УДК 518.63

СОХРАНЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В РЕОЛОГИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

© 2012 А.В. Колмогоров, Н.А. Протодьяконова

Институт физико-технических проблем Севера им. В.П. Ларионова СО РАН, Якутск

Поступила в редакцию 29.11.2012

В статье рассматривается и обобщается гипотеза о сохранении остаточных напряжений при фазовом переходе касательно грунтов. Получены соотношения, в которых учитывается наследственная ползучесть среды как до, так и после фазового перехода.

Ключевые слова: *ползучесть, фазовый переход, напряжения, уравнение релаксации*

Реологическое поведение мерзлых грунтов описывается моделями теории наследственной ползучести с различными временными ядрами [1, 2]. В теории консолидации водонасыщенных грунтов для учета реологических свойств скелета также применяются модели линейной наследственной ползучести [3, 4]. Данные модели описывают реологическое поведение различных сред при непрерывной истории деформирования. В случае же, когда в ходе деформирования в среде происходят фазовые переходы, и деформации на фронте фазового перехода терпят разрыв, необходимо учитывать влияние предыстории нагружения среды до фазового перехода. Для однородных сред с наследственной ползучестью, претерпевающих фазовый переход, была предложена гипотеза о сохранении остаточных напряжений при фазовом переходе, позволяющая учитывать влияние истории деформирования среды до фазового перехода [5]. Для задачи фильтрационной консолидации грунтов необходимо обобщить эту гипотезу на случай пористой среды с поровым заполнителем, претерпевающий фазовый переход первого рода.

Поведение водонасыщенной упруго-пористой среды в [6] описывается системой следующих линеаризованных уравнений:

- уравнения неразрывности жидкой фазы

$$\frac{\partial m}{\partial t}+\beta_2 m\frac{\partial p}{\partial t}+m_0\frac{\partial e_2}{\partial t}=0, \tag{1}$$

- уравнения неразрывности твердой фазы

$$\frac{\partial m}{\partial t}+\frac{\beta_1}{3}\frac{\partial \sigma^f}{\partial t}-\beta_1(1-m_0)\frac{\partial p}{\partial t}-(1-m_0)\frac{\partial e_1}{\partial t}=0, \tag{2}$$

- уравнений движения вязкой жидкости

$$\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x_i}+m_0\left(\frac{\partial w_i}{\partial t}-\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)=0, \tag{3}$$

- и уравнений равновесия твердой фазы

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_i}-\frac{\partial p}{\partial x_i}\delta_{ij}=0, \tag{4}$$

где u_i, w_i – компоненты перемещений соответственно твердой и жидкой фаз; m – пористость; e_1, e_2 – объемные деформации твердой и жидкой фаз; σ_{ij}^f – эффективные напряжения в пористой среде; p – поровое давление; σ_{ij} – полные напряжения, действующие на насыщенную пористую среду; β_1, β_2 – коэффициенты упругой сжимаемости твердой и жидкой фаз; μ – коэффициент вязкости жидкости; k – проницаемость среды.

Система уравнений (1) - (4) замыкается определяющими соотношениями, представляющими обобщение закона Гука для насыщенной упруго-пористой среды [7]:

$$\sigma_{ij}^f=2G(1-m_0)\varepsilon_{ij}+K(1-m_0)e_1\delta_{ij}+\varepsilon_0 p\delta_{ij}, \tag{5}$$

где $G(1-m_0)$, $K(1-m_0)$ – модули сдвига и объемной упругости пористой среды (скелета); $\varepsilon_0=\beta_1 K(1-m_0)$ – показатель сцементированности пористых горных пород. Заметим, что для мягких горных пород (сыпучие среды, грунты) $\varepsilon_0 \ll 1$, а для сильносцементированных горных пород (например, пористый базальт, бетон) $\varepsilon_0\approx 1$ [6]. Исключая из уравнений (1) - (2) производную пористости и используя соотношения (5), получим из (3) уравнение фильтрации, которое в одномерном случае будет иметь вид:

$$\left[\beta_1(1-m_0)+\beta_2 m_0-\beta_1\varepsilon_0\right]\frac{\partial p}{\partial t}+(1-\varepsilon_0)\frac{\partial e_1}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right), \tag{6}$$

Колмогоров Алексей Васильевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. E-mail: a.v.kolmogorov@iptpn.ysn.ru

Протодьяконова Надежда Анатольевна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник. E-mail: vassav72@mail.ru

Если воспользоваться предположением о пропорциональности объемной деформации скелета и порового давления, можно из (6) получить основное уравнение фильтрационной консолидации [3]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \qquad (7)$$

где c_v – коэффициент консолидации.

