

АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ АППРОКСИМАЦИИ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ

©2012 С.А. Прохоров, Я.В. Соловьева

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 25.05.2012

Проведен анализ методических погрешностей оценки параметров ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик в ортогональном базисе Бесселя: коэффициентов разложения моделей корреляционных функций (КФ), аппроксимации КФ, оценки спектра по параметрам аппроксимирующего выражения КФ, оценки корреляционно-спектральных характеристик.

Ключевые слова: погрешность, спектр, корреляционная функция, аппроксимация.

1. ПОГРЕШНОСТЬ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ В БАЗИСЕ БЕССЕЛЯ

Представим ортогональную модель нормированной корреляционной функции (НКФ)

$\rho_x(\tau)$ в виде [1]:

$$\rho_a(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot J_{\nu,k}(\tau, \gamma), \quad (1)$$

где $J_{\nu,k}(\tau, \gamma)$ – ортогональные функции Бесселя первого рода ν – го порядка с параметром масштаба ортогональной функции γ , k – порядок корня.

$$J_{\nu,k}(\tau, \gamma) = J_{\nu} \left[\lambda_k^{(\nu)} \cdot (1 - e^{-2\gamma\tau}) \right] \cdot e^{-\gamma\tau}. \quad (2)$$

Норма ортогональных функций Бесселя определяется из выражения:

$$\int_0^{\infty} (J_{\nu,k}(\tau, \gamma) \cdot e^{-\gamma\tau}) \cdot (J_{\nu,n}(\tau, \gamma) \cdot e^{-\gamma\tau}) \cdot (1 - e^{-2\gamma\tau}) d\tau = \begin{cases} \frac{J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)})}{4 \cdot \gamma}, & k = n; \\ 0, & k \neq n. \end{cases} \quad (3)$$

где $\mu(\tau, \gamma) = (1 - e^{-2\gamma\tau})$ – весовая функция ортогональной функции Бесселя.

На практике вместо определения коэффициентов разложения ортогональной модели в соответствии с выражением [2]:

$$\beta_k = \frac{4 \cdot \gamma}{J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)})} \cdot \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \cdot J_{\nu,k}(\tau, \gamma) \cdot (1 - e^{-2\gamma\tau}) d\tau \quad (4)$$

как правило, приходится ограничиваться конечным интервалом наблюдения корреляционной функции:

$$\hat{\beta}_k^{(1)} = \frac{4 \cdot \gamma}{J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)})} \int_0^{\tau_{k \max}} K_x(\tau) \cdot J_{\nu,k}(\tau, \gamma) \cdot (1 - e^{-2\gamma\tau}) d\tau, \quad (5)$$

где $\tau_{k \max}$ – максимальный интервал корреляции;

При этом появляется дополнительная составляющая методической погрешности, вызванная конечным верхним пределом интегрирования:

$$\Delta_{\beta_k}^{(1)} = \hat{\beta}_k^{(1)} - \beta_k = \frac{4 \cdot \gamma}{J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)})} \int_{\tau_{k \max}}^{\infty} K_x(\tau) \cdot J_{\nu,k}(\tau, \gamma) \cdot (1 - e^{-2\gamma\tau}) d\tau. \quad (6)$$

Необходимо отметить, что $\lim_{\tau_{k \max} \rightarrow \infty} \Delta_{\beta_k}^{(1)} = 0$.

Специфика проведения аппроксимативного корреляционного анализа с помощью ЭВМ заключается в выборе численного метода для вычисления интеграла, «дискретизации» уравнений для оценки параметра масштаба γ .

Обозначим оператор численного интегрирования $\Phi\{\}$. Тогда оценка коэффициента разложения, вызванная дискретизацией КФ и необходимостью численного интегрирования примет вид:

$$\hat{\beta}_k^{(2)} = \Phi \{ \rho_x(\Delta\tau \cdot i) \cdot J_{\nu,k}(\Delta\tau \cdot i, \gamma), J_{\max} \}. \quad (7)$$

Прохоров Сергей Антонович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных систем и технологий. E-mail: sp@smr.ru.
Соловьева Яна Владимировна, аспирант, ассистент кафедры информационных систем и технологий. E-mail: yanka58@yandex.ru

где $\Delta\tau$ – интервал дискретизации корреляционной функции,

$$J_{\max} = \text{ent} \left[\frac{\tau_{k\max}}{\Delta\tau} \right], \text{ а } i = 1, \dots, J_{\max}.$$

В этом случае составляющая методической погрешности, вызванная дискретизацией КФ и необходимостью численного интегрирования, равна

$$\Delta_{\beta_k}^{(2)} = \hat{\beta}_k^{(2)} - \hat{\beta}_k^{(1)}. \quad (8)$$

В связи с конечностью выборки значений КФ выражение для оценки коэффициента разложения представим в виде:

$$\hat{\beta}_k^{(3)} = \Phi\{\hat{\rho}_x(\Delta\tau \cdot i) \cdot J_{v,k}(\Delta\tau \cdot i, \gamma), \tau_{k\max}, N\}, \quad (9)$$

где N – объем выборки.

