

УДК 535.374:621.375.8

РЕШЕТКИ ВИХРЕЙ В ШИРОКОАПЕРТУРНЫХ ЛАЗЕРАХ

© 2012 А.А. Кренц^{1,2}, Д.А. Анчиков¹

¹Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН

²Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 25.01.2012

Работа посвящена моделированию динамики широкоапертурного лазера с учетом поперечного распределения электромагнитного поля в резонаторе. Численно и аналитически получены решения в виде решетки вихрей. Показано, что решетка вихрей может быть как неподвижной, так и подвижной (вихри осциллируют подобно молекулам в кристаллической решетке). При значительном превышении уровня накачки над порогом решетка вихрей разрушается и наблюдается так называемый “хаотический газ вихрей”, наблюдается оптическая турбулентность.

Ключевые слова: моделирование, динамика, широкоапертурный лазер, электромагнитное поле, резонатор, решетка вихрей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптические вихри и турбулентность – часто встречающиеся и в настоящее время активно исследующиеся явления в широкоапертурных лазерных системах. Прежде всего эти явления наблюдаются в лазерах с накачкой далекой от порогового значения. Данная работа посвящена механизму образования решеток вихрей в широкоапертурных лазерных системах. В этой статье решеткой вихрей называется упорядоченная двумерная структура – “матрица” состоящая из оптических вихрей, имеющих попарно противоположные топологические заряды. Такая структура напоминает двумерный кристалл с квадратной решеткой. Целью работы является аналитическое и численное исследование таких структур, выявление закономерностей в их появлении и разрушении.

Актуальность работы обусловлена в первую очередь значительным количеством современных экспериментальных результатов, в которых описываются подвижные и неподвижные решетки оптических вихрей в поперечном сечении выходного пучка широкоапертурного лазера. Важно, что наблюдаемые структуры в разных типах лазеров поразительно похожи, несмотря на различие между физическими процессами, участвующими в излучении света. В [1] экспериментально показано, что в твердотельном лазере на кристалле Nd:YVO₄ с большим числом Френеля (Fr~150) наблюдается переход от простых мод Гаусса-Лагерра к решетке оптических

вихрей и турбулентности при варьировании добротности резонатора. В [2] экспериментально наблюдается переход к пространственно-временному хаосу в поверхностно-излучающем лазере с вертикальным резонатором при варьировании тока накачки. При токах накачки близких к пороговому значению, поперечная структура выходного пучка представляет собой моды Гаусса-Лагерра. С ростом тока накачки наблюдаются решетки вихрей. При значительном превышении порогового значения решетка вихрей становится неустойчивой, и лазер переходит в режим пространственно-временного хаоса. Решетки вихрей также наблюдаются в CO₂-лазерах [3].

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Лазер, работающий на одной продольной mode плоскопараллельного резонатора и имеющий однородно уширенную линию описывается системой уравнений Максвелла-Блоха [4]:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} = ia\Delta_{\perp}E + \sigma(P - E), \\ \frac{\partial P}{\partial t} = -(1 + i\delta)P + DE, \\ \frac{\partial D}{\partial t} = -\gamma \left[D - r + \frac{1}{2}(E^*P + EP^*) \right]. \end{cases} \quad (1)$$

E, P, D – безразмерные огибающие электрического поля, поляризумости и инверсии населенности соответственно. $\gamma = \gamma_{\perp}/\gamma_{\parallel}$ и $\sigma = k/\gamma_{\perp}$, где $\gamma_{\perp}, \gamma_{\parallel}$ и k – скорости релаксации поляризумости, инверсии населенности и

Кренц Антон Анатольевич, инженер, аспирант кафедры физики СГАУ. E-mail: krenz86@mail.ru
Анчиков Дмитрий Александрович, инженер.
E-mail: swadimaz@mail.ru

