

УДК 535.42

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ИЗМЕНЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ МОДОВЫХ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В АНИЗОТРОПНЫХ ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛАХ

© 2012 С.Н. Хонина, С.Г. Вологовский, С.И. Харитонов

Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара

Поступила в редакцию 17.05.2012

В работе аналитически и численно показано, что непараксиальные модовые лазерные пучки при распространении в анизотропной среде испытывают периодическое изменение интенсивности, связанное с интерференцией обыкновенного и необыкновенного лучей. В случае распространения вдоль оси кристалла период осцилляций обратно пропорционален квадрату пространственной частоты лазерного пучка и разности диэлектрических проницаемостей. Полученная зависимость позволяет косвенно оценивать параметры кристалла.

При распространении сингулярных модовых пучков перпендикулярно оси кристалла визуально наблюдается зависимость картины интенсивности от угла поворота вокруг оси распространения пучка. Такой зависимости для продольного расположения оси не имеется. Этот факт может служить информацией об ориентации оси кристалла.

Ключевые слова: анизотропная среда, модовые лазерные пучки, периодическое изменение интенсивности.

ВВЕДЕНИЕ

Все больший интерес и практическое применение приобретают оптические устройства, позволяющие преобразовывать одни свойства электромагнитного излучения в другие. Среди наиболее просто реализуемых поляризационные и модовые преобразования.

Распространение лазерных мод высокого порядка в среде с сильной анизотропией приводит к сложным поляризационно-модовым преобразованиям [14]. Причем для анализа таких явлений часто используется параксиальная модель распространения [5, 6].

Заметим, что взаимодействие поляризации и пространственного распределения электромагнитного поля происходит также в изотропной среде в непараксиальном режиме, в частности, при острой фокусировке [79].

Непараксиальный режим в анизотропной среде позволяет обнаружить более тонкие эффекты [1013].

В данной работе рассматривается непараксиальное распространение модовых лазерных пучков вдоль и перпендикулярно оси анизотропно-

го кристалла. Аналитически и численно показано, что при распространении вдоль оси кристалла непараксиальные пучки Бесселя испытывают периодическое изменение интенсивности, причем период осцилляций обратно пропорционален квадрату пространственной частоты лазерного пучка и разности диэлектрических проницаемостей, соответствующих обыкновенному и необыкновенному лучам.

При распространении модовых пучков перпендикулярно оси кристалла наблюдается зависимость картины интенсивности от угла поворота вокруг оси распространения пучка. В этом случае частые осцилляции характерны только для компонент электромагнитного поля, не вносящих существенного вклада в картину общей интенсивности.

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КРИСТАЛЛЕ

Диэлектрический тензор кристалла, принципиальные оси которого совпадают с лабораторными (декартовыми) осями, имеет диагональную форму:

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

*Хонина Светлана Николаевна, ведущий научный сотрудник,
доктор физико-математических наук.*

E-mail: khonina@smr.ru

Вологовский Сергей Геннадьевич, ведущий программист.

E-mail: sv@smr.ru

*Харитонов Сергей Иванович, старший научный сотрудник,
доктор физико-математических наук.*

E-mail: prognoz2007@gmail.com

Однако во многих практических случаях лабораторные оси Ox и Oy ориентированы под некоторым углом ψ к принципиальным осям кристалла X и Y , в то время как ось распространения совпадает с принципиальной осью Z [14]. В этом случае диэлектрический тензор кристалла преобразуется с использованием матрицы поворота поперечных координат:

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \mathbf{R}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \cos^2 \psi + \varepsilon_2 \sin^2 \psi & \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \sin 2\psi & 0 \\ \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \sin 2\psi & \varepsilon_1 \sin^2 \psi + \varepsilon_2 \cos^2 \psi & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, с учетом поворота в поперечной плоскости тензор кристалла принимает вид:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_1 \cos^2 \psi + \varepsilon_2 \sin^2 \psi, \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_1 \sin^2 \psi + \varepsilon_2 \cos^2 \psi, \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \sin 2\psi, \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_3. \end{aligned} \quad (4)$$

В работах [15, 16] для тензора вида (3) был выписан интегральный оператор распространения электромагнитных волн в следующем виде (полагаем среду магнитоизотропной, $\mu=1$, и рассматриваем только электрические компоненты):