Для одномерного случая из (4) получим уравнение:

$$\left(K - \frac{2}{3}G\right)(1-m_0)\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} - (1-\varepsilon_0)\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad (8)$$

На внешней границе талой области $x=0$ должны учитываться следующие граничные условия:

- нагружения $P_0(t)=\sigma_{xx}$;
- дренажа, если оттаивание идет в условиях отсутствия дренирования, то задается условие непроницаемости $\partial p/\partial x=0$, а если свободного дренирования, то $p=0$;
- условие теплообмена в виде граничных условий 1-го или 3-го рода для уравнения теплопроводности.

Кроме того на подвижной границе $x=\xi(t)$, где происходит фазовый переход, задаётся условие из закона сохранения массы [8]:

$$m_0\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{d\xi(t)}{dt} = [v]_-^+, \qquad (9)$$

где ρ_1, ρ_2 –плотность льда и воды; v^+,v^- - значения скорости талого и мерзлого грунта на фронте фазового перехода.

В случае, когда пористая среда обладает ползучестью, вместо модулей сдвига и объемной упругости для скелета будут фигурировать соответствующие интегральные операторы и уравнение (5) можно представить в интегральном виде:

$$s_{ij}^f(t) = 2G_0^{(2)}(1-m_0)\gamma_{ij}^{(2)}(t) - \int_0^t R_s^{(2)}(t-\tau)\gamma_{ij}^{(2)}(\tau)d\tau$$
$$\sigma^f(t) = 3K_0^{(2)}(1-m_0)\left[e_1^{(2)}(t) + \frac{\beta_1}{3}p(t)\right] - \int_0^t R_v^{(2)}(t-\tau)\left[e_1^{(2)}(\tau) + \frac{\beta_1}{3}p(\tau)\right]d\tau \qquad (10)$$

где s_{ij}^f,$\gamma_{ij}^{(2)}$ – девиаторы, а σ_f, $e_1^{(2)}$ – шаровые составляющие тензоров эффективных напряжений и деформаций скелета; $R_s^{(2)}(t)$, $R_v^{(2)}(t)$ – ядра интегральных уравнений релаксации [4]. В случае, когда ползучесть скелета описывается вязкоупругими моделями, ядра интегральных уравнений релаксации $R_s^{(2)}(t)$ и $R_v^{(2)}(t)$ представляют собой экспоненты с различными временами релаксации.

Рассмотрим соотношения, определяющие реологическое поведение сред при фазовом переходе льда в воду в порах [2]. Допустим, что реологическое поведение мерзлого грунта описывается линейным интегральным уравнением наследственной ползучести [1]. Уравнения релаксации для шаровых составляющих и девиаторов тензора напряжений будут иметь вид:

$$\sigma^{(1)}(t) = 3K_0^{(1)}e^{(1)}(t) - \int_0^t R_v^{(1)}(t-\tau)e^{(1)}(\tau)d\tau$$
$$s_{ij}^{(1)}(t) = 2G_0^{(1)}\gamma_{ij}^{(1)}(t) - \int_0^t R_s^{(1)}(t-\tau)\gamma_{ij}^{(1)}(\tau)d\tau \qquad (11)$$

где $K_0^{(1)}$, $G_0^{(1)}$ – модули мгновенной упругости, $R_v^{(1)}$, $R_s^{(1)}$ – ядра релаксации, соответственно для объемных и сдвиговых напряжений мерзлого грунта.