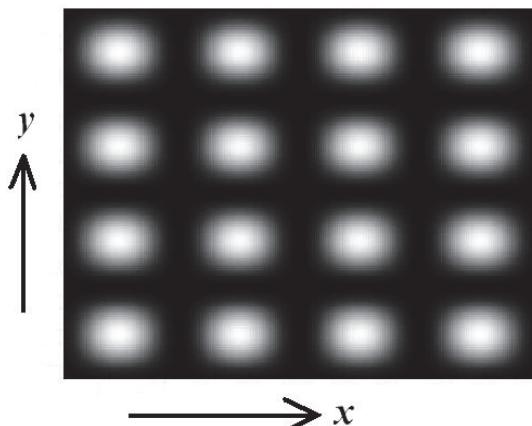


Рис. 1. Мода пустого резонатора при $r = 1.02$

электрического поля соответственно. $\delta = (\omega_1 - \omega) / \gamma_1$ – расстройка между центром линии усиления и частотой генерации, обезразмеренная на ширину линии. Δ_{\perp} – двумерный оператор Лапласа, $a = c^2 / (2\omega\gamma_{\perp}d^2)$ – дифракционный параметр, где d – ширина апертуры, r – накачка, нормированная на пороговое значение.

Для численного решения нелинейной системы уравнений Максвелла-Блоха в частных производных разработана компьютерная программа. В программе реализуется неявная ко-

нечно-разностная схема типа Кранка-Николсона. Используются периодические граничные условия. В качестве начальных условий – случайное распределение поля. Выберем параметры системы уравнений (1): $\gamma = 0.1$, $\sigma = 1$, $\delta = 1$, $a = 0.4$. Такие параметры соответствуют широкоапертурным лазерам класса В. Варьировать будем параметр накачки r , при этом следует иметь в виду, что $r = 1$ соответствует порогу генерации. При накачке близкой к пороговому значению численно получено устойчивое решение в виде попечерной моды плоско-параллельного резонатора с квадратными зеркалами (рис. 1).

При увеличении параметра накачки наблюдается переход от моды пустого резонатора к стационарному распределению интенсивности в виде устойчивой решетки вихрей (рис. 2а). По динамике фазы хорошо видно, что соседние вихри (темные пятна на рис. 2а) имеют противоположные топологические заряды, т.е. врачаются в разных направлениях. На рис. 2б показано распределение фазы в фиксированный момент времени, хорошо видны центры вращения.

Дальнейшее увеличение накачки ведет к неустойчивости решетки вихрей. Вихри в узлах решетки начинают осциллировать, подобно

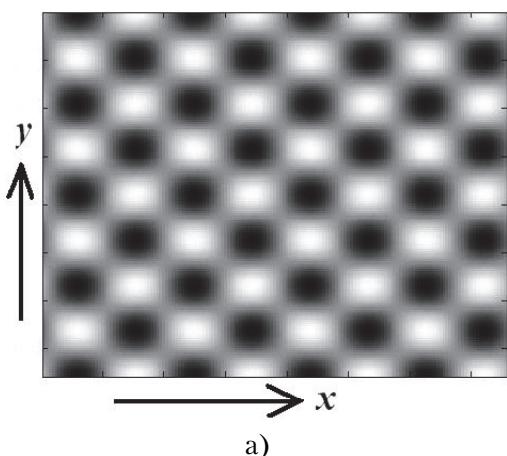


Рис. 2. а – стационарная решетка вихрей б – мгновенное распределение фазы при $r = 1.1$

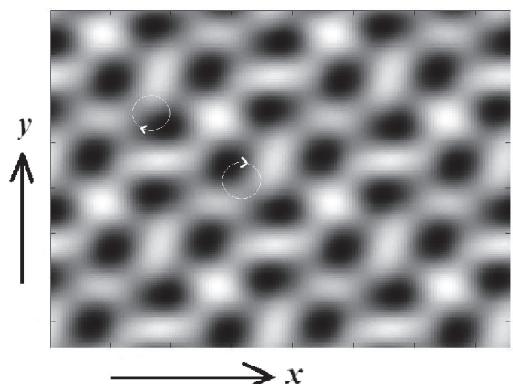
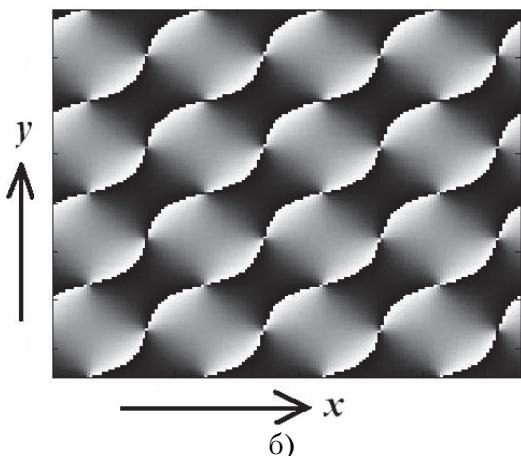