$$\mathbf{E}(u, v, z) = \iint \left\{ c_1(\alpha, \beta) \mathbf{e}_1(\alpha, \beta) \exp[ik\gamma_1(\alpha, \beta)z] + c_2(\alpha, \beta) \mathbf{e}_2(\alpha, \beta) \exp[ik\gamma_2(\alpha, \beta)z] \right\} \exp\{ik[\alpha u + \beta v]\} d\alpha d\beta, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} e_{1x}(\alpha, \beta) &= M_{12}, \\ e_{1y}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \left[M_{22} - M_{11} + \sqrt{(M_{11} - M_{22})^2 + 4M_{12}M_{21}} \right], \\ e_{1z}(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{\varepsilon_z \gamma_1(\alpha, \beta)} \left[(\alpha \varepsilon_{xx} + \beta \varepsilon_{yx}) e_{1x}(\alpha, \beta) + (\alpha \varepsilon_{xy} + \beta \varepsilon_{yy}) e_{1y}(\alpha, \beta) \right], \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} e_{2x}(\alpha, \beta) &= M_{12}, \\ e_{2y}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \left[M_{22} - M_{11} - \sqrt{(M_{11} - M_{22})^2 + 4M_{12}M_{21}} \right], \\ e_{2z}(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{\varepsilon_z \gamma_2(\alpha, \beta)} \left[(\alpha \varepsilon_{xx} + \beta \varepsilon_{yx}) e_{2x}(\alpha, \beta) + (\alpha \varepsilon_{xy} + \beta \varepsilon_{yy}) e_{2y}(\alpha, \beta) \right]. \end{aligned} \quad (6б)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1(\alpha, \beta) &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(M_{22} + M_{11}) + \sqrt{(M_{22} - M_{11})^2 + 4M_{12}M_{21}} \right]}, \\ \gamma_2(\alpha, \beta) &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(M_{22} + M_{11}) - \sqrt{(M_{22} - M_{11})^2 + 4M_{12}M_{21}} \right]}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= \left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon_{zz}} - 1 \right) (\beta^2 - \varepsilon_{xx}) - \left(\frac{\alpha\beta}{\varepsilon_{zz}} \right) (\alpha\beta + \varepsilon_{yx}), \\ M_{12} &= \left(\frac{\alpha\beta}{\varepsilon_{zz}} \right) (\alpha^2 - \varepsilon_{yy}) - \left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon_{zz}} - 1 \right) (\alpha\beta + \varepsilon_{xy}), \\ M_{21} &= \left(\frac{\alpha\beta}{\varepsilon_{zz}} \right) (\beta^2 - \varepsilon_{xx}) - \left(\frac{\beta^2}{\varepsilon_{zz}} - 1 \right) (\alpha\beta + \varepsilon_{yx}), \\ M_{22} &= \left(\frac{\beta^2}{\varepsilon_{zz}} - 1 \right) (\alpha^2 - \varepsilon_{yy}) - \left(\frac{\alpha\beta}{\varepsilon_{zz}} \right) (\alpha\beta + \varepsilon_{xy}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} c_1(\alpha, \beta) \\ c_2(\alpha, \beta) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} e_{2y}(\alpha, \beta) P_x(\alpha, \beta) - e_{2x}(\alpha, \beta) P_y(\alpha, \beta) \\ e_{1x}(\alpha, \beta) P_y(\alpha, \beta) - e_{1y}(\alpha, \beta) P_x(\alpha, \beta) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\Delta = e_{1x}(\alpha, \beta) e_{2y}(\alpha, \beta) - e_{1y}(\alpha, \beta) e_{2x}(\alpha, \beta), \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} P_x(\alpha, \beta) \\ P_y(\alpha, \beta) \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^2} \iint \begin{pmatrix} E_x(x, y, 0) \\ E_y(x, y, 0) \end{pmatrix} \exp\{-ik[\alpha x + \beta y]\} dx dy. \quad (11)$$

$E_x(x, y, 0)$, $E_y(x, y, 0)$ – поперечные электрические компоненты электромагнитного поля во входной плоскости (при $z=0$).

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВИХРЕВЫХ ПУЧКОВ В ОДНООСНОМ КРИСТАЛЛЕ, ОСЬ КОТОРОГО НАПРАВЛЕНА ВОДЛЬ ОСИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

В этом случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_o$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_e$, и выражения (4) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{yy} = \varepsilon_o, \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = 0, \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_e, \end{aligned} \quad (12)$$

т.е. тензор (3) сводится к диагональному виду:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_o & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_e \end{pmatrix} \quad (13)$$

и распространение нормально падающего лазерного пучка не зависит от угла поворота в поперечной плоскости, однако скорости распространения обыкновенного ($j=1$) и необыкновенного ($j=2$) лучей различны.

Если поперечные компоненты электрического поля во входной плоскости в полярных координатах ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \tan^{-1}(y/x)$) имеют вихревую зависимость:

$$\begin{aligned} E_x(r, \varphi, 0) &= E_{0x}(r) \exp(im\varphi), \\ E_y(r, \varphi, 0) &= E_{0y}(r) \exp(im\varphi), \end{aligned} \quad (14)$$

тогда выражение (11) упрощается :

$$\begin{pmatrix} P_x(\sigma, \phi) \\ P_y(\sigma, \phi) \end{pmatrix} = \frac{k}{\lambda} i^m \exp(im\phi) \int_0^R \begin{pmatrix} E_{0x}(r) \\ E_{0y}(r) \end{pmatrix} J_m(kr\sigma) r dr. \quad (15)$$

Также оператор распространения (5) в полярных координатах ($\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$, $\theta = \tan^{-1}(v/u)$) упрощается:

$$\begin{aligned} E(\rho, \theta, z) &= k^2 i^{2m} \exp(im\theta) \times \\ & \left\{ \begin{pmatrix} SS_m(t, \theta) & -SC_m(t, \theta) \\ -SC_m(t, \theta) & CC_m(t, \theta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[ikz\gamma_1(\sigma)] + \right. \\ & \left. \int_0^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} CC_m(t, \theta) & SC_m(t, \theta) \\ SC_m(t, \theta) & SS_m(t, \theta) \\ \frac{\varepsilon_o \sigma}{\varepsilon_e \gamma_2(\sigma)} C_m(t, \theta) & \frac{\varepsilon_o \sigma}{\varepsilon_e \gamma_2(\sigma)} S_m(t, \theta) \end{pmatrix} \exp[ikz\gamma_2(\sigma)] \right\} \begin{pmatrix} P_{mx}(\sigma) \\ P_{my}(\sigma) \end{pmatrix} \alpha d\sigma \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1(\sigma) &= \sqrt{\varepsilon_o - \sigma^2}, \\ \gamma_2(\sigma) &= \sqrt{\varepsilon_o - \sigma^2 \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e}}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} C_m(t, \theta) &= \frac{i}{2} [e^{i\theta} J_{m+1}(t) - e^{-i\theta} J_{m-1}(t)], \\ S_m(t, \theta) &= \frac{1}{2} [e^{i\theta} J_{m+1}(t) + e^{-i\theta} J_{m-1}(t)], \\ SC_m(t, \theta) &= \frac{i}{4} [e^{i2\theta} J_{m+2}(t) - e^{-i2\theta} J_{m-2}(t)], \\ CC_m(t, \theta) &= \frac{1}{4} [2J_m(t) - e^{i2\theta} J_{m+2}(t) - e^{-i2\theta} J_{m-2}(t)], \\ SS_m(t, \theta) &= \frac{1}{4} [2J_m(t) + e^{i2\theta} J_{m+2}(t) + e^{-i2\theta} J_{m-2}(t)], \\ t &= k\rho\sigma, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} P_{mx}(\sigma) \\ P_{my}(\sigma) \end{pmatrix} = \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} E_{0x}(r) \\ E_{0y}(r) \end{pmatrix} J_m(kr\sigma) r dr. \quad (19)$$