Следовательно, составляющая методической погрешности, вызванная конечностью объема выборки, равна

$$\Delta_{\beta_k}^{(3)} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \hat{\beta}_k^{(2)}. \quad (10)$$

Отметим, что для получения достоверных оценок (статистическая погрешность равна 0,02-0,05) количество отсчетов соответственно равно $N=5000-2000$.

Следующая составляющая методической погрешности вызвана необходимостью дискретизации уравнения и применения численных методов для оценки параметра масштаба γ . Выражение для оценки коэффициента разложения в этом случае примет вид:

$$\hat{\beta}_k^{(4)} = \Phi\{\hat{\rho}_x(\Delta\tau \cdot i) \cdot J_{v,k}(\Delta\tau \cdot i, \hat{\gamma}), \tau_{k\max}, N\}. \quad (11)$$

Составляющая методической погрешности, вызванная заменой параметра масштаба γ его оценкой $\hat{\gamma}$, будет равна:

$$\Delta_{\gamma}^{(4)} = \hat{\beta}_k^{(4)} - \hat{\beta}_k^{(3)}. \quad (12)$$

Перечисленные составляющие методической погрешности образуют полную группу погрешностей. Следовательно, методическая погрешность вычисления коэффициентов разложения определяется как:

$$\Delta_{\beta_k} = \Delta_{\beta_k}^{(1)} + \Delta_{\beta_k}^{(2)} + \Delta_{\beta_k}^{(3)} + \Delta_{\gamma}^{(4)} = \hat{\beta}_k^{(4)} - \hat{\beta}_k. \quad (13)$$

Конечность интервала интегрирования (интервала корреляции КФ) и применение численных методов интегрирования будут вносить в результирующую погрешность систематическую составляющую, а ограниченность выборки для определения значений КФ и оценки параметра масштаба $\hat{\gamma}$ – случайную составляющую. Следовательно, составляющие погрешности $\Delta_{\beta_k}^{(1)}, \Delta_{\beta_k}^{(2)}$ можно определить, например, с помощью математического пакета MathCAD, а $\Delta_{\beta_k}^{(3)}, \Delta_{\gamma}^{(4)}$ – методом имитационного моделирования, который реализован в системе.

Покажем это на примере.

На рис. 1 приведены результаты оценки коэффициентов разложения, полученные при по-

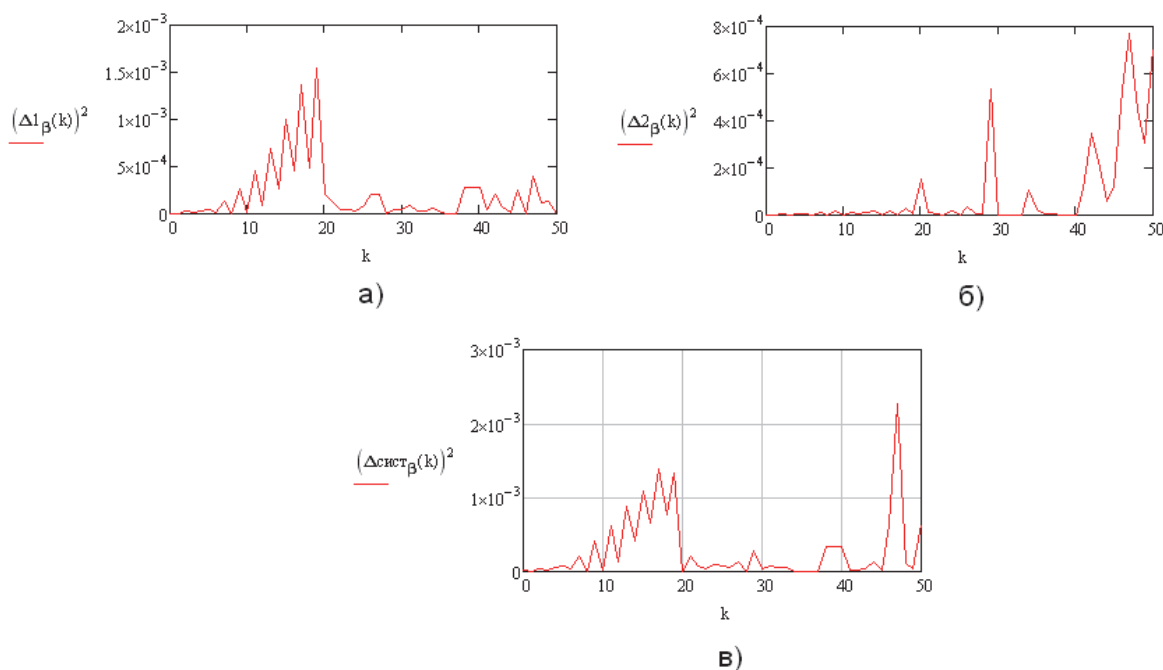


Рис. 1. Результаты оценки коэффициентов разложения, полученные при помощи пакета MathCAD: а – дополнительная составляющая методической погрешности, вызванная конечным верхним пределом интегрирования, б – составляющая методической погрешности, вызванная дискретизацией КФ и необходимостью численного интегрирования (метод Симпсона), в – методическая погрешность вычисления коэффициентов разложения β_k

мощи пакета MathCAD, со следующими исходными данными:

- $\rho(\tau) = \exp(-\lambda \cdot \tau) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau)$ с отношением $\omega_0 / \lambda = 5 / 1$, $\Delta \tau = 0,0816$ и числом ординат $Nx = 37$, объемом выборки $N = 5000$;
- диапазон порядка коэффициента $k = 0..m$, $m = 50$;
- параметр масштаба ортогональных функций Бесселя первого рода 0-го порядка $\gamma = 0,096$.