Рис. 3. Нестационарная решетка вихрей при $r = 2.5$



молекулам в решетке кристалла. Центр каждого вихря начинает двигаться по траектории близкой к окружности, причем соседние вихри обходят такие окружности в противоположных направлениях (рис. 3).

При значительных превышениях накачки над порогом решетка вихрей “плавится”, траектории центров вихрей становятся случайными, наблюдается “хаотический газ вихрей”. Система переходит в режим динамического хаоса или, другими словами, к оптической турбулентности (рис. 4а). Вихри можно различить, только имея информацию о фазе (рис. 4б).

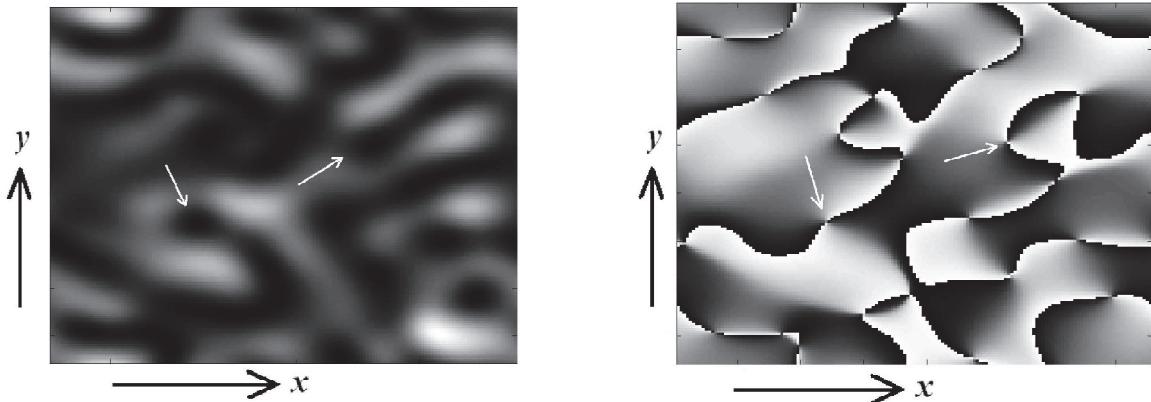


Рис. 4. а – оптическая турбулентность б – мгновенное распределение фазы при $r = 5$

3. РЕШЕТКА ВИХРЕЙ, КАК РЕЗУЛЬТАТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧЕТЫРЕХ БЕГУЩИХ ВОЛН

В [5] теоретически показано, что при положительной расстройке при накачке близкой к порогу для плоскопараллельного резонатора с бесконечной апертурой решением будет волна оптического поля, бегущая поперек апертуры, причем волновое число поперечной волны пропорционально корню из расстройки $k_{\perp} = \sqrt{\delta/a}$. На плоскости возможны четыре направления распространения волны (рис. 5). Поперечные моды пустого плоскопараллельного резонатора в двумерном случае являются суммой четырех встречных волн оптического поля [6], которые, интерферируя, и дают периодическое распределение интенсивности в поперечном сечении (рис. 1). Однако, такие структуры фактически являются модами пустого резонатора, поэтому существуют лишь при накачках близких к порогу. При увеличении накачки растут амплитуды 4-х волн и, соответственно, роль нелинейности.

