УДК 621-189.2-047.58

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДОЗАТОРНОЙ СИСТЕМЫ

© 2012 А.М. Ханов, А.Е. Кобитянский, А.В. Шафранов, Д.А. Петров

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Поступила в редакцию 24.10.2012

Представлена методика построения математической модели центробежного насоса-дозатора на основе предложенной обобщенной классификации и структурно-функциональной схемы. Математическая модель обеспечивает возможность оценки влияния конструктивных и режимных параметров системы на динамические процессы ее взаимосвязанных элементов.

Ключевые слова: дозаторные системы, математическая модель

В настоящее время дозаторные системы нашли широкое применение в машиностроении, химической промышленности, медицине, нефтегазовой отрасли, сельском хозяйстве и др. [1]. В этих системах выделяется ряд основных взаимосвязанных элементов, к которым относятся двигатель, передаточный механизм, исполнительный орган, дозатор, всасывающая и нагнетательная линия, система управления. Двигатель передает движение передаточному механизму, согласующему механические характеристики двигателя и исполнительного органа системы дозирования. Исполнительный орган через дозатор выбрасывает определенное количество материала во внешнюю среду по нагнетательной линии [1]. Контроль и управление параметрами дозирования, а именно распределение подачи с заданной, как временной, так и объемной точностью; регулирование расхода в зависимости от изменения какого-либо параметра процесса и т.д. осуществляется системой управления. К дозаторным системам предъявляется ряд основных требований [1, 2], которые в каждом конкретном случае дополняются частными, обусловленными свойствами дозируемого материала и регламентом технологического процесса. Синтез дозаторных систем представляет собой сложную инженерную задачу, требующую учета совокупности и взаимосвязи технологических, конструктивных и эргономических требований. Важным и необходимым этапом этого синтеза является формирование расчетных схем и математических моделей таких систем с учетом динамической взаимосвязи всех их элементов. В этом случае создание математической модели удобно

осуществлять в соответствии со структурнофункциональными схемами на основе предлагаемой обобщенной классификации систем дозирования (рис. 1-4) [3].

Таким образом, в соответствии с рис. 1 учитываются: характеристики дозируемой среды (тип и свойства дозируемого материала) (рис. 2); характеристики дозаторной системы (точность, степень автоматизации, область применения и т.д.) (рис. 3); характеристики конструкции дозаторной системы (конструктивное исполнение, вид привода исполнительного органа, реализацию управления и т.д.) (рис. 4).



Рис. 1. Обобщенная классификация дозаторных систем

Данная классификация обладает обобщенным и системным характером. В качестве примера на рис. 5 представлена структурнофункциональная схема системы дозирования с приводным электродвигателем в соответствии с принятой классификацией (рис. 1-4).

На рис. 5 питание от электросети (сеть ЭП) подается на электродвигатель (ЭД) и регулятор (Р). ЭД передает движение передаточному механизму (П), роль которого могут выполнять различные гидравлические, пневматические или механические устройства. (П) преобразует движение двигателя в требуемый вид движения исполнительного органа (ИО) системы дозирования. ИО из объема (V) реализует выбрасывание материала через дозатор (Д) во внешнюю среду (В.С.). Обратная связь регулятора (Р) с другими

Ханов Алмаз Муллаянович, доктор технических наук, профессор. E-mail: mtf-dekanat@pstu.ru, mtf@pstu.ru Кобитянский Алексей Ефимович, кандидат технических наук, профессор. E-mail: detali@pstu.ru Шафранов Алексей Владимирович, кандидат технических наук, доцент. E-mail: a_shafranov@mail.ru Петров Дмитрий Алексеевич, аспирант

элементами системы дозирования обеспечивается измерительными устройствами (контролерами). На основе приведенной структурнофункциональной схемы сформирована расчетная схема центробежного насоса-дозатора (рис. 6), представляющего собой электро-гидро-механическую систему.







Рис. 3. Классификация по характеристикам системы дозирования



Рис. 4. Классификация по характеристикам конструкции дозаторной системы



Рис. 5. Структурно-функциональная схема дозаторной системы



Рис. 6. Расчетная схема центробежного насоса-дозатора

Здесь ротор 2 электродвигателя 1 жестко связан с рабочим колесом 3, размещенным в корпусе 4 насосной секции с рабочей жидкостью. При включении двигателя кинетическая энергия вращающейся рабочей жидкости в диффузоре 8 трансформируется в энергию напора исполнительного гидроцилиндра и, действуя на поршень 5, приводит в движение плунжер 7 дозатора 6. Для обеспечения циркуляции рабочей жидкости в конструкции насосной секции, предусмотрены каналы 9, отводящие рабочую жидкость от гидроцилиндра к рабочему колесу. Дозатор 6 с установленными в нем всасывающими и нагнетательными клапанами выбрасывает определенное количество дозируемой среды в нагнетающую линию. При выключении двигателя происходит остановка рабочего колеса и падение давления рабочей жидкости в исполнительном гидроцилиндре, вследствие чего силы упругости пружины жесткостью C_{пр}, преодолевая силы трения, возвращают поршень в начальное положение. За счет создания разряжения в рабочей камере дозатора осуществляется забор дозируемой среды по всасывающей линии. Благодаря последовательным включению и выключению двигателя обеспечиваются чередующиеся ходы всасывания и нагнетания дозируемой среды.