Как видно из (16) обыкновенный луч соответствует ТЕ моде, необыкновенный – ТМ моде.

Заметим, что для многих радиальных функций, часто используемых в оптике, таких как полиномы Цернике, функции Лагерра Гаусса, функции Бесселя, выражение (19) имеет аналитический вид.

3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПУЧКОВ БЕССЕЛЯ ВДОЛЬ ОСИ КРИСТАЛЛА

В частности, если во входной плоскости сформирована мода Бесселя (c_x, c_y - поляризационные коэффициенты):

$$\begin{aligned} E_x(r, \varphi, 0) &= c_x J_m(k\sigma_0 r) \exp(im\varphi), \\ E_y(r, \varphi, 0) &= c_y J_m(k\sigma_0 r) \exp(im\varphi), \end{aligned} \quad (20)$$

тогда

$$\begin{pmatrix} P_{mx}(\sigma) \\ P_{my}(\sigma) \end{pmatrix} = \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} J_m(k\sigma_0 r) J_m(kr\sigma) r dr = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} \frac{\delta(\sigma - \sigma_0)}{\sigma_0}. \quad (21)$$

Для ограниченных пучков Бесселя выражение (21) будет выполняться приближенно, т.е. основная энергия будет сосредоточена около пространственной частоты σ_0 .

3.1. Распространение пучков Бесселя первого порядка

При $m=0$ вблизи оптической оси ($r \rightarrow 0$) выражение (16) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 E_x(\rho \approx 0, \theta, z) &\approx \frac{k^2 c_x}{2} \{ \exp[ikz\gamma_1(\sigma_0)] + \exp[ikz\gamma_2(\sigma_0)] \} J_0(k\sigma_0\rho), \\
 E_y(\rho \approx 0, \theta, z) &\approx \frac{k^2 c_y}{2} \{ \exp[ikz\gamma_1(\sigma_0)] + \exp[ikz\gamma_2(\sigma_0)] \} J_0(k\sigma_0\rho), \\
 E_z(\rho \approx 0, \theta, z) &\approx \frac{k^2}{2} \frac{\varepsilon_o \sigma_0}{\varepsilon_e \gamma_2(\sigma_0)} \exp[ikz\gamma_2(\sigma_0)] [ic_x \cos\theta + c_y \sin\theta] J_1(k\sigma_0\rho).
 \end{aligned} \tag{22}$$

Общая интенсивность для выражения (22):

$$\begin{aligned}
 |E(\rho, \theta, z)|^2 &= |E_x(\rho, \theta, z)|^2 + |E_y(\rho, \theta, z)|^2 + |E_z(\rho, \theta, z)|^2 = \\
 &= k^4 \left\{ (c_x^2 + c_y^2) J_0^2(k\sigma_0\rho) [1 + \cos(kz[\gamma_2(\sigma_0) - \gamma_1(\sigma_0)])] \right\} + |E_z(\rho, \theta, z)|^2
 \end{aligned} \tag{23}$$

При высоких частотах вклад продольной компоненты в общую интенсивность (23) будет увеличиваться, однако даже при $\sigma_0 \rightarrow 1$ коэффициент при z -компоненте:

$$A^2 = \left(\frac{\varepsilon_o \sigma_0}{\varepsilon_e \gamma_2(\sigma_0)} \right)^2 \approx_{\sigma_0 \rightarrow 1} \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e^2} \text{ будет в несколько}$$

раз меньше, чем для поперечных компонент.

Таким образом, даже в непараксиальном случае интенсивность (23) имеет радиальносимметричную структуру и не зависит от поляризации. Значение интенсивности на оптической оси периодически меняется в зависимости от пройденного расстояния в связи с интерференцией обыкновенного и необыкновенного пучка. Период осцилляций определяется разностью собственных чисел и значением параметра σ_0 .