На рис. 1:

а) $\Delta 1_{\beta}(k) = \hat{\beta}_k^{(1)} - \beta_k$;

б) $\Delta 2_{\beta}(k) = \hat{\beta}_k^{(2)} - \hat{\beta}_k^{(1)}$, метод интегрирования – Симпсона;

в) $\Delta_{сист_{\beta}}(k) = \Delta 1_{\beta}(k) + \Delta 2_{\beta}(k) = \hat{\beta}_k^{(2)} - \beta_k$.

Из рис. 1 видно, что при дальнейшем увеличении числа членов ряда значение погрешности, обусловленной конечностью интервала интегрирования, уменьшается, однако погрешность, обусловленная применением численных методов интегрирования, напротив, растет с увеличением порядка k , следовательно, как и систематичес-

кая составляющая методической погрешности оценки коэффициента разложения.

На рис. 2 приведен результат оценки составляющей методической погрешности, вызванной конечностью объема выборки, т.е.

$d(ran) = \Delta_{\beta_k}^{(3)} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \hat{\beta}_k^{(2)}$, полученный методом имитационного моделирования с помощью автоматизированной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа случайных процессов в ортогональном базисе Бесселя (АИС «АКС Бессель»).

Необходимо отметить, что погрешность определения коэффициентов разложения Δ_{β_k} возрастает с увеличением порядка k и является случайной величиной, распределенной по нормальному закону.

2. ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ

Запишем погрешность аппроксимации КФ в виде:

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[K_x(\tau) - \sigma_x^2 \cdot \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k \cdot J_{\nu,k}(\tau, \hat{\gamma}) \right]^2 \times (14) \\ \times (1 - e^{-2\hat{\gamma}\tau}) d\tau \rightarrow \min$$

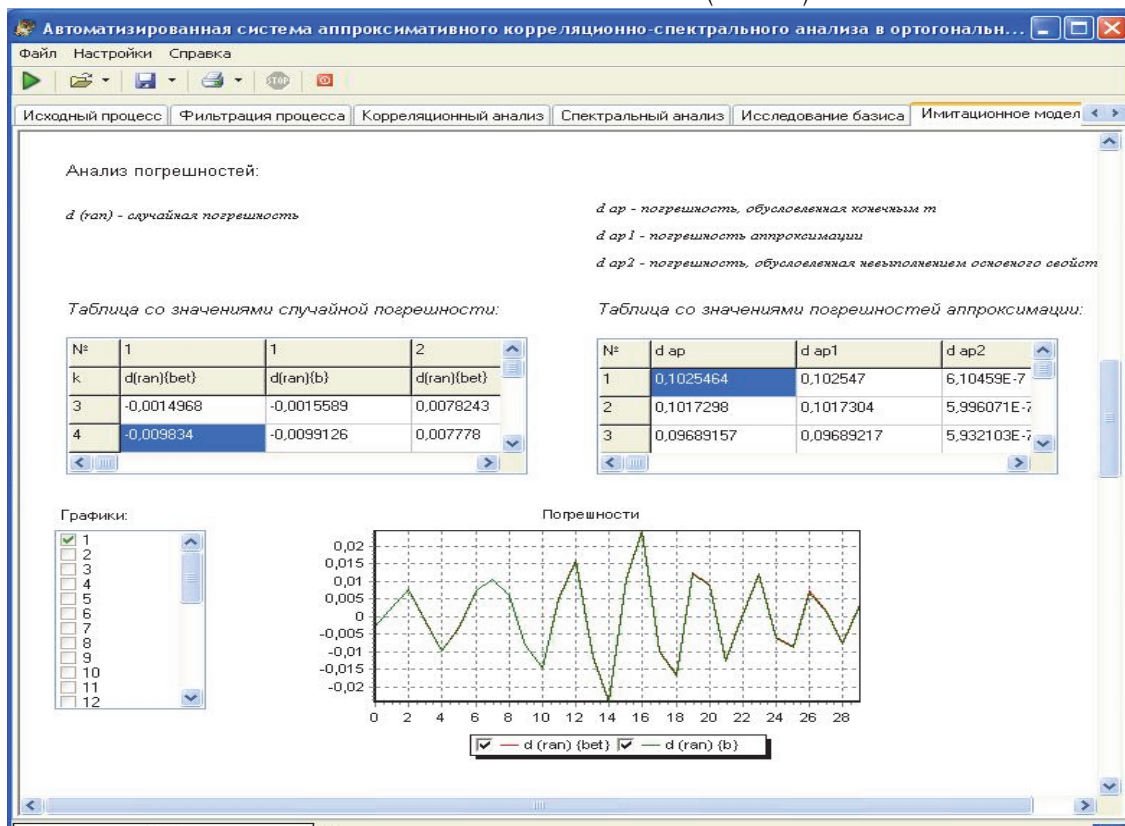


Рис. 2. Результат оценки составляющей методической погрешности, вызванной конечностью объема выборки методом имитационного моделирования с помощью автоматизированной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа случайных процессов в ортогональном базисе Бесселя

где $\hat{\beta}_k$ – оценка коэффициента ,

$\hat{\gamma}$ – оценка параметра масштаба .