Обобщим гипотезу о сохранении остаточных напряжений в наследственно ползучих средах при фазовых переходах [5] на случай, когда мерзлый грунт рассматривается как однофазная среда, а талый грунт представляет двухфазную среду. Пусть в момент времени $t=\theta$ в точке $x=\xi(\theta)$ среда претерпевает фазовый переход (1→2). К этому моменту напряжения в среде в мерзлом состоянии (1) имеют значения:

$$\sigma^{(1)}(\theta) = 3K_0^{(1)}e^{(1)}(\theta) - \int_0^\theta R_v^{(1)}(\theta-\tau)e^{(1)}(\tau)d\tau$$
$$s_{ij}^{(1)}(\theta) = 2G_0^{(1)}\gamma_{ij}^{(1)}(\theta) - \int_0^\theta R_s^{(1)}(\theta-\tau)\gamma_{ij}^{(1)}(\tau)d\tau$$

Остаточные напряжения при этом задаются выражениями:

$$\sigma_{ocm}^{(1)}(\theta) = -\int_0^\theta R_v^{(1)}(\theta-\tau)e^{(1)}(\tau)d\tau$$
$$s_{ij(ocm)}^{(1)}(\theta) = -\int_0^\theta R_s^{(1)}(\theta-\tau)\gamma_{ij}^{(1)}(\tau)d\tau \qquad (12)$$

В талом состоянии грунта полные напряжения задаются уравнениями:

$$\sigma^{(2)}(t)=3K_0^{(2)}(1-m_0)e_1^{(2)}(t)-(1-\varepsilon_0)p(t)-\int_0^t R_v^{(2)}(t-\tau)\left[e_1^{(2)}(\tau)+\frac{\beta_1}{3}p(\tau)\right]d\tau$$
$$s_{ij}^{(2)}(t)=2G_0^{(2)}(1-m_0)\gamma_{ij}^{(2)}(t)-\int_0^t R_s^{(2)}(t-\tau)\gamma_{ij}^{(2)}(\tau)d\tau$$

Исключая мгновенно-упругие составляющие имеем для остаточных напряжений:

$$\sigma_{ocm}^{(2)}(t)=-\int_0^t R_v^{(2)}(t-\tau)\left[e_1^{(2)}(\tau)+\frac{\beta_1}{3}p(\tau)\right]d\tau$$
$$s_{ij(ocm)}^{(2)}(t)=-\int_0^t R_s^{(2)}(t-\tau)\gamma_{ij}^{(2)}(\tau)d\tau \qquad (13)$$

в талом грунте при оттаивании объемные деформации состоят из двух составляющих:

$$e_{1f(ocm)}^{(2)}(t_1)=e_1^{(2)}(t_1)-e_1^{(\Delta)}(t_1) \qquad (14)$$

где $e_{1f(ocm)}^{(2)}$ - полная деформация талого грунта в момент фазового перехода $t=t_1$, $e_1^{(\Delta)}(t_1)$- объемная деформация из-за изменения плотности фаз.

Учитывая основное положение гипотезы, что при фазовом переходе сохраняются значения остаточных напряжений, определим значения деформаций для среды (2), допуская, что она с самого начала деформирования находилась в талом состоянии и к моменту времени $t=\theta$ имела остаточные напряжения равные:

$$\sigma_{ocm}^{(2)}(\theta)=-\int_0^\theta R_v^{(2)}(\theta-\tau)\left[e_1^{*(2)}(\tau)+\frac{\beta_1}{3}p^*(\tau)\right]d\tau$$
$$s_{ij(ocm)}^{(2)}(\theta)=-\int_0^\theta R_s^{(2)}(\theta-\tau)\gamma_{ij}^{*(2)}(\tau)d\tau$$

Отсюда, приравнивая подынтегральные выражения для остаточных напряжений, получим соотношение:

$$e_1^{*(2)}(\tau)+\frac{\beta_1}{3}p^*(\tau)=\frac{R_v^{(1)}(\theta-\tau)}{R_v^{(2)}(\theta-\tau)}e_1^{(1)}(\tau)$$
$$\gamma_{ij}^{*(2)}(\theta)=\frac{R_s^{(1)}(\theta-\tau)}{R_s^{(2)}(\theta-\tau)}\gamma_{ij}^{(1)}(\tau) \qquad (15)$$