В параксиальном случае (мало) собственные значения (17) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(\sigma_0) &\approx \sqrt{\varepsilon_o} - \frac{\sigma_0^2 \sqrt{\varepsilon_o}}{2\varepsilon_o}, \\
 \gamma_2(\sigma_0) &\approx \sqrt{\varepsilon_e} - \frac{\sigma_0^2 \sqrt{\varepsilon_e}}{2\varepsilon_e}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Тогда

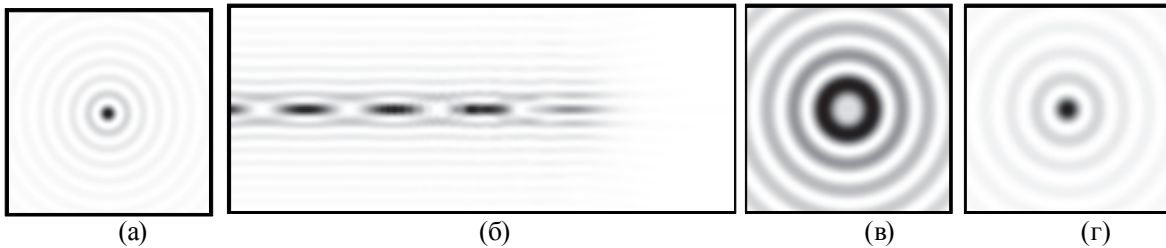


Рис. 1. Распространение пучка Бесселя нулевого порядка вдоль оси кристалла:

(а) центральная часть интенсивности входного пучка, (б) продольная картина интенсивности в плоскости $y=0$, $z \in [10 \text{ мкм}, 400 \text{ мкм}]$, $x \in [-5 \text{ мкм}, 5 \text{ мкм}]$, (в) поперечное распределение интенсивности (размером $3 \times 3 \text{ мкм}^2$) в плоскости на расстоянии $z = 34 \text{ мкм}$ (соответствует минимуму на оси) и (г) $z = 67,5 \text{ мкм}$ (соответствует максимуму на оси)

$$\gamma_2(\sigma_0) - \gamma_1(\sigma_0) \approx \frac{\sigma_0^2 \sqrt{\varepsilon_o} (\varepsilon_e - \varepsilon_o)}{2\varepsilon_o \varepsilon_e}, \tag{25}$$

и период осцилляций определяется следующим выражением:

$$d_z \approx \lambda \frac{2\varepsilon_o \varepsilon_e}{\sigma_0^2 \sqrt{\varepsilon_o} (\varepsilon_e - \varepsilon_o)}. \tag{26}$$

Период (26) будет увеличиваться с уменьшением параметра σ_0 и уменьшением разности показателей преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей. В изотропной среде ($\varepsilon_e = \varepsilon_o$) период $d_z = \infty$.

На рис. 1 показано распространение линейнополяризованного пучка Бесселя нулевого порядка с $\sigma_0 = 0,5$ в кристалле рутила, который имеет $\varepsilon_o = 6,84$, $\varepsilon_e = 8.43$ [6] на расстояние несколько сотен микрон (длина волны $\lambda = 0,633 \text{ мкм}$). Пучок Бесселя ограничен радиусом $R = 50 \text{ мкм}$, поэтому он не подвержен дифракции до расстояния $z_b \approx R / \sigma_0 = 100\lambda$.

В соответствии с приведенными параметрами период осцилляций (26) $d_z \approx 70 \text{ мкм}$ (если вычислить разность (25) более точно, с использованием формул (17), то получается $d_z \approx 69 \text{ мкм}$) оказывается немного больше, чем рассчитанная величина $d_{zc} \approx 67 \text{ мкм}$ из-за приближенности допущения (21).

3.2. Распространение пучков Бесселя первого порядка

При $m=1$ вблизи оптической оси ($r \rightarrow 0$) выражение (16) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 E_x(\rho, \theta, z) &\approx -\frac{k^2}{4} J_1(k\sigma_0\rho) \left[c_x (e^{i\theta} + 2\cos\theta) E_p + ic_y e^{-i\theta} E_m \right], \\
 E_y(\rho, \theta, z) &\approx -\frac{k^2}{4} J_1(k\sigma_0\rho) \left[c_y (e^{i\theta} + 2\cos\theta) E_p + ic_x e^{-i\theta} E_m \right], \\
 E_z(\rho, \theta, z) &\approx \frac{ik^2 \varepsilon_0 \sigma_0}{2\varepsilon_e \gamma_2(\sigma_0)} J_0(k\sigma_0\rho) (c_y - c_x) \exp[ikz\gamma_2(\sigma_0)],
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

где $E_{p,m} = \exp[ikz\gamma_1(\sigma_0)] \pm \exp[ikz\gamma_2(\sigma_0)]$.

Продольная компонента теперь имеет ненулевое значение на оптической оси [9], но вклад ее в общую интенсивность попрежнему незначителен даже при высоких частотах.

Таким образом, общая интенсивность определяется вкладом поперечных компонент и зависит от поляризации:

при линейной x -поляризации ($c_y = 0$):

$$|E(\rho, \theta, z)|^2 \approx c_x^2 \left(\frac{k^2}{2} J_1(k\sigma_0\rho) \right)^2 \times \left\{ 1 + 4\cos^2\theta \left(1 + \cos[kz(\gamma_2(\sigma_0) - \gamma_1(\sigma_0))] \right) \right\}, \tag{28a}$$

при линейной xy -поляризации ($c_x = c_y$):

$$|E(\rho, \theta, z)|^2 \approx c_x^2 \left(\frac{k^2}{2} J_1(k\sigma_0\rho) \right)^2 \times \left\{ \begin{aligned} &1 + 4\cos^2\theta \left\{ 1 + \cos[kz(\gamma_2(\sigma_0) - \gamma_1(\sigma_0))] \right\} + \\ &+ \left[3\cos^2\theta - \sin^2\theta \right] \sin[kz(\gamma_2(\sigma_0) - \gamma_1(\sigma_0))] \end{aligned} \right\}, \tag{28б}$$

при круговой поляризации ($c_y = ic_x$),

$$|E(\rho, \theta, z)|^2 \approx 2c_x^2 \left(\frac{k^2}{2} J_1(k\sigma_0\rho) \right)^2 \times \left\{ \begin{aligned} &1 + 4\cos^2\theta \left(1 + \cos[kz(\gamma_2(\sigma_0) - \gamma_1(\sigma_0))] \right) + \\ &- 4\cos\theta \sin\theta \sin[kz(\gamma_2(\sigma_0) - \gamma_1(\sigma_0))] \end{aligned} \right\}. \tag{28в}$$

Как следует из выражений (28), на расстояниях $z_l = \frac{\lambda / 2 + l}{(\gamma_2(\sigma_0) - \gamma_1(\sigma_0))}$, когда косинус разности равен минус единице и в то же время синус равен нулю, при различных поляризациях будет одинаковая картина интенсивности, пропорциональная функции Бесселя первого порядка (см.