Используя формулу (3), перепишем выражение (14) в виде:

$$\Delta = \int_0^\infty K_x^2(\tau) \cdot (1 - e^{-2\hat{\gamma}\tau}) d\tau - \frac{\sigma_x^4}{2 \cdot \hat{\gamma}} \cdot \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k \cdot \beta_k \cdot J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)}) + \frac{\sigma_x^4}{4 \cdot \hat{\gamma}} \cdot \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k^2 \cdot J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)}) \quad (15)$$

Данное выражение является функцией случайных оценок коэффициентов разложения $\hat{\beta}_k$. Считая отклонение оценок от коэффициентов разложения малыми, разложим выражение в ряд Тейлора относительно $\hat{\beta}_k$ в окрестности β_k , ограничившись квадратичными членами:

$$\Delta = \int_0^\infty K_x^2(\tau) \cdot (1 - e^{-2\hat{\gamma}\tau}) d\tau - \frac{\sigma_x^4}{4 \cdot \hat{\gamma}} \cdot \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k^2 \cdot J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)}) + \frac{\sigma_x^4}{4 \cdot \hat{\gamma}} \cdot \sum_{k=0}^m (\hat{\beta}_k - \beta_k)^2 \cdot J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)}) \quad (16)$$

В общем случае оценка коэффициентов разложения $\hat{\beta}_k$ смещена, поэтому

$$\hat{\beta}_k = \beta_k + \overset{\circ}{\beta}_k + \Delta_{cm,k} \quad (17)$$

С учетом того, что

$$\Delta_{\min} = \int_0^\infty K_x^2(\tau) \cdot (1 - e^{-2\hat{\gamma}\tau}) d\tau - \frac{\sigma_x^4}{4 \cdot \hat{\gamma}} \cdot \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \cdot J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)}), \quad (18)$$

погрешность аппроксимации приведем к виду:

$$\Delta = \Delta_{\min} + \Delta_m,$$

где $\Delta_m = \frac{\sigma_x^4}{4 \cdot \hat{\gamma}} \cdot \sum_{k=0}^m \left(\overset{\circ}{\beta}_k + \Delta_{cm,k} \right)^2 \cdot J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)})$.

Математическое ожидание погрешности аппроксимации равно:

$$M[\Delta] = \Delta_{\min} + M[\Delta_m] = \Delta_{\min} + \frac{\sigma_x^4}{4 \cdot \hat{\gamma}} \cdot \sum_{k=0}^m \left(\sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2 \right) \cdot J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)}) \quad (19)$$

Видно, что математическое ожидание погрешности аппроксимации, кроме минимальной погрешности, содержит вторую составляющую, численное значение которой линейно зависит от погрешности оценки коэффициентов разложения и увеличивается с увеличением числа членов разложения ряда m . Следует отметить, что в общем случае с увеличением числа членов разложения ряда Δ_{\min} уменьшается. Следовательно, существует минимум погрешности по m . Далее покажем это на примере (см. рис. 3).

Выполнив все необходимые преобразования, получим дисперсию погрешности аппроксимации:

$$\sigma_\Delta^2 = \frac{\sigma_x^8}{16 \cdot \hat{\gamma}^2} \cdot \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)}) \cdot J_{\nu+1}^2(\lambda_n^{(\nu)}) \cdot M \left[\overset{\circ}{\zeta}_k \cdot \overset{\circ}{\zeta}_n \right] = \frac{\sigma_x^8}{16 \cdot \hat{\gamma}^2} \cdot \sum_{k=0}^m J_{\nu+1}^4(\lambda_k^{(\nu)}) \cdot \sigma_{\zeta k}^2 + \frac{\sigma_x^8}{8 \cdot \hat{\gamma}^2} \cdot \sum_{k \neq n}^m J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)}) \cdot J_{\nu+1}^2(\lambda_n^{(\nu)}) \cdot K_{\zeta,k,n},$$

где $\overset{\circ}{\zeta}_k = \left(\overset{\circ}{\beta}_k + \Delta_{cm,k} \right)^2 - \left(\sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2 \right)$, а $\sigma_{\zeta k}^2$ и $K_{\zeta,k,n}$ – дисперсия и корреляционный момент случайной величины $\overset{\circ}{\zeta}$.

