис для линейного осциллятора и в качестве характеристических точек были выбраны резонансная частота и частоты выше и ниже резонансной. Выбранным значениям частоты соответствуют фазы: ниже точки резонанса $\varphi_1 < \pi/2$, на резонансной частоте $\varphi_2 = \pi/2$ и частоте, выше резонансной, $\varphi_3 > \pi/2$ [6]. Ниже мы будем использовать эти значения фазы для определения характеристических точек. Сигнал отклика запаздывает по отношению к входному воздействию, поэтому фаза отклика всегда отрицательна. Здесь и далее для удобства мы указываем абсолютное значение фазы.

Петли гистерезиса для сигнала отклика с косинусоидальной второй гармоникой ($k_a = \pm 0,1; k_b = 0$) показаны на рис. 2а и 2б. Значение коэффициента $k_a = \pm 0,1$ выбираем произвольно, поскольку нас интересует только форма петли. Как

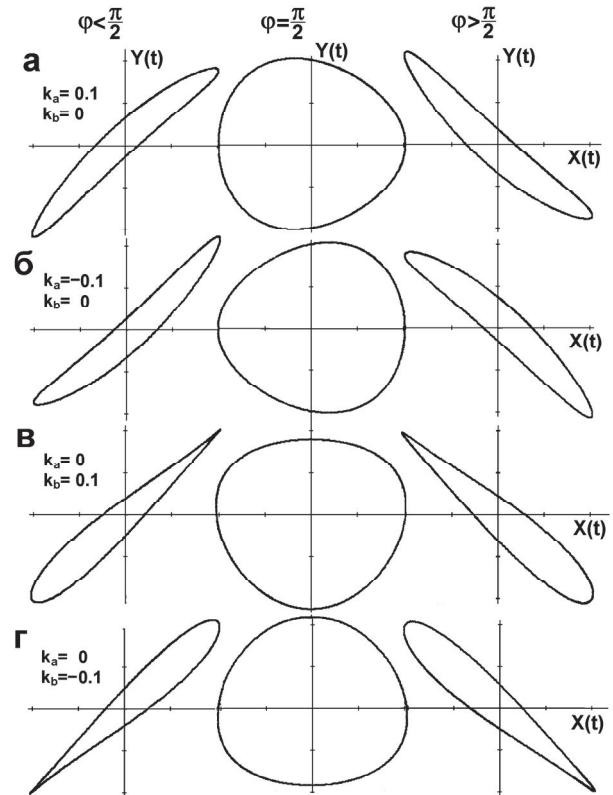


Рис. 2. Влияние второй косинусоидальной и синусоидальной гармоник на форму петли гистерезиса при различных фазах функции отклика видно из рисунков, косинусоидальная вторая гармоника приводит к боковым петлям типа “месяц”. В точке резонанса ($\varphi \approx \pi/2$) петля превращается в эллипс, несимметричный относительно OY , или в треугольник с существенно скруглёнными углами. Синусоидальная вторая гармоника ($k_a = 0; k_b = \pm 0,1$) для точек $\varphi_1 < \pi/2$, $\varphi_3 > \pi/2$ приводит к петле типа “капля”, острый конец которой может быть направлен как вниз, так и вверх (рис. 2в, 2г), в зависимости от знака коэффициента k_b . В точке $\varphi \approx \pi/2$ петля превращается в несимметричный эллипс, повернутый на угол $\pi/2$ относительно эллиса для косинусоидальной гармоники. Для всех графиков на рис. 2 правую петлю можно получить из левой поворотом на угол $\pi/2$.

Рассмотрим влияние третьей гармоники. Функцию отклика, учитывающую третью гармонику представим виде:

$$Y(t) = Y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + k_a \cos(3\omega \cdot t + \varphi) + k_b \cdot \sin(3\omega \cdot t + \varphi). \quad (4)$$

На рис. 3 показаны петли гистерезиса для различных сочетаний амплитудных коэффициентов в характеристических точках. Петли гистерезиса для сигнала отклика с косинусоидальной второй гармоникой ($k_a = \pm 0,1; k_b = 0$) показаны на рис. 3а, 3б. Как видно из рисунков, для косинусоидальной гармоники на частотах ниже и выше резонансной получаются петли типа “веретено” и “гантель”. При $\varphi = \pi/2$ петля превра-