На основе принципа составной модели [4, 5] в соответствии с рис. 6 формируется математическая модель дозирующей системы, учитывающая взаимосвязь двигателя, передаточного механизма, исполнительного органа и дозатора. Основные допущения: жидкость идеальна; количество лопаток рабочего колеса бесконечно; рассматривается плоский случай движения жидкости; инерционная составляющая среды не учитывается. Математическое описание представляет собой систему соотношений, структура которых состоит из блоков I-VII (рис. 7), связывающих между собой уравнения движения ротора электродвигателя [5], гидравлической составляющей движения рабочей и дозируемой жидкостей, а также механической составляющей [2, 6]:

I
II
III
IV
V
VI
VI

Рис. 7. Структура математической модели центробежного насоса-дозатора

I – характеризует уравнение движения ротора электродвигателя 2 с рабочим колесом 3 (рис. 6):

$$I\dot{\omega} = (M_0 - b\omega - M_c)u(t),$$

где *I* – момент инерции ротора электродвигателя с рабочим колесом; ω – угловая скорость ротора электродвигателя с рабочим колесом; M_0 – величина номинального крутящего момента электродвигателя; *b* – коэффициент крутизны статической характеристики; M_c – момент сопротивления на рабочем колесе; $u(t) = \begin{cases} 0, t_{выкл} \\ 1, t_{вкл} \end{cases}$ – функция

переключения, характеризующая включение и выключение двигателя.

II – соотношение описывающее процесс преобразования энергии в рабочем колесе в энергию движения рабочей среды на основе уравнения Эйлера:

$$p = \rho \omega \left(v R_2^2 - v_0 R_1 \right),$$

здесь p – теоретическое давление рабочей среды на выходе с рабочего колеса; $v_0(v)$ – скорость рабочей среды на входе (выходе) колеса; ρ – плотность рабочей среды; $R_1(R_2)$ – расстояние от центра колеса до вектора соответствующей скорости.

Блок **Ш** характеризует поведение рабочей среды в диффузоре 8 (рис. 6) уравнением Навье-Стокса:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \nabla^2 v_x$$
$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \nabla^2 v_y$$
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

где *x*, *y* – оси координат; *γ* – кинематическая вязкость рабочей среды.

В блоке **IV** динамика исполнительного гидроцилиндра описывается уравнениями поступательного движения поршня 5 (рис. 6) под действием сил давления, внешних нагрузок, сил трения и уравнениями напорного и сливного каналов:

$$m_{n}\ddot{x}_{n} = pF_{H} - p_{c}F_{c} - R_{rp}signv_{n} - (R + C_{np}x_{n})signv_{n}$$

$$\dot{x}_{n} = v_{n}, x_{n0} \le x_{n} \le L_{n}$$

$$R_{rp} = R_{rp}^{0} + k_{H}p + k_{c}p_{c}$$

$$\dot{p} = k_{ynpH}^{-1} \left[Q - F_{H}v_{n} - \delta f_{dp}(x) \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{c} - p_{dp})} \right]$$

$$\dot{p}_{c} = k_{ynpC}^{-1} \left[F_{c}v_{n} - \delta f_{dp}(x) \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{c} - p_{dp})} \right]$$

$$p_{cr} + \frac{\rho v_{or}^{2}}{2} + \rho gh + z = const$$

здесь $m_{\rm n}$ – приведенная к поршню гидроцилиндра масса подвижных частей; $F_{\rm H}$ ($F_{\rm c}$) – площадь напорного (сливного) канала гидроцилиндра; $R_{\rm rp}^0$ ($R_{\rm rp}$) – сила сухого трения в манжетных уплотнениях при отсутствии (наличии) давления; $k_{\rm H}$ ($k_{\rm c}$) – коэффициенты пропорциональности; R – результирующая сил сопротивления со стороны дозаторной части; $p_{\rm H}$ ($p_{\rm c}$) – давление в напорном (сливном) канале гидроцилиндра; $x_{\rm n}$ – перемещение поршня; v_{Π} – скорость поршня; $x_{\Pi 0}$ – начальное положение поршня; L_п – полный ход поршня; k_{ynpH} (k_{ynpC}) – коэффициент упругости рабочей среды в напорном (сливном) канале гидроцилиндра; δ – коэффициент расхода дросселя; $p_{\rm m}$ – давление на сливе за дросселем; $f_{\rm m}(x)$ площадь проходного сечения дросселя в функции перемещения поршня; Q_н – расход рабочей среды в напорный канал гидроцилиндра; vor скорость потока на входе в отводящий из гидроцилиндра канал; *h* – высота, на которой находится рассматриваемый элемент жидкости; $p_{\rm ct}$ – давление в точке пространства, где расположен центр массы рассматриваемого элемента жидкости; *g* – ускорение свободного падения.