При условии некоррелированности $\overset{\circ}{\zeta}_k, \overset{\circ}{\zeta}_n$ ($K_{\zeta,k,n} = 0$) получим:

$$\sigma_\Delta^2 = \frac{\sigma_x^8}{16 \cdot \hat{\gamma}^2} \cdot \sum_{k=0}^m J_{\nu+1}^4(\lambda_k^{(\nu)}) \cdot \sigma_{\zeta k}^2 \quad (20)$$

Оценим $\sigma_{\zeta k}^2$. Закон распределения $\overset{\circ}{\beta}_k$, так как выполняются условия теоремы Ляпунова, можно считать нормальным. Тогда

$$\sigma_{\zeta k}^2 = M \left\{ \left[\left(\overset{\circ}{\beta}_k + \Delta_{cm,k} \right)^2 - \left(\sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2 \right) \right]^2 \right\} = 2 \cdot \sigma_k^4 + 4 \cdot \sigma_k^2 \cdot \Delta_{cm,k}^2$$

Окончательно получим:

$$\sigma_\Delta^2 = \frac{\sigma_x^8}{8 \cdot \hat{\gamma}^2} \cdot \sum_{k=0}^m J_{\nu+1}^4(\lambda_k^{(\nu)}) \cdot \sigma_k^2 \cdot \left(\sigma_k^2 + 2 \cdot \Delta_{cm,k}^2 \right) \quad (21)$$

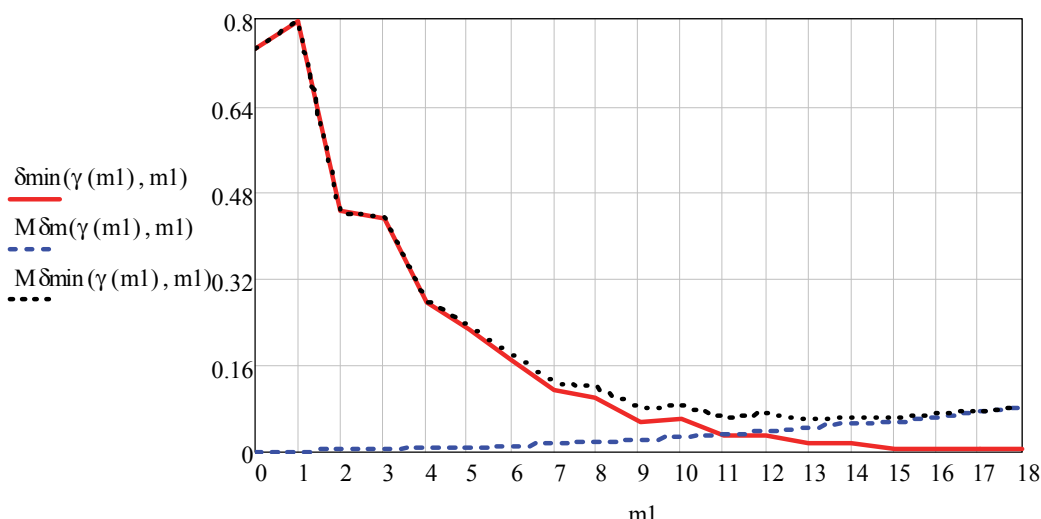


Рис. 3. Квадратические погрешности приближения при оценке коэффициентов разложения, полученные при помощи пакета MathCAD

Из данного выражения следует, что дисперсия погрешности аппроксимации растет с увеличением числа членов разложения ряда m , а её численное значение зависит от дисперсии и погрешности от смещенности оценки коэффициентов разложения ряда.

На практике, как правило, оценивают относительную погрешность аппроксимации:

$$\delta = \frac{\Delta}{\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) \cdot (1 - e^{-2\gamma\tau}) d\tau} = \delta_{\min} + \delta_m, \quad (22)$$

где $\delta_m = \frac{\sum_{k=0}^m (\beta_k + \Delta_{cm,k})^2 \cdot J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)})}{4 \cdot \gamma \cdot \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) \cdot (1 - e^{-2\gamma\tau}) d\tau}$,

а $\delta_{\min} = 1 - \frac{\sum_{k=0}^m \beta_k^2 \cdot J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)})}{4 \cdot \gamma \cdot \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) \cdot (1 - e^{-2\gamma\tau}) d\tau}$.

$$\sigma_{\delta}^2 = \frac{\sigma_{\Delta}^2}{\left[\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) \cdot (1 - e^{-2\gamma\tau}) d\tau \right]^2} = \frac{1}{8 \gamma^2 \cdot \left[\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) \cdot (1 - e^{-2\gamma\tau}) d\tau \right]^2} \cdot \sum_{k=0}^m J_{\nu+1}^4(\lambda_k^{(\nu)}) \cdot \sigma_k^2 \cdot (\sigma_k^2 + 2 \cdot \Delta_{\text{отк}}^2).$$

На рис. 3 приведены квадратические по-

грешности приближения при оценке коэффициентов разложения, полученные при помощи пакета MathCAD, со следующими исходными данными:

- $\rho(\tau) = \exp(-\lambda \cdot \tau) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau)$ – с отношением $\omega_0 / \lambda = 5 / 1$, $\Delta\tau = 0,0816$ и числом ординат $k = 0..m$, $m = 18$;
- диапазон порядка коэффициента $k = 0..m$, $m = 18$;
- параметр масштаба ортогональных функций Бесселя первого рода 0-го порядка $\gamma = 0,258$.

$$\delta_{\min}(\gamma, m) = 1 - \frac{\sum_{k=0}^m \beta_k^2 \cdot J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)})}{4 \cdot \gamma \cdot \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) \cdot (1 - e^{-2\gamma\tau}) d\tau};$$

$$M\delta_m(\gamma, m) = \frac{\sum_{k=0}^m \gamma_k \cdot J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)})}{4 \cdot \gamma \cdot \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) \cdot (1 - e^{-2\gamma\tau}) d\tau};$$

$$M\delta_{\min}(\gamma, m) = \delta_{\min}(\gamma, m) + M\delta_m(\gamma, m).$$

Рис. 3 описывает процедуру поиска минимума-минимума суммарной погрешности, обеспечивающего оптимальный выбор m .