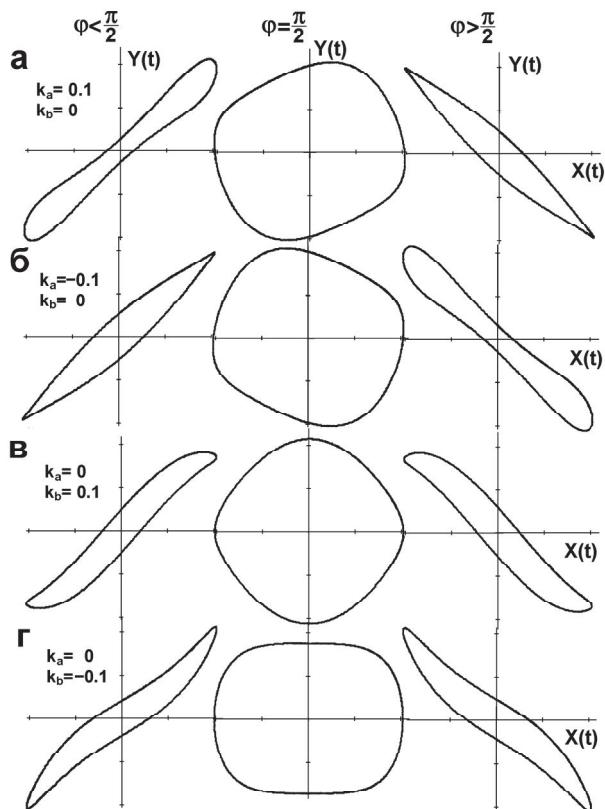


Рис. 3. Влияние третьей косинусоидальной и синусоидальной гармоник на форму петли гистерезиса при различных фазах функции отклика

щается в фигуру, которую можно назвать как скруглённый прямоугольник. Петля несимметрична относительно осей координат.

Синусоидальная третья гармоника ($k_a=0$; $k_b=\pm 0,1$) приводит к боковым петлям, близким по форме к классической петле с нелинейностью типа “насыщение”. В точке $\varphi=\pi/2$ для положительной гармоники петля превращается в скруглённый ромб, для отрицательной гармоники в скруглённый прямоугольник.

Аналогично, используя соотношение

$$Y(t) = Y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + k_a \cos(4\omega \cdot t + \varphi) + k_b \cdot \sin(4\omega \cdot t + \varphi), \quad (5)$$

находим петли для четвёртой гармоники. Как видно из рис. 4, четвёртая гармоника приводит к существенному искажению петель. Боковые петли для косинусоидальной гармоники представляют собой сильно искажённые петли типа “насыщение” (“туфля”), для синусоидальной – комбинация из петель второго и третьего порядка. Центральная петля имеет вид скруглённого пятиугольника.

Учёт гармоник более высокого порядка представляется нецелесообразным, поскольку на практике амплитуда этих гармоник, как правило, невелика.

Анализ графиков на рис. 2-4 позволяет сделать следующие выводы. Количество углов у центральной петли на единицу превышает номер

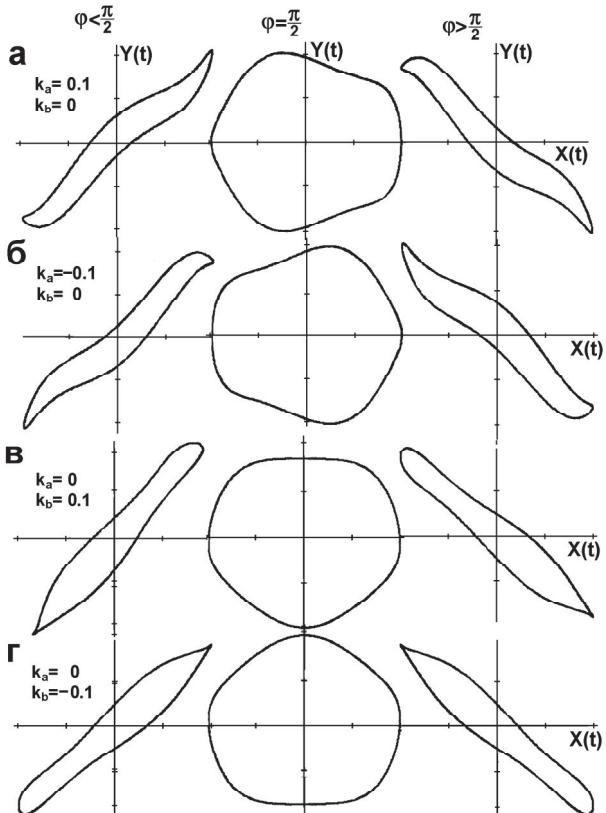


Рис. 4. Влияние четвертой косинусоидальной и синусоидальной гармоник на форму петли гистерезиса при различных фазах функции отклика гармоники. Для гармоник порядка выше 2 у боковых петель количество точек перегиба на единицу меньше номера гармоники (рис. 3, рис. 4). Боковые остроконечные петли с острыми концами наблюдаются для чётных синусоидальных гармоник и нечётных косинусоидальных. Центральные петли, несимметричные относительно обеих координатных осей, наблюдаются для нечётных гармоник, кроме первой.

Для заторможенных колебаний фаза изменяется в пределах $0 \leq \varphi < \pi/2$ [6]. В этом случае, изменение формы сводится к уширению малофазной (левой) петли с одновременным снижением амплитуды отклика [6]. К сожалению, в этом случае затруднено определение вида искажений, поскольку невозможно построить центральную петлю.