Блок V определяет давление во всасывающей линии дозатора, описывая закон изменения весового давления в емкости дозируемой среды:

$$\dot{p}_{\delta a \kappa} = f(H); p_{\delta a \kappa} = \rho_{dc} g H$$

$$p_{bxoda} = p_{\delta a \kappa} + p_{nn} - \lambda_{bn} \frac{8\rho_{dc} L_{bn}}{\pi^2 d_{bn}^5} Q_{do3}$$

здесь $\lambda_{\rm вл}$ — коэффициент потерь давления по длине всасывающей линии; $\rho_{\rm дc}$ — плотность дозируемой среды; $Q_{\rm доз}$ — расход дозируемой среды в дозаторе; $d_{\rm вл}$, $L_{\rm вл}$ — диаметр и длина всасывающей линии; H — высота дозируемой среды в баке; $p_{\rm входа}$ ($p_{\rm бак}$) — давление дозируемой среды на входе в дозатор (в баке); $p_{\rm пл}$ — давление создаваемое плунжером дозатора.

Блок **VI** – система уравнений работы дозатора, учитывающая гидравлическую составляющую дозируемой среды и механическую составляющую поступательного движения плунжера в цилиндре рабочей камеры дозатора:

$$\begin{split} & \frac{\partial v_{\mathrm{A}c_x}}{\partial t} + v_{\mathrm{A}c_x} \frac{\partial v_{\mathrm{A}c_x}}{\partial x} + v_{\mathrm{A}c_y} \frac{\partial v_{\mathrm{A}c_x}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{A}c}} \frac{\partial p_{\mathrm{A}c}}{\partial x} + \gamma_{\mathrm{A}c} \nabla^2 v_{\mathrm{A}c_x} \\ & \frac{\partial v_{\mathrm{A}c_y}}{\partial t} + v_{\mathrm{A}c_y} \frac{\partial v_{\mathrm{A}c_y}}{\partial x} + v_{\mathrm{A}c_y} \frac{\partial v_{\mathrm{A}c_y}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{A}c}} \frac{\partial p_{\mathrm{A}c}}{\partial y} + \gamma_{\mathrm{A}c} \nabla^2 v_{\mathrm{A}c_y} \\ & \frac{\partial v_{\mathrm{A}c_y}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\mathrm{A}c_y}}{\partial y} = 0 \\ & \dot{v}_{\mathrm{K}} = m^{-1} \left[p_{\mathrm{B}\pi} F_{\mathrm{B}\pi} - p_{\mathrm{A}c} F_{\mathrm{A}c} - h_{\mathrm{T}p} v_{\mathrm{K}} - R_{\mathrm{T}p} \mathrm{sign}(v_{\mathrm{K}}) \right] \\ & \dot{y}_{\mathrm{K}} = v_{\mathrm{K}}; 0 \le y_{\mathrm{K}} \le L_{\mathrm{K}\pi} \\ & \dot{Q}_{\mathrm{A}03} = B \left[\left(f_{\mathrm{A}p} + \pi d_{\mathrm{III}} y_{\mathrm{K}} \sin \frac{\theta}{2} \right) \mu \mathrm{sign} \left(p_{\mathrm{A}c} - p_{\mathrm{B}\pi} \right) \sqrt{\frac{2 \left| p_{\mathrm{A}c} - p_{\mathrm{B}\pi} \right|}{\rho_{\mathrm{A}c}}} - Q_{\mathrm{A}03} \right] \right] \end{split}$$

нагнетание $p_i > p_j = p_{\text{среды}};$ всасывание $p_i < p_j = -p_{\text{бак}},$

где $v_{\rm nc}$ – скорость потока дозируемой среды в рабочей камере дозатора; удс – кинематическая вязкость дозируемой среды; v_к – скорость движения клапана дозатора; т – масса подвижной части клапана; $p_{\rm вл}$, $p_{\rm дc}$ – давление со сторон всасывающей и нагнетающей линии клапана; F_{вл}, *F*_{дс} – рабочая площадь элемента клапана со сторон напорной и сливной линии; $h_{\rm rp}$ – коэффициент вязкого трения; R_{тр} – сила трения элементов клапана дозатора; $Q_{\text{доз}}$ – расход рабочей жидкости в дозаторе; В – параметр, учитывающий инерционность столба жидкости; $f_{\rm дp}$ – площадь проходного сечения дросселя клапана; $d_{\rm m}$ – средний диаметр дросселирующей щели клапана; θ – угол конусности клапана; μ – коэффициент расхода.