На рис. 4 представлена зависимость оптимального числа членов разложения ряда m от параметра масштаба γ для описанных выше исходных данных.

Значение методической погрешности зависит, главным образом, от способа оценки пара-

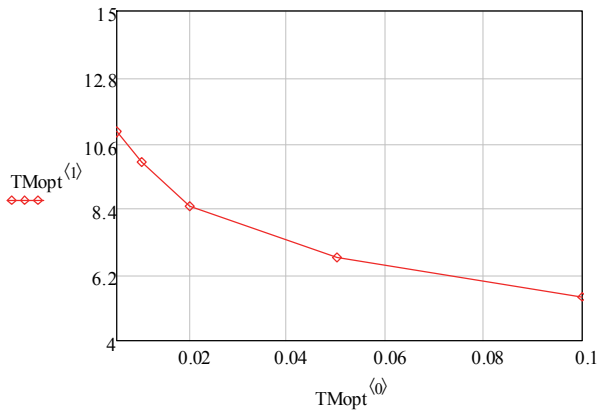


Рис. 4. Зависимость оптимального числа членов разложения ряда m от параметра масштаба γ (по оси ординат – m , по оси абсцисс – γ)

метров модели, а, в частности, параметра масштаба, обеспечивающего минимальную допустимую погрешность аппроксимации.

Вид ортогональных функций Бесселя аналогичен виду функций Дирихле, а, следовательно, данные функции имеют близкое значение коэффициента формы, определяемое из выражения [3]:

$$K_{\phi_a}(\xi) = \left| \frac{\int_0^{\infty} \rho_a(\tau)(1-g(\tau, \xi))d\tau}{\int_0^{\infty} \rho_a(\tau)g(\tau, \xi)d\tau} \right|, \quad (23)$$

где $g(\tau, \xi) = e^{-\xi\tau}$, так как ортогональные функции имеют экспоненциальный вид, а параметр ξ выбирается в соответствии с длительностью аппроксимируемой КФ.

Следует заметить, что вес ортогональных функций Бесселя, в свою очередь, аналогичен весу ортогональных функций Якоби с параметрами $\alpha = 0$, $\beta = 1$, что позволяет говорить об общности подхода к построению ортогональных моделей в указанных ортогональных базисах.

Кроме того, заметим, что алгоритм оценки параметра масштаба γ ортогональных функций Дирихле и Якоби (0, 1), а, следовательно, и ортогональных функций Бесселя, идентичен.

Таким образом, для ортогонального базиса Бесселя параметр масштаба определяется из выражения:

$$\gamma = \frac{0,4}{(m+1) \cdot \Delta\tau_0}. \quad (24)$$

Для колебательных моделей с погрешностью восстановления 2% справедливо

$$\Delta\tau_0 = \frac{0,4}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}. \quad (25)$$

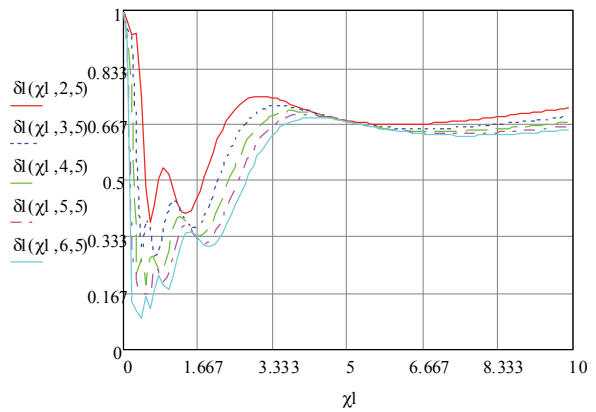


Рис. 5. График относительной погрешности аппроксимации при $\omega = 5$ и $m = 2 \div 6$

На рис. 5 представлена зависимость относительной погрешности аппроксимации от параметра масштаба при различных значениях числа членов разложения ряда $m = 2 \div 6$ и показателе колебательности $\omega = 5$ для ортогональных функций Бесселя.

В качестве аппроксимируемой функции выберем НКФ $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda\tau} \cos \omega_0\tau$.