в табл. 1 поперечное распределение при $z = 67,5$ мкм).

На других расстояниях картина интенсивности приобретает зависимость от поляризации (см. в табл. 1 поперечное распределение при $z = 34$ мкм).

4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ В ОДНООСНОМ КРИСТАЛЛЕ, ОСЬ КОТОРОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА ОСИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

Рассмотрим случай, когда ось кристалла направлена перпендикулярно оси распространения и совпадает с осью Y . В этом случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon_o$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_e$, и выражения (4) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_o \cos^2\psi + \varepsilon_e \sin^2\psi, \\
 \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_o \sin^2\psi + \varepsilon_e \cos^2\psi, \\
 \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_o}{2} \sin 2\psi, \\
 \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_o.
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

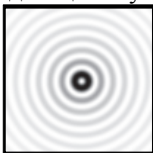
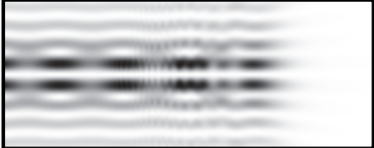
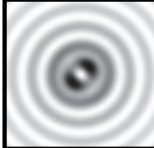




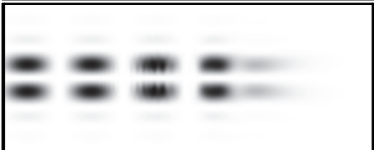
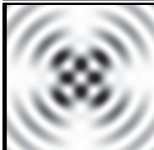
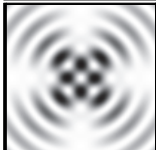

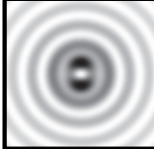

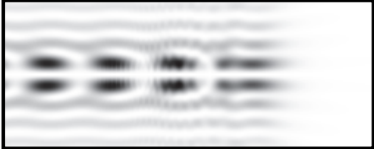




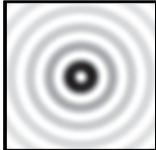
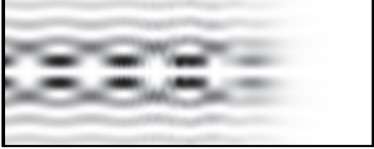
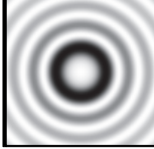



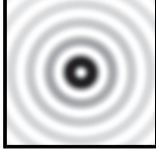



Теперь распространение пучков меняется в зависимости от угла поворота в поперечной плоскости ψ , и необходимо пользоваться общими формулами (5)(11) с учетом следующего вида матрицы (8):

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= (\varepsilon_o - \sigma^2) + \frac{(\varepsilon_e - \varepsilon_o)}{\varepsilon_o} \sin\psi \left[\sin\psi(\varepsilon_o - \sigma^2 \cos^2\phi) - \cos\psi\sigma^2 \cos\phi \sin\phi \right] \\
 M_{12} &= \frac{(\varepsilon_e - \varepsilon_o)}{\varepsilon_o} \cos\psi \left[\sin\psi(\varepsilon_o - \sigma^2 \cos^2\phi) - \cos\psi\sigma^2 \cos\phi \sin\phi \right] \\
 M_{21} &= \frac{(\varepsilon_e - \varepsilon_o)}{\varepsilon_o} \sin\psi \left[\cos\psi(\varepsilon_o - \sigma^2 \sin^2\phi) - \sin\psi\sigma^2 \cos\phi \sin\phi \right] \\
 M_{22} &= (\varepsilon_o - \sigma^2) + \frac{(\varepsilon_e - \varepsilon_o)}{\varepsilon_o} \cos\psi \left[\cos\psi(\varepsilon_o - \sigma^2 \sin^2\phi) - \sin\psi\sigma^2 \cos\phi \sin\phi \right]
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

При $\psi = 0$ распространение электромагнитного излучения в кристалле описывается следующим выражением:

$$\mathbf{E}(\rho, \theta, z) = \iint \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{P_x(\sigma, \phi) - \frac{P_y(\sigma, \phi) \sigma^2 \cos\phi \sin\phi}{(\sigma \sin\phi)^2 - \varepsilon_o}}{\left(\frac{1}{\gamma_1(\sigma)} \right)} \exp[ikz\gamma_1(\sigma)] + \right. \\ &\left. + \frac{P_y(\sigma, \phi)}{(\sigma \sin\phi)^2 - \varepsilon_o} \left(\frac{\sigma^2 \cos\phi \sin\phi}{\gamma_2(\sigma, \phi) \sigma \sin\phi} \right) \exp[ikz\gamma_2(\sigma, \phi)] \right\} \times \\ &\times \exp\{ik\rho\sigma\cos(\phi - \theta)\} \sigma d\sigma d\phi,
 \end{aligned} \right. \tag{31}$$