Для подтверждения полученных выше теоретических результатов были сняты петли гистерезиса для произвольного стального стрежня в линейном (ненасыщенном) режиме в диапазоне частот 20 Гц – 500 кГц. Частотная зависимость магнитной проницаемости стали имеет довольно сложный вид с большим количеством резонансных пиков. На низких частотах для большинства пиков наблюдается линейный гистерезис с петлями, близкими к правильному эллипсу. На частотах выше 100 кГц получен пик, у которого заметно влияние нелинейных искажений.

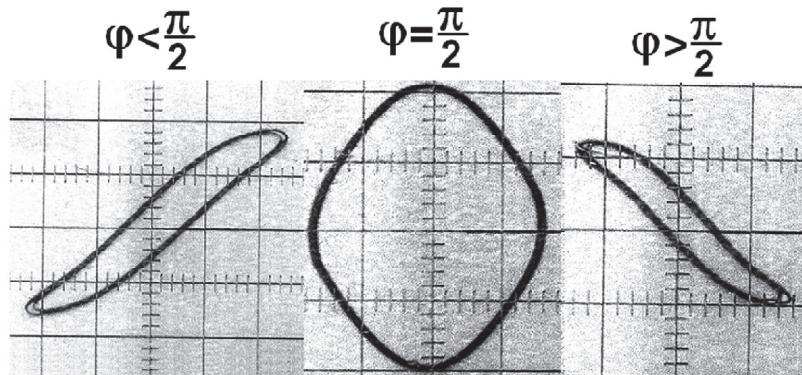


Рис. 5. Петли гистерезиса для намагниченности стали в характеристических точках

На рис. 5 показаны петли гистерезиса для пика с резонансной частотой 130 кГц. Форма петли соответствует показанной на рис. 3в, т.е. третьей положительной синусоидальной гармонике. Для боковых петель заметна незначительная клиновидность вниз. Это означает, что также присутствует первая положительная синусоидальная гармоника (рис. 2в), но её амплитуда невелика.

Форма петли существенно зависит от амплитуды тока намагничивания, при низких токах петля превращается в правильный эллипс.

В настоящей работе автор неставил целью найти всё многообразие петель гистерезиса, здесь в большей степени показан метод анализа петель гистерезиса,

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше было рассмотрено влияние гармоник совпадающих по фазе с основной. Но фаза гармоники может быть любой. Очевидно, что форма петли зависит от фазы. Постепенное увеличение фазового сдвига для косинусоидальной положительной функции приводит к постепенной трансформации формы петли от показанной на рис. 3а к 3г, далее к 3б и 3в. Здесь получены петли только синусоидальной входной функции, очевидно, что для косинусоидальной функции будет получен тот же набор петель. Если одновременно имеются косинусоидальная и синусоидальная гармони-

ки, то форма петель будет либо близка к показанным на рис. 2-4, либо будет иметь вид комбинации из каких либо двух петель, показанных на рисунках. Комбинация левых петель, показанных на рис. 3а и 3в даёт классическую петлю гистерезиса, свойственную материалам с нелинейностью типа “насыщение”. Для того, чтобы определить тип нелинейности необходимо измерение гистерезиса в особой точке $\varphi = \pi/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 275 с.
2. Hauser H., Fulmek P.L., Grüssinger R. Hysteresis modeling and measurement for two-dimensional particle assembles // J. of magnetism and magnetic materials, Vol. 242-245, 2002. Pp. 1067-1069.
3. Bottauscio O., Chiampi M., Chiarabaglio D., Repetto M. Preisach-type hysteresis models in magnetic field computation // Physica B, Vol. 275, 2000. Pp. 24-39.
4. Lapshin R.V. Analytical model for the approximation of hysteresis loop and its application to the scanning tunneling microscope // Rev. Sci. Instr. Vol. 66, № 9, 1995. Pp. 4718-4730.
5. Лукичёв А.А., Ильина В.В. Простая математическая модель петли гистерезиса для нелинейных материалов // Известия Самарского научного центра РАН. 2011. Т.13. № 4. С. 39-44.
6. Лукичёв А.А., Ильина В.В. Различные режимы вынужденных колебаний линейного осциллятора с затуханием и исследование спектральных функций // Известия Самарского научного центра РАН. 2008. Т.10. № 3. С. 782-790.

INFLUENCE OF HARMONIC COMPONENTS ON THE HYSTERESIS LOOP SHAPE

© 2012 A.A. Lukichev

Institute of Geology and Nature management FEB RAS, Blagoveshchensk

In this paper the influence of harmonic components on the hysteresis loop shape for weakly non-linear systems is considered. The dependence of the hysteresis loop shape on 2-4-th order harmonic is found. The dependence of the hysteresis loop shape disturbance on the harmonics order and phase is considered. The obtained results applicability for the non-linear materials hysteresis dependence description is shown.

Key words: hysteresis loop, harmonic components, non-linear materials.

Alexander Lukichev, Candidate of Physics and Mathematics,
Senior Research Fellow at the Ceramic Material Science
Laboratory. E-mail: Lukichevaa@mail.ru