Таким образом, определяющие уравнения для талого грунта будем иметь в виде:

$$\sigma^{(2)}(t)=3K_0^{(2)}(1-m_0)e_1^{(2)}(t)-(1-\varepsilon_0)p(t)-\int_0^\theta \frac{R_v^{(1)}(\theta-\tau)}{R_v^{(2)}(\theta-\tau)}R_v^{(2)}(t-\tau)e_1^{(1)}(\tau)d\tau-$$
$$-\int_\theta^t R_v^{(2)}(t-\tau)\left[e_1^{(2)}(\tau)+\frac{\beta_1}{3}p(\tau)\right]d\tau$$
$$s_{ij}^{(2)}(t)=2G_0^{(2)}(1-m_0)\gamma_{ij}^{(2)}(t)-\int_0^\theta R_s^{(2)}(t-\tau)\frac{R_s^{(1)}(\theta-\tau)}{R_s^{(2)}(\theta-\tau)}\gamma_{ij}^{(1)}(\tau)d\tau-$$
$$-\int_\theta^t R_s^{(2)}(t-\tau)\gamma_{ij}^{(2)}(\tau)d\tau \qquad (16)$$

Соотношения (11) - (16) учитывают наследственную ползучесть среды как до, так и после фазового перехода, причем вторые слагаемые в уравнении (16) учитывают эффект влияния на релаксацию напряжения в среде предыстории деформирования до фазового превращения порового флюида. В случае, когда пористая среда и мерзлый грунт вязкоупругие, то все ядра релаксации $R_v^{(1)}$, $R_s^{(1)}$, $R_v^{(2)}$, $R_s^{(2)}$ являются экспоненциальными функциями от времени. Например, если поведение мерзлого грунта пористой среды (скелета талого грунта) при одноосном растяжении (сжатии) описывается линейной вязкоупругой моделью Максвелла, ядра релаксации имеют вид:

$$R_1^{(1)}(t)=\frac{E_0^{(1)}}{\tau_0^{(1)}}e^{-\frac{t}{\tau_0^{(1)}}} \qquad (17)$$
$$R_1^{(2)}(t)=\frac{E_0^{(2)}}{\tau_0^{(2)}}e^{-\frac{t}{\tau_0^{(2)}}} \qquad (18)$$

где $\tau_0^{(1)}$, $\tau_0^{(2)}$ – время релаксации мерзлого грунта и пористой среды при одномерном нагружении.

Для простоты будем полагать, что коэффициенты Пуассона для пористой среды $\nu^{(2)}$ и мерзлого грунта $\nu^{(1)}$ постоянные величины. Тогда упругие модули и ядра релаксации на сдвиг $R_s^{(i)}(t)$, растяжение $R_1^{(i)}(t)$ и объемной деформации $R_v^{(i)}(t)$ являются подобными:

$$R_v^{(1)}(t)=R_s^{(i)}(t)n_0^{(i)},\ R_s^{(i)}(t)=R_1^{(i)}(t)n_1^{(i)},\ R_v^{(i)}(t)=R_1^{(i)}(t)n_2^{(i)},$$
$$3K_0^{(i)}=2G_0^{(i)}n_0^{(i)},\ 2G_0^{(i)}=E_0^{(i)}n_1^{(i)},\ 3K_0^{(i)}=E_0^{(i)}n_2^{(i)}, \qquad (19)$$