Таблица 1. Распространение пучка Бесселя первого порядка вдоль оси кристалла

| Падающий пучок  | компо- ненты | Продольное распределение интенсивности в плоскости $y=0$, $z \in [10 \text{ мкм}, 400 \text{ мкм}]$, $x \in [-5 \text{ мкм}, 5 \text{ мкм}]$ | Поперечное распределение интенсивности в плоскости ($3 \times 3 \text{ мкм}^2$) | |
|---|-----------------|---|---|---|
| | | | $z = 34 \text{ мкм}$ | $z = 67,5 \text{ мкм}$ |
| линейно- поляризованный вдоль оси X | общая |  |  |  |
| | x- |  |  |  |
| | y- |  |  |  |
| линейно- поляризованный под углом 45° к оси X | общая |  |  |  |
| | x- |  |  |  |
| | y- |  |  |  |
| с круговой поляризацией | общая |  |  |  |
| | x- |  |  |  |
| | y- |  |  |  |

где

$$\gamma_1(\sigma) = \sqrt{\epsilon_o - \sigma^2},$$

$$\gamma_2(\sigma, \phi) = \sqrt{\epsilon_e - \sigma^2 \frac{\epsilon_e \sin^2 \phi}{\epsilon_o} - \sigma^2 \cos^2 \phi}, \quad (32)$$

Из (31) следует, что картина распространения будет существенно зависеть от поляризации входного пучка. Например, при линейной x -поляризации ($P_y(\sigma, \phi) = 0$) анизотропия кристалла будет проявляться только на продольной компоненте, вклад которой в общую интенсивность очень мал:

$$\mathbf{E}(\rho, \theta, z) = \iint \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\sigma \cos \phi}{\gamma_1(\sigma)} \end{pmatrix} P_x(\sigma, \phi) \exp[ikz\gamma_1(\sigma)] \times \exp\{ik\rho\sigma \cos(\phi - \theta)\} \sigma d\sigma d\phi. \quad (33)$$

Таким образом, модовые пучки будут распространяться в этом случае без заметного изменения интенсивности. Это связано с тем, что ось кристалла направлена вдоль оси Y.

В то же время при линейной y-поляризации ($P_x(\sigma, \phi) = 0$) анизотропия будет сказываться во всех компонентах:

$$\begin{aligned} E_x(\rho, \theta, z) &= \iint \left\{ \frac{S_y(\sigma, \phi) \sigma \cos \phi \sin \phi}{(\sigma \sin \phi)^2 - \epsilon_o} \left\{ \exp[ik\gamma_2(\sigma, \phi)z] - \exp[ik\gamma_1(\sigma)z] \right\} \right\} \times \\ &\times \exp\{ik\rho\sigma \cos(\phi - \theta)\} \sigma d\sigma d\phi, \\ E_y(\rho, \theta, z) &= \iint S_y(\sigma, \phi) \exp[ik\gamma_2(\sigma, \phi)z] \exp\{ik\rho\sigma \cos(\phi - \theta)\} \sigma d\sigma d\phi, \\ E_z(\rho, \theta, z) &= \iint \frac{S_y(\sigma, \phi) \sigma \sin \phi}{(\sigma \sin \phi)^2 - \epsilon_o} \left\{ \frac{\sigma \cos^2 \phi}{\gamma_1(\sigma)} \exp[ik\gamma_1(\sigma)z] + \gamma_2(\sigma, \phi) \exp[ik\gamma_2(\sigma, \phi)z] \right\} \times \\ &\times \exp\{ik\rho\sigma \cos(\phi - \theta)\} \sigma d\sigma d\phi \end{aligned} \quad (34)$$

Заметим однако, что в парааксиальном случае, когда основной пространственный спектр сосредоточен около нулевой частоты ($\sigma = 0$), интенсивность x и z-компонент в (34) очень мала по сравнению с u-компонентой, на которой анизотропия кристалла сказывается лишь в астигматическом искажении без зависимости от пройденного расстояния.

Также из (34) следует, что в отсутствии вихревой фазовой сингулярности значение x и z-компонент на оптической оси ($\rho=0$) равно нулю. При наличии вихревой фазовой сингулярности $m=\pm 1$ ненулевое значение на оптической оси будет иметь z-компонента, а при $m=\pm 2$ x-компонента.

При линейной поляризации вращение кристалла будет соответствовать повороту плоскости поляризации. Таким образом, при повороте кристалла на угол $\psi = \pi/2$ поперечные x и y-компоненты в (31) поменяются местами.

5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПУЧКОВ ЛАГЕРРАГАУССА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ОСИ КРИСТАЛЛА

Рассмотрим распространение в кристалле рутила модовых пучков ЛагерраГаусса:

$$E_{x,y}(r, \phi, 0) = c_{x,y} LG_{n,m}(r, \phi), \quad (35)$$

где

$$LG_{n,m}(r, \phi) = \exp\left(-\frac{r^2}{2w_0^2}\right) \left(\frac{r}{w_0}\right)^{|m|} L_n^{|m|}\left(\frac{r^2}{w_0^2}\right) \exp(im\phi), \quad (36)$$

w_0 – радиус перетяжки пучка, c_x, c_y – поляризационные коэффициенты.