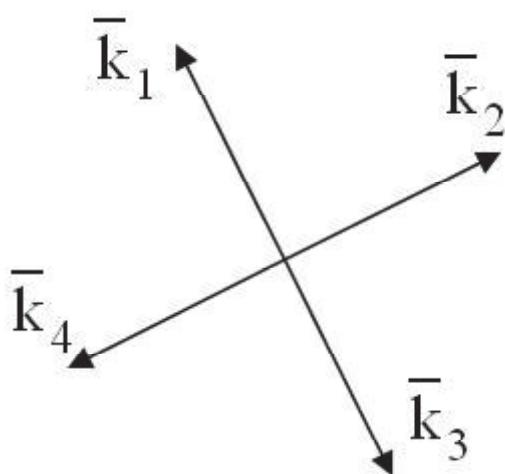


Рис. 5. Расположение волновых векторов четырех бегущих волн на плоскости

В данной работе проведен анализ взаимодействия четырех волн в случае слабой нелинейности и адиабатически исключенных из уравнений (1) поляризованности и инверсии населенности. Адиабатическое исключение переменных из уравнений (1) возможно в случае лазера класса А, т. е. если $k \ll \gamma_{\perp}, \gamma_{II}$. В таком приближении динамика оптического поля лазера описывается одним уравнением Свифта-Хохенберга [7]:

$$\frac{dE}{dt} = (r-1)E + i(a\Delta_{\perp} + \delta)E - g(a\Delta_{\perp} + \delta)^2 E - |E|^2 E, \quad (2)$$

где $g = k^2 / (k + \gamma_{\perp})^2$.

Представим электрическое поле в виде суммы четырех гармоник

$$E(t, r) = \sum_{j=1}^4 A_j(t) \exp(i\vec{k}_j \vec{r}), \text{ где } |\vec{k}_j| = k_{\perp}.$$

Затем подставим это выражение в (2) и, пренебрегая высшими гармониками, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд четырех волн:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = (r-1)A_1 - A_1(|A_1|^2 + 2|A_2|^2 + 2|A_3|^2 + 2|A_4|^2) - 2A_2 A_4 A_3^*, \\ \frac{dA_2}{dt} = (r-1)A_2 - A_2(|A_2|^2 + 2|A_1|^2 + 2|A_3|^2 + 2|A_4|^2) - 2A_1 A_3 A_4^*, \\ \frac{dA_3}{dt} = (r-1)A_3 - A_3(|A_3|^2 + 2|A_1|^2 + 2|A_2|^2 + 2|A_4|^2) - 2A_2 A_4 A_1^*, \\ \frac{dA_4}{dt} = (r-1)A_4 - A_4(|A_4|^2 + 2|A_1|^2 + 2|A_2|^2 + 2|A_3|^2) - 2A_1 A_3 A_2^*. \end{cases} \quad (3)$$

Запишем комплексные амплитуды поля в полярной форме $A_j = \rho_j e^{i\varphi_j}$, где ρ_j – действительные амплитуды и фаза j -ой волны. Подставим эти выражения в систему (3). Записывая реальные и мнимые части уравнений отдельно и комбинируя определенным образом уравнения для фаз, получим систему дифференциальных уравнений от действительных переменных ρ_j и Φ :

$$\begin{cases} \frac{d\rho_1}{dt} = \rho_1 \left((r-1) - \left(|\rho_1|^2 + 2|\rho_2|^2 + 2|\rho_3|^2 + 2|\rho_4|^2 \right) \right) - 2\rho_2\rho_3\rho_4 \cos\Phi \\ \frac{d\rho_2}{dt} = \rho_2 \left((r-1) - \left(|\rho_2|^2 + 2|\rho_1|^2 + 2|\rho_3|^2 + 2|\rho_4|^2 \right) \right) - 2\rho_1\rho_3\rho_4 \cos\Phi \\ \frac{d\rho_3}{dt} = \rho_3 \left((r-1) - \left(|\rho_3|^2 + 2|\rho_1|^2 + 2|\rho_2|^2 + 2|\rho_4|^2 \right) \right) - 2\rho_1\rho_2\rho_4 \cos\Phi \\ \frac{d\rho_4}{dt} = \rho_4 \left((r-1) - \left(|\rho_4|^2 + 2|\rho_1|^2 + 2|\rho_2|^2 + 2|\rho_3|^2 \right) \right) - 2\rho_1\rho_2\rho_3 \cos\Phi \\ \frac{d\Phi}{dt} = \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_3^2} + \frac{1}{\rho_4^2} \right) \sin\Phi \end{cases} \quad (4)$$

где $\Phi = \varphi_1 + \varphi_3 - (\varphi_2 + \varphi_4)$.