где $n_0^{(i)}=\frac{1+v^{(i)}}{1-2v^{(i)}}$, $n_1^{(i)}=\frac{1}{1+v^{(i)}}$, $n_2^{(i)}=\frac{1}{1-2v^{(i)}}$ - постоянные величины как в мерзлом (i=1), так и в талом (i=2) состоянии грунта. В этом случае уравнение релаксации для среды, претерпевающей фазовый переход 1$\to$2 (15) и (16) можно записать в виде:

$$\sigma^{(2)}(t)=E_0^{(2)}n_2^{(2)}(1-m_0)e_1^{(2)}(t)-(1-\varepsilon_0)p(t)-$$
$$-\int_0^\theta \frac{E_0^{(1)}}{\tau_0^{(1)}}n_2^{(1)}e^{-\frac{t-\tau}{\tau_0^{(2)}}}\left[e^{-\left(\frac{1}{\tau_0^{(1)}}-\frac{1}{\tau_0^{(2)}}\right)(\theta-\tau)}\right]e_1^{(1)}(\tau)d\tau-\int_\theta^t \frac{E_0^{(2)}}{\tau_0^{(2)}}n_2^{(2)}e^{-\frac{t-\tau}{\tau_0^{(2)}}}\left[e^{(2)}(\tau)+\frac{\beta_1}{3}p(\tau)\right]d\tau \qquad (20)$$

$$s_{ij}^{(2)}(t)=E_0^{(2)}n_1^{(2)}(1-m_0)\gamma_{ij}^{(2)}(t)-\int_0^\theta \frac{E_0^{(1)}}{\tau_0^{(1)}}n_1^{(1)}\left|e^{-\left(\frac{1}{\tau_0^{(1)}}-\frac{1}{\tau_0^{(2)}}\right)(\theta-\tau)}\right|\gamma_{ij}^{(1)}(\tau)d\tau-$$
$$-\int_\theta^t \frac{E_0^{(2)}}{\tau_0^{(2)}}n_1^{(2)}e^{-\frac{t-\tau}{\tau_0^{(2)}}}\gamma_{ij}^{(2)}(\tau)d\tau \qquad (21)$$

При известных постоянных значениях коэффициентов Пуассона параметры вязкоупругих моделей определяются из экспериментов на релаксацию напряжений при одноосном нагружении сухой пористой среды и мерзлого грунта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Вялов, С.С.* Реология мерзлых грунтов. – М.: Изд-во АН СССР,1963. С. 5-54.
2. *Андерсленд, О.* Механические свойства мерзлых грунтов / *О. Андерсленд, Ф. Сейлс, Б. Ладаний* // Геотехнические вопросы освоения Севера. – М.: Недра, 1983. С. 217-271.
3. Никсон, Дж. Консолидация при оттаивании / *Дж. Никсон, Б. Ладаний* // Геотехнические вопросы освоения Севера. – М.: Недра, 1983. С. 166-216.
4. *Зарецкий, Ю.К.* Теория консолидации грунтов. – М.: Наука, 1967. 270 с.
5. *Дубина, М.М.* Тепловое и механическое взаимодействие инженерных сооружений с мерзлыми грунтами / *М.М. Дубина, Б.А. Красовицкий, А.С. Лозовский, Ф.С. Попов.* – Новосибирск: Наука, 1977. 141 с.
6. *Николаевский, В.Н.* Геомеханика и флюидодинамика. – М.: Недра, 1996. 447 с.
7. *Николаевский, В.Н.* Механика насыщенных пористых сред / *В.Н. Николаевский, К.С. Басниев, А.Т. Горбунов, Г.А. Зотов.* – М.: Недра,1970. 339 с.
8. *Васильев, В.И.* Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах / *В.И. Васильев, А.М. Максимов, Е.Е. Петров, Г.Г. Цыпкин.* – М.: Наука, 1997. 224 с.

SAVING THE RESIDUAL STRESSES ON BORDER OF PHASE TRANSITION IN THE RHEOLOGICAL MEDIUM

 A.V. Kolmogorov, N.A. Protodyakonova

Institute of Physical and Technical Problems of the North named after V.P. Larionov
SB RAS, Yakutsk

In article the hypothesis of saving the residual stresses at phase transition concerning soils is considered and generalized. Are received ratios in which hereditary creep of the medium both to and after phase transition are considered.

Key words: *creep, phase transition, stress, relaxation equation*

Aleksey Kolmogorov, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Research Fellow. E-mail: a.v.kolmogorov@iptpn.ysn.ru; Nadezhda Protodyakonova, Candidate of Physics and Mathematics, Research Fellow. E-mail: vassav72@mail.ru