Пространственный спектр пропорционален модам (35):

$$P_m(\sigma) = \int_0^\infty LG_{n,m}(r) J_m(kr\sigma) r dr = LG_{n,m}(\sigma). \quad (37)$$

Основная энергия в распределении (37) сосредоточена около нулевой частоты, поэтому выражения (32) можно рассмотреть в парааксиальном случае:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\sigma) &\approx \sqrt{\epsilon_o} \left(1 - \frac{\sigma^2}{2\epsilon_o}\right), \\ \gamma_2(\sigma, \phi) &\approx \sqrt{\epsilon_e} \left[1 - \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\sin^2 \phi}{\epsilon_o} + \frac{\cos^2 \phi}{\epsilon_e}\right)\right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Тогда период изменений интенсивности x-компоненты в выражениях (34) определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned} \gamma_2(\sigma) - \gamma_1(\sigma, \phi) &\approx \sqrt{\epsilon_e} - \sqrt{\epsilon_o} + \frac{\sigma^2 \sqrt{\epsilon_o}}{2\epsilon_o} - \\ &- \frac{\sigma^2 \sqrt{\epsilon_e}}{2} \left(\frac{\sin^2 \phi}{\epsilon_o} + \frac{\cos^2 \phi}{\epsilon_e}\right), \end{aligned} \quad (39)$$

которое в парааксиальном случае ($\sigma \approx 0$) имеет слабую зависимость от угла.

Таким образом период осцилляций для парааксиальных мод можно считать постоянным:

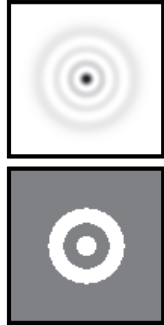



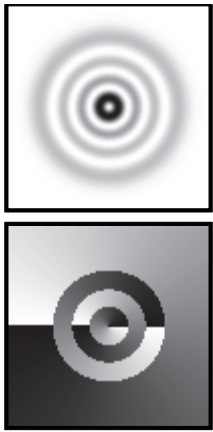



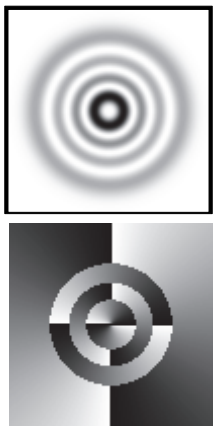



$$d_z \approx \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon_e} - \sqrt{\epsilon_o}}. \quad (40)$$

В табл. 2 приведены результаты моделирования распространения пучков ЛагерраГаусса (36) ($w_0 = 2$ мкм, $\lambda = 0,633$ мкм) для случая (34).

Как видно из иллюстраций x-компонента испытывает периодическое изменение интенсивности, период которых равен $d_z \approx 2,16$ мкм. По формуле (40) значение периода оказывается очень близким $d_z \approx 2,18$ мкм.

Однако на общей интенсивности эти осцилляции никак не сказываются из-за малого вклада x-компоненты. Изменения z-компоненты очень медленные и также не влияют на общую картину, которая определяется в парааксиальном случае только y-компонентой.

Таблица 2. Распространение y -линейнополяризованных пучков ЛагерраГаусса перпендикулярно оси кристалла, направленной вдоль оси Y



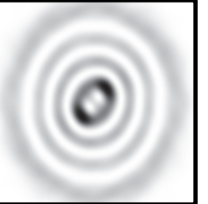



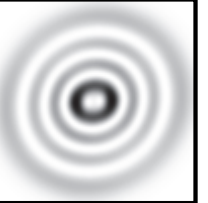



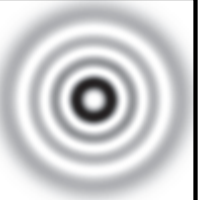

| Падающий пучок (интенсивность и фаза) | компоненты | Продольное распределение интенсивности в плоскости $y=0$, $z \in [50 \text{ мкм}, 60 \text{ мкм}]$, $x \in [-10 \text{ мкм}, 10 \text{ мкм}]$ | Поперечное распределение интенсивности в плоскости $(20 \times 20 \text{ мкм}^2)$ | |
|---|-------------------------|---|---|---|
| | | | $z = 50.5 \text{ мкм}$ | $z = 51,58 \text{ мкм}$ |
| $LG_{3,0}(r, \varphi)$  | общая x- y- z- |  |  |  |
|  | общая x- y- z- |  |  |  |
|  | общая x- y- z- |  |  |  |

Результаты моделирования показывают, что астигматическое искажение мод ЛагерраГаусса становится визуально заметно только при наличии в модах вихревой фазовой сингулярности.

В табл. 3 приведены результаты моделирования распространения моды ЛагерраГаусса (3,2) с круговой поляризацией при вращении кристалла вокруг оси распространения пучка. Для $\psi=0$

ось кристалла направлена вдоль оси Y . Показаны распределения общей интенсивности и отдельных компонент пучка на расстоянии 150 мкм. Как видно из приведенных иллюстраций, астигматическое искажение поперечного распределения интенсивности визуально соответствует углу поворота оси кристалла в плоскости падения модового пучка.

Таблица 3. Распределение моды ЛагерраГаусса (3,0) на расстоянии 150 мкм при вращении кристалла вокруг оси распространения пучка

| Угол поворота | Общая интенсивность | x-интенсивность | y-интенсивность | z-интенсивность |
|-----------------|---|---|--|---|
| $\psi=0$ |  |  |  |  |
| $\psi=45^\circ$ |  |  |  |  |
| $\psi=90^\circ$ |  |  |  |  |

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие основные результаты:

Аналитически и численно показано, что при распространении вдоль оси кристалла непараксиальные лазерные пучки испытывают периодическое изменение интенсивности, связанное с интерференцией обыкновенного и необыкновенного лучей. Для пучков Бесселя период осцилляций обратно пропорционален квадрату пространственной частоты лазерного пучка и разности диэлектрических проницаемостей. Полученная зависимость позволяет косвенно оценивать параметры кристалла.