Система уравнений (4) имеет семь особых точек. Первая особая точка соответствует тривиальному решению ($\rho_{1st} = 0, \rho_{2st} = 0, \rho_{3st} = 0, \rho_{4st} = 0$). Следующие четыре особые точки – это решения, в которых конкуренцию выигрывает одна из четырех возможных волн, амплитуды остальных – нулевые:

$$\begin{aligned} &(\rho_{1st} = \sqrt{r-1}, \rho_{2st} = 0, \rho_{3st} = 0, \rho_{4st} = 0), \\ &(\rho_{1st} = 0, \rho_{2st} = \sqrt{r-1}, \rho_{3st} = 0, \rho_{4st} = 0), \\ &(\rho_{1st} = 0, \rho_{2st} = 0, \rho_{3st} = \sqrt{r-1}, \rho_{4st} = 0), \\ &(\rho_{1st} = 0, \rho_{2st} = 0, \rho_{3st} = 0, \rho_{4st} = \sqrt{r-1}). \end{aligned}$$

Шестая особая точка представляет собой стоячие поперечные волны, или другими словами моды пустого резонатора

$$(\rho_{1st} = \rho_{2st} = \rho_{3st} = \rho_{4st} = \sqrt{(r-1)/9}, (\varphi_1 + \varphi_3) - (\varphi_2 + \varphi_4) = 0)$$

Важно, что все волны имеют одинаковые амплитуды и выполняется указанное соотношение между фазами волн. И, наконец, седьмая особая точка соответствует стационарной решетке вихрей $(\rho_{1st} = \rho_{2st} = \rho_{3st} = \rho_{4st} = \sqrt{(r-1)/5}, (\varphi_1 + \varphi_3) - (\varphi_2 + \varphi_4) = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z})$. Здесь четыре амплитуды также равны, но их значение отличается от амплитуд стоячих волн и, кроме того, волны имеют другое характерное фазовое соотношение.

Устойчивость особых точек определяется с помощью линейного анализа.

Систему (4) можно представить в более лаконичной векторной форме:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}), \quad \text{где } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \Phi \end{pmatrix} \quad (5)$$

Линеаризуем систему (5) вокруг некоторого решения $\tilde{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{X}_0(\rho_j(t), \Phi(t)) + \tilde{x}(t)$, где $\mathbf{X}_0(t)$ – частное решение системы (5), $\tilde{x}(t)$ – малое отклонение от этого частного решения $\mathbf{X}_0(t)$. Для этого подставим $\tilde{\mathbf{Y}}(t)$ в (5) и разложим в ряд Тейлора по степеням $\tilde{x}(t)$:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{X}} + \dot{\tilde{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) + \mathbf{J}(\mathbf{X}_0(\rho_j, \Phi))\tilde{x} + \dots; \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Пренебрегая членами второго и более высоких порядков и учитывая (5), получим:

$$\dot{\tilde{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{X}_0(\rho_j, \Phi))\tilde{x}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (6)$$

где \mathbf{J} – якобиан системы (5) с элементами

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j}, \quad i, j = 1, \dots, 5.$$

Устойчивость частного решения определяется устойчивостью линеаризованной системы (6). Подставив в якобиан системы решение, соответствующее конкретной особой точке, получим матрицу, не зависящую от времени t , такая матрица называется матрицей линеаризации. Решив задачу на собственные числа этой матрицы, можно судить об устойчивости решения: если действительные части всех собственных чисел матрицы линеаризации имеют отрицательный знак, то особая точка устойчива по отношению к малому возмущению. Действительные части собственных чисел матрицы линеаризации также называются ляпуновскими характеристическими показателями (ЛХП).

Тривиальное решение системы устойчиво при $r < 1$, и теряет устойчивость, при $r > 1$. Это означает, что бесконечно малое возмущение поля внутри резонатора начинает нарастать при $r > 1$, что, в свою очередь, является условием развития генерации. Такой вывод очевиден и без проведения какого-либо анализа, стоит лишь вспомнить, что $r = 1$ соответствует порогу генерации.