Блок **VII** определяет давление в нагнетательной линии дозатора:

$$\frac{\partial v_{\mu c}}{\partial t} - \gamma_{\mu c} \left(\frac{\partial^2 v_{\mu c}}{\partial r_{\mu \pi}^2} + \frac{1}{r_{\mu \pi}} \frac{\partial v_{\mu c}}{\partial r_{\mu \pi}} \right) = -\frac{1}{\rho_{\mu c}} \frac{\partial \rho_{\mu \pi}}{\partial L_{\mu \pi}}$$

$$p_{\mu \pi} = p_{\mu \pi} - \lambda_{\mu \pi} \frac{8\rho_{\mu c} L_{\mu \pi}}{\pi^2 d_{\mu \pi}^{-5}} Q_{\mu \alpha 3}$$

$$\dot{v}_{\kappa} = m^{-1} \left[p_{\mu \pi} F_{\mu \pi} - p_{\mu c} F_{\mu c} - h_{\mu p} v_{\kappa} - R_{\mu p} \text{sign}(v_{\kappa}) - C_{\mu p 1}(y_{\kappa} - y_{0}) \right]$$

$$\dot{y}_{\kappa} = v_{\kappa}; 0 \le y_{\kappa} \le L_{\kappa \pi}$$

$$\dot{Q}_{\mu \alpha 3} = B \left[\left(f_{\mu p} + \pi d_{\mu \mu} y_{\kappa} \sin \frac{\theta}{2} \right) \mu \text{sign} \left(p_{\mu c} - p_{\mu \pi} \right) \sqrt{\frac{2|p_{\mu c} - p_{\mu \pi}|}{\rho_{\mu c}}} - Q_{\mu \alpha 3} \right]$$

где $r_{\rm H\pi}$ – радиус нагнетательной линии; $L_{\rm H\pi}$ – длина нагнетательной линии; $\lambda_{\rm H\pi}$ – коэффициент потерь давления по длине нагнетательной линии.

Начальными и граничными условиями каждого последующего блока являются результаты решения предыдущего, тем самым обеспечивая их взаимосвязь.

Выводы: математическая модель дозаторной системы, полученная на основе предложенной обобщенной классификации и структурнофункциональной схемы, позволяет проводить направленное исследование динамических процессов ее элементов и на основе этого перейти к синтезу таких систем, удовлетворяющих основным конструктивным и технологическим требованиям процесса дозирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

- 1. Соколов, М.В. Автоматическое дозирование жидких сред / М.В. Соколов, А.Л. Гуревич. – Л.: Химия, 1987. 398 с.
- Башта, Т.М. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы: Учебник для машиностроительных вузов / Т.М. Башта, С.С. Руднев, Б.Б. Некрасов и др. – 2-е изд., перераб. – М.: Машиностроение, 1982. 427 с.
- Ханов, А.М. Формирование структурно-функциональных схем дозаторных систем / А.М. Ханов, А.Е. Кобитянский, А.В. Шафранов, Д.А. Петров // Инновационные технологии в машиностроение: Материалы международной научно-практической конф., Пермь, 24-25 мая 2012 г. – Пермь, 2012. С. 118-124.
- Ашихмин, В.Н. Введение в математическое моделирование: учебное пособие / В.Н. Ашихмин и др.; под ред. П.В. Трусова. – М.: Логос, 2007. 439 с.
- Вейц, В.Л. Динамика и моделирование электромеханических приводов / В.Л. Вейц, Г.В. Царев. – Саранск: Изд-во Мордовского ун-та, 1992. 228 с.
- Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. 7-е изд. испр. – М.: Дрофа, 2003. 840 с.

MATHEMATICAL MODEL OF DISPENSING SYSTEM

© 2012 A.M. Khanov, A.E. Kobityanskiy, A.V. Shafranov, D.A. Petrov

Perm National Research Polytechnical University

The technique of creation the mathematical model of centrifugal pump-batcher on the basis of the offered generalized classification and structurally functional scheme is presented. The mathematical model provides possibility of assessment the influence of design and regime data of system on dynamic processes of its interdependent elements.

Key words: dispenser systems, mathematical model

Almaz Khanov, Doctor of Technical Sciences, Professor. E-mail: mtf-dekanat@pstu.ru, mtf@pstu.ru Aleksey Kobityanskiy, Candidate of Technical Sciences, Professor. E-mail: detali@pstu.ru Aleksey Shafranov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor. E-mail: a_shafranov@mail.ru Dmitriy Petrov, Post-graduate Student