Хотя при распространении вдоль оси кристалла не имеется зависимости от угла поворота относительно оси, при наличии в модовом пучке вихревой фазовой сингулярности картина интенсивности приобретает зависимость от поляризации.

При распространении модовых пучков перпендикулярно оси кристалла частые осцилляции характерны только для компонент электромагнитного поля, не вносящих существенного вклада в картину общей интенсивности. В этом случае периодические осцилляции визуально не обнаруживаются. Однако расположение оси кристалла параллельно плоскости падения пучка приводит к зависимости картины интенсивности прошедшего пучка от угла поворота кристалла в этой плоскости. Наиболее заметна эта зависимость при наличии в модовых пучках фазовой вихревой сингу-

лярности. Этот факт может служить информацией об ориентации оси кристалла.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 100700109а, 100700438а, 110700153а, гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ4128.2012.9, а также государственных контрактов 07.514.11.4060, 07.514.11.4055.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ciattoni A., Cincotti G., Palma C.* Circularly polarized beams and vortex generation in uniaxial media // J. Opt. Soc. Am. A 20(1) 163171 (2003)
2. *Marrucci L, Manzo C. and Paparo D.* 2006 Optical spin-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media // Phys. Rev. Lett. 96 163905 4.
3. *Fadeyeva T. A., Shvedov V.G., Izdebskaya Y.V., Volyar A.V., Brasselet E., Neshev D.N., Desyatnikov A.S., Krolikowski W., and Kivshar Y.S.* Spatially engineered polarization states and optical vortices in uniaxial crystals // Opt. Expr. 18(10) 1084810863 (2010).
4. *Picon A., Benseny A., Mompert J. and Calvo G.F.* Spin and orbital angular momentum propagation in anisotropic media: theory // J. Opt. 13 (2011) 064019 (7pp).
5. *Fleck J.A., Jr., and Feit M.D.* Beam propagation in uniaxial anisotropic media // J. Opt. Soc. Am. 73(7) 920926 (1983).
6. *Ciattoni A., Crosignani B., and Di Porto P.* Vectorial theory of propagation in uniaxially anisotropic media // J. Opt. Soc. Am. A 18(7) 16561661 (2001).
7. *Zhao Y., Edgar J.S., Jeffries G.D.M., McGloin D. and Chiu*

- D.T.* 2007 Spintoorbital angular momentum conversion in a strongly focused optical beam // *Phys. Rev. Lett.* 99 073901;
8. *Chen L. and She W.* 2008 Electrooptically forbidden or enhanced spintoorbital angular momentum conversion in a focused light beam // *Opt. Lett.* 33 696–8.
 9. *Khonina S.N., Volotovskiy S.G.* Controlling the contribution of the electric field components to the focus of a highaperture lens using binary phase structures // *J. Opt. Soc. Am. A* Vol.27, No.10, 21882197 (2010).
 10. *Stallinga S.* Axial birefringence in highnumericalaperture optical systems and the light distribution close to focus // *J. Opt. Soc. Am. A* 18(11) 28462859 (2001).
 11. *Seshadri S.R.* Beam dynamics of two modes propagating along the optic axis in a uniaxial crystal // *J. Opt. Soc. Am. A* 22(2) 361369 (2005).
 12. *Liu D. and Zhou Z.* Various dark hollow beams propagating in uniaxial crystals orthogonal to the optical axis // *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 10 (2008) 095005 (9pp).
 13. *Zusin D.H., Maksimenka R., Filippov V.V., Chulkov R.V., Perdrix M., Gobert O., and Grabtchikov A.S.* Bessel beam transformation by anisotropic crystals // *J. Opt. Soc. Am. A* 27(8) 18281833 (2010).
 14. *Lee K.S.* New compensation method for bulk optical sensors with multiple birefringences, *Appl. Opt.*, Vol. 28, No. 11, 20012011 (1989).
 15. *Досколович Л.Л., Казанский Н.Л., Харитонов С.И.* Интегральные представления решений системы уравнений максвелла для анизотропных сред // *Компьютерная оптика.* 2010. Т. 34. № 1. С. 5257.
 16. *Хонина С.Н., Харитонов С.И.* Аналог интеграла Рэлея-Зоммерфельда для анизотропной и гиротропной среды // *Компьютерная оптика.* 2012. Т. 36. № 2 (принято к публикации).

PERIODIC INTENSITY CHANGE FOR LASER MODE BEAMS PROPAGATING IN ANISOTROPIC UNIAXIAL CRYSTALS

© 2012 S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy, S.I. Kharitonov

Image Processing Systems Institute of the RAS, Samara

We analytically and numerically shown that the nonparaxial mode laser beams propagating in an anisotropic medium are experiencing periodic variation of intensity due to interference between ordinary and extraordinary rays. In the case of propagation along the axis of the crystal oscillation period is inversely proportional to the square of the spatial frequency of the laser beam and the difference in the dielectric constants. The resulting dependence allows indirectly estimate the parameters of the crystal.

When singular mode beams are propagating perpendicular to the axis of the crystal the intensity dependence on the angle of rotation around the axis of beam propagation is visually observed. Such a dependence for propagation along crystal axis is not available. This fact can serve as information about the orientation of the axis of the crystal.

Keywords: anisotropic medium, mode laser beams, periodic intensity change

Svetlana Khonina, Leading Researcher, Doctor of Physics and Mathematics, E-mail: khoni-na@smr.ru

Sergey Volotovskiy, Leading Programmer. E-mail: sv@smr.ru

Sergey Kharitonov, Senior Researcher, Doctor of Physics and Mathematics. E-mail: prog-noz2007@gmail.com