3. ПОГРЕШНОСТЬ ОЦЕНКИ СПЕКТРА ПО ПАРАМЕТРАМ МОДЕЛИ КФ

Погрешность спектра КФ по параметрам аппроксимирующего выражения можно представить в виде [4, 5]:

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[S_x(\omega) - \frac{\sigma_x^2}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \text{Re}W_k(j \cdot \omega) \right]^2 d\omega, \quad (26)$$

где $\text{Re}W_k(j\omega) = \frac{W_k(j\omega) + W_k(-j\omega)}{2}$,

$$a W_k(j\omega) = \frac{1}{\gamma + j\omega} \cdot \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^n a_i \right), \quad (27)$$

$$a_i = (-1)(\lambda_k)^2 \frac{1}{i+1} \left(\frac{1}{2} + i \right) \times \frac{1}{\left(\frac{3\gamma + j\omega}{2\gamma} + 2i \right) \left(1 + \frac{3\gamma + j\omega}{2\gamma} + 2i \right)}.$$

Раскрыв квадрат подынтегрального выражения, получим:

$$\Delta = \int_0^{\infty} (S_x(\omega))^2 d\omega - \frac{2 \cdot \sigma_x^2}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cdot \text{Re}W_k(j \cdot \omega) d\omega + \frac{\sigma_x^4}{\pi^2} \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m \beta_k \cdot \beta_l \cdot \int_0^{\infty} \text{Re}W_k(j \cdot \omega) \cdot \text{Re}W_l(j \cdot \omega) d\omega$$

С учетом того, что [6]

$$\beta_k = \frac{2 \cdot \gamma}{J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)})} \int_0^\infty S_x(\omega) \cdot \text{Re}W_k(j \cdot \omega) d\omega, \quad (28)$$

$$\int_0^\infty \text{Re}W_k(\tau, \gamma) \cdot \text{Re}W_l(\tau, \gamma) d\tau = \begin{cases} \frac{J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)}) \cdot \pi}{8 \cdot \gamma}, & k=l; \\ 0, & k \neq l. \end{cases} \quad (29)$$

приведем выражение для погрешности оценки спектра к виду:

$$\Delta = \int_0^\infty (S_x(\omega))^2 d\omega - \frac{\sigma_x^2}{8 \cdot \pi \cdot \gamma} \cdot \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \cdot J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)}). \quad (30)$$

Поскольку для корреляционно-спектральных характеристик справедливо следующее выражение:

$$\int_0^\infty (S_x(\omega))^2 d\omega = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^\infty (K_x(\tau))^2 \cdot (1 - e^{-2\gamma\tau}) d\tau, \quad (31)$$

Окончательно запишем погрешность оценки спектра как

$$\Delta = \frac{\sigma_x^2}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\int_0^\infty (K_x(\tau))^2 \cdot (1 - e^{-2\gamma\tau}) d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \cdot \frac{J_{\nu+1}^2(\lambda_k^{(\nu)})}{4 \cdot \gamma} \right). \quad (32)$$

3. ПОГРЕШНОСТЬ ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

В АИС «АКС Бессель» приводится расчет таких погрешностей корреляционно-спектральных характеристик, таких как:

- относительная погрешность интервала корреляции $\tau_k^{(2)}$ [2]:

$$\delta_{\tau_k^{(2)}} = (\hat{\tau}_k^{(2)} - \tau_k^{(2)}) / \tau_k^{(2)},$$

где $\hat{\tau}_k^{(2)} = \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k^{(3)} \tau_{k,u}^{(2)}$;

- относительная погрешность оценки интервала корреляции $\tau_k^{(4)}$ [2]:

$$\delta_{\tau_k^{(4)}} = (\hat{\tau}_k^{(4)} - \tau_k^{(4)}) / \tau_k^{(4)},$$

где $\hat{\tau}_k^{(4)} = \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k^{2(3)} \tau_{k,u}^{(4)}$.

- относительная погрешность оценки экстремальной частоты спектра – частоты, соответствующей последнему максимуму спектральной плотности мощности:

$$\delta_{\omega_s} = (\hat{\omega}_s - \omega_s) / \omega_s,$$

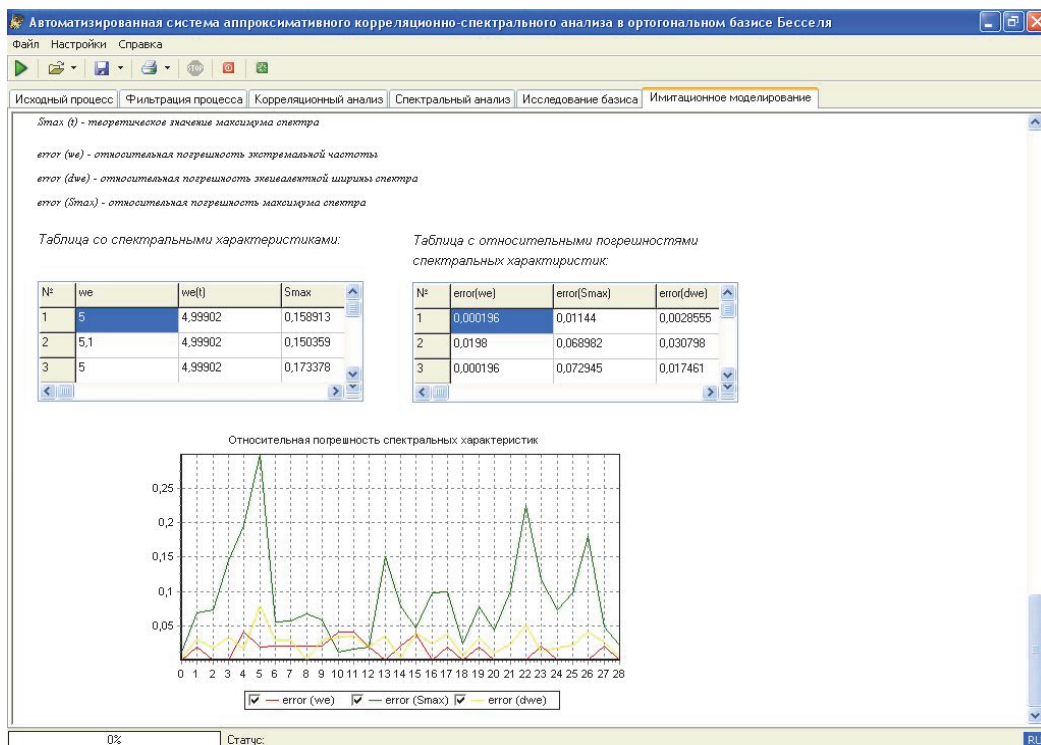


Рис. 6. Результат вычисления погрешностей оценки корреляционно-спектральных характеристик методом имитационного моделирования с помощью автоматизированной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа случайных процессов в ортогональном базисе Бесселя

- относительная погрешность оценки эквивалентной ширины спектра [2]:

$$\delta_{\Delta\omega_0} = (\Delta\hat{\omega}_0 - \Delta\omega_0) / \Delta\omega_0,$$

где $\left\{ \begin{array}{l} \Delta\hat{\omega}'_0 = \frac{1}{2S_x(\omega_0)_{\max}}; \\ \Delta\hat{\omega}_0 = \hat{\omega}_0 + \frac{\Delta\hat{\omega}'_0}{2} \end{array} \right.$

и $\left\{ \begin{array}{l} \Delta\omega'_0 = \frac{1}{2S_x(\omega_0)_{\max}}; \\ \Delta\omega_0 = \omega_0 + \Delta\omega'_0/2 \end{array} \right.$

- относительная погрешность оценки максимума спектра:

$$\delta_{S_x(\omega_0)_{\max}} = \frac{\hat{S}_x(\omega_0)_{\max} - S_x(\omega_0)_{\max}}{S_x(\omega_0)_{\max}}.$$

На рис. 6 приведен результат вычисления погрешностей оценки корреляционно-спектральных характеристик методом имитационного моделирования с помощью АИС «АКС Бессель» со следующими исходными данными:

- $\rho(\tau) = \exp(-\lambda \cdot \tau) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau)$ с отношением $\omega_0 / \lambda = 5 / 1$, $\Delta\tau = 0,0816$, числом ординат $Nx = 37$, объемом выборки $N = 5000$;
- диапазон порядка коэффициента $k = 0..m$, $m = 18$;
- параметр масштаба ортогональных функций Бесселя $\gamma = 0,258$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Определена погрешность оценки коэффициентов разложения ортогональных моделей

КФ в базисе Бесселя.

2. Получена погрешность аппроксимации КФ ортогональными функциями Бесселя.

3. Приведен алгоритм оценки параметра масштаба, гарантирующего минимум квадратической погрешности приближения для ортогональных функций Бесселя.

4. Определена погрешность оценки спектра по параметрам аппроксимирующего выражения КФ.

5. Определены погрешности оценки корреляционно-спектральных характеристик.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прохоров С.А., Газетова Я.В. Автоматизированная система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональном базисе Бесселя // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2010. №2 (14). С. 30-40.
2. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов. Лабораторный практикум Самара: СНЦ РАН, 2008. 301 с.
3. Прохоров С.А., Газетова Я.В., Куликовских И.М. Автоматизированная система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональном базисе Бесселя // Труды седьмой Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании», СГТУ, Самара, 2008. С. 13-16.
4. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Погрешность оценки спектра по параметрам аппроксимирующего выражения корреляционной функции // Математическое моделирование и краевые задачи: труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.4. Самара, 2008. С. 116-120.
5. Прохоров С.А., Газетова Я.В. Частотные характеристики ортогональных функций Бесселя // Радиотехника и связь: Сборник научных трудов. – Саратов, 2009. С. 28-35.
6. Прохоров С.А., Куликовских И.М. О некоторых свойствах ортогональности // Информатика, моделирование, автоматизация проектирования (ИМАП-2009): сборник научных трудов Российской школы-семинара аспирантов, студентов и молодых ученых. Ульяновск, 2009. С. 195-197.

THE ANALYSIS OF ERRORS OF APPROXIMATION OF CORRELATION AND SPECTRAL FUNCTIONS BY ORTHOGONAL BESSEL FUNCTIONS

© 2012 S.A. Prohorov, Y.V. Soloveva

Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolev
(National Research University)

The analysis of methodical errors of an assessment of parameters of orthogonal models of correlation spectral characteristics in Bessel's orthogonal basis is carried out: factors of decomposition of models of correlation functions (KF), approximation of KF, an assessment of a range on parameters of approximating expression of KF, an assessment of correlation spectral characteristics.

Keywords: error, range, correlation function, approximation.

Sergey Prokhorov, Doctor of Technics, Professor, Head at the Information Systems and Technologies Department.
E-mail: sp@smr.ru.
Yana Soloveva, Post-Graduate Student, Assistant Lecturer at the Information Systems and Technologies Department.
E-mail: yanka58@yandex.ru