Согласно проведенному линейному анализу системы (4) можно утверждать, что устойчивыми при $r > 1$ являются 5 особых точек. Четыре из них – особые точки с одиночными бегущими волнами, установившимися в результате конкуренции. Спектр ЛХП не содержит положительных членов. Это означает, что режимы, в которых устанавливается одна поперечная бегущая по апертуре волна и однородный профиль интенсивности устойчивы к малым возмущениям. В каком из четырех направлений будет бежать волна, победившая в конкуренции, зависит от начальных условий.

Аналогично обстоит дело с особой точкой, соответствующей стационарной решетке вихрей. Спектр ЛХП состоит только из отрицательных

показателей. Другими словами стационарная решетка вихрей – устойчивое по отношению к малым возмущениям решение системы (2).

Решение, соответствующее стоячим поперечным волнам, имеет почти все положительные ляпуновские показатели. То есть, моды пустого плоскопараллельного резонатора неустойчивы по отношению к малым возмущениям в системе (2).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен краткий обзор современных экспериментальных результатов, в которых описываются как неподвижные, так и подвижные решетки оптических вихрей, наблюдаемые в широкоапертурных лазерах. Численным решением системы лазерных уравнений (1) получены решения в виде стационарной решетки вихрей. Показано, что при увеличении накачки решетка вихрей становится нестационарной – вихри начинают осциллировать подобно молекулам в узлах кристаллической решетки. При значительном превышении накачки над порогом решетка вихрей “плавится”, наблюдается переход к пространственно-временному хаосу – оптической турбулентности. Аналитически рассмотрена динамика лазера при параметрах, позволяющих адиабатически исключить уравнения для поляризованности и инверсии населенности, и показано, что поперечная мода плоскопараллельного резонатора является неустойчивой структурой. В то же время решетка вихрей является устойчивой по отношению к малым возмущени-

ям в слабонелинейном приближении. В дальнейшем мы предполагаем изучить механизмы образования нестационарной решетки с осциллирующими вихрями. Также будет изучен механизм разрушения решетки и сценарий перехода к пространственно-временному хаосу. Кроме того отдельно будет проведено исследование влияние конечности времени релаксации поляризованности и инверсии населенности на динамику широкоапертурных лазеров.

Работа частично финансирована НИР ГР №01201156352 и Государственным заданием ВУЗам на 2012 год.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eduardo Cabrera, Oscar G. Calderon, Sonia Melle, Guerre J.M.* Development of spatial turbulence from boundary-controlled patterns in class-b lasers// Phys. Rev. A. 2006. V. 73. 053820.
2. *Chen Y.F. and Lan Y.P.* Spontaneous transverse pattern formation in a microchip laser excited by a doughnut pump profile// Appl. Phys. B. 2002. V. 75. P. 453-456.
3. *D'Alessandro G., Papoff F., Louvergneaux E., Glorieux P.* Average patterns and coherent phenomena in wide aperture laser// Phys. Rev. E, 2004. V. 69. 066212.
4. *Oscar G. Calderon, Eduardo Cabrera, Anton M., Guerra J.M.* Local-field effects in pattern formation in large-aspect-ratio lasers// Phys. Rev. A. 2003. V. 67. 043812
5. *Jacobsen P.K., Moloney J.V., Newell A.C., Indik R.* Space-time dynamics of wide-gain-section lasers// Phys. Rev. A. 1992. V. 45. №11. 8129.
6. *Ананьев Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки, М.: Наука, 1990. 328с.
7. *Staliunas K., Sanchez-Morsillo V.J.* Transverse patterns in nonlinear optical resonators// STMP 183. 2003.

THE VORTEX LATTICES IN LARGE-APERTURE LASERS

© 2012 A.A. Krents^{1,2}, D.A. Anchikov¹

¹Samara Branch of P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences

²Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov

The work describes the dynamics of wide-aperture laser with taking into account of transverse distribution of the electromagnetic field in cavity. The solutions in form of the vortex lattices are obtained numerically and analytically. We show that the vortex lattices can be fixed and moving (the vortices oscillates just as molecules oscillates in crystal lattice). With the exceeding of pump power over threshold the vortex lattices collapse and “chaotic gas of vortices” occur, the optical turbulence is observed.

Key words: modeling, dynamics, wide-aperture laser, electromagnetic field, cavity, vortex lattices.