УДК 533.6

# МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ *k-ε* В ЗАДАЧЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛАХ

© 2012 Е.И. Куркин, В.Г. Шахов

Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 05.04.2012

В статье использована модель турбулентности $k-\varepsilon$ для решения задач пограничного слоя на вращающихся телах. Модель реализована в системе MATLAB и показала хорошее соответствие с результатами экспериментов Парра и Лутандера-Ридберга.

Ключевые слова: $k-\varepsilon$ модели турбулентности, пограничный слой, вращающиеся тела.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим пограничный слой при осевом обтекании осесимметричного тела, вращающегося вокруг оси симметрии. Координата $x$ измеряется вдоль направляющей тела вращения, $y$ - направлена по нормали к поверхности тела, $z$ - окружная координата (рис. 1).

Пограничный слой подчиняется уравнению неразрывности, а также уравнениям импульсов в продольном и меридиональном направлениях [2].

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{V_x}{R}\frac{dR}{dx}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0,$$
$$V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}-\frac{V_z^2}{R}\frac{dR}{dx}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (1)$$
$$V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+\frac{V_xV_z}{R}\frac{dR}{dx}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y},$$

где $V_x,V_y,V_z$ – компоненты вектора скорости жидкости, $U(x)$ – скорость внешнего (невязкого) обтекания тела, $R(x)$ – радиус тела вращения, $\tau_{xy}=\mu_\Sigma\frac{\partial V_x}{\partial y}$, $\tau_{zy}=\mu_\Sigma\frac{\partial V_z}{\partial y}$ – касательные напряжения между слоями жидкости. Вязкость $\mu_\Sigma$ определяется как сумма молекулярной $\mu$ и турбулентной $\mu_t$ вязкостей.

Модель $k-\varepsilon$ добавляет в систему еще два уравнения – кинетической энергии турбулентности $K$ и диссипации турбулентности $E$ [3]. В случае тонкого пограничного слоя несжимаемой жидкости уравнения модели $k-\varepsilon$ могут быть представлены в виде:

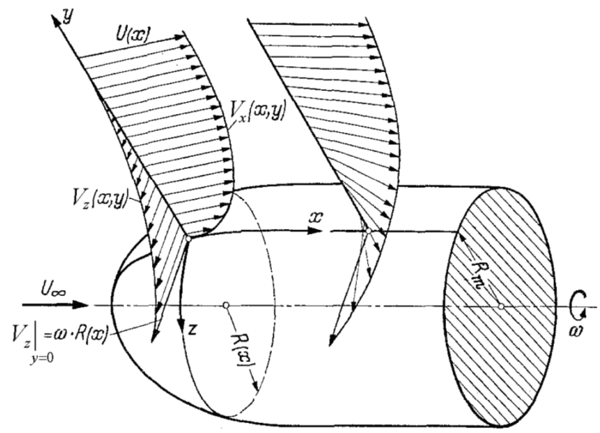


**Рис. 1.** Схема обтекания жидкостью вращающегося осесимметричного тела [1]

$$V_x\frac{\partial K}{\partial x}+V_y\frac{\partial K}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\nu+\frac{\varepsilon_m}{\sigma_k}\right)\frac{\partial K}{\partial y}\right]+$$
$$+\varepsilon_m\left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)^2\right]-E;$$
$$V_x\frac{\partial E}{\partial x}+V_y\frac{\partial E}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\nu+\frac{\varepsilon_m}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial E}{\partial y}\right]+ \quad (2)$$
$$+c_{\varepsilon1}\frac{E}{K}\varepsilon_m\left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)^2\right]-c_{\varepsilon2}\frac{E^2}{K},$$

где $\nu=\frac{\mu}{\rho}$, $\varepsilon_m=\frac{\mu_t}{\rho}=c_\mu\frac{K^2}{E}$, параметры $c_\mu=0.09,\ c_{\varepsilon1}=1.44,\ c_{\varepsilon2}=1.92,\ \sigma_k=1,\ \sigma_\varepsilon=1.3$.

Куркин Евгений Игоревич, аспирант кафедры аэрогидродинамики. E-mail: eugene.kurkin@mail.ru
Шахов Валентин Гаврилович, кандидат технических наук, профессор, заведующий кафедрой аэрогидродинамики. E-mail: shakhov@ssau.ru

Прилипание жидкости к телу вращения вместе с известным законом невязкого обтекания определяет граничные условия:

$$y = 0: \quad V_x = V_y = 0, V_z = R\omega;$$

$$y = y_e: \quad V_x = U(x), V_z = 0,$$

где $y_e$ – толщина пограничного слоя.

Модель $k-\varepsilon$ имеет вычислительные особенности на границе $y = 0$. Поэтому граничные условия для нее задаются на внешней границе и на границе, расположенной на некотором расстоянии $y_0$ от поверхности тела. Учитывая это, граничные условия для уравнений $k-\varepsilon$ модели турбулентности можно записать в виде:

$$y = y_0: \; E_0 = (\varepsilon_m)_{CS}\left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)_0^2\right],$$

$$K_0 = \sqrt{E_0 \frac{(\varepsilon_m)_{CS}}{c_\mu}};$$

$$y = y_e: \; \frac{dK_e}{dx} = -\frac{E_e}{U(x)}, \; \frac{dE_e}{dx} = -c_{\varepsilon 2}\frac{E_e^2}{K_e U(x)},$$

где $(\varepsilon_m)_{CS} = \dfrac{\mu_t}{\rho}$ – турбулентная вязкость, определяемая в пристенной области $y \in [0, y_0]$ по какому либо альтернативному закону турбулентности, к примеру по модернизированным формулам модели Себеси-Смита [4].

## 2. МАТРИЧНЫЙ ВИД УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Вводя функцию тока $\psi(x, y)$, безразмерную переменную типа переменой Блазиуса $\eta = y\sqrt{U/\nu x}$ и представляя $\psi = R(x)\sqrt{\nu x U(x)} f(x,\eta)$, $V_z = \omega R g(x,\eta)$, систему (1) приводим к виду [4]:

$$u = f_\eta, \qquad v = f_{\eta\eta}, \qquad p = g_\eta, \qquad (3)$$

$$(bv)_\eta + m_1 f v + m_2\left(1-u^2\right) + m_3\Omega^2 g^2 = $$
$$= x(uu_x - v f_x), \; (4)$$

$$(bp)_\eta + m_1 f p - 2m_3 u g = x(u g_x - p f_x).$$

где $f, g$ – безразмерные функции. Нижние индексы $\eta$ и $x$ обозначают дифференцирование по соответствующим переменным.

Уравнения турбулентности можно представить в безразмерном виде, записывая, :

$$k(x,\eta) = \frac{1}{U_e^2}K(x,y), \; \varepsilon(x,\eta) = \frac{x}{U_e^3}E(x,y),$$

$$k_\eta = s, \qquad \varepsilon_\eta = q,$$

$$(b_2 s)_\eta + m_1 f s + \varepsilon_m^+\left[v^2 + \Omega^2 p^2\right] - \varepsilon - 2m_2 u k = $$
$$= x(u k_x - s f_x),$$

$$(b_3 q)_\eta + m_1 f q + c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\varepsilon_m^+\left[v^2 + \Omega^2 p^2\right] -$$
$$- c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} - (3m_2 - 1)u\varepsilon = x(u\varepsilon_x - q f_x).$$

Граничные условия системы примут вид:

$$\eta = 0: \quad f = 0, \qquad u = 0, \qquad g = 1;$$

$$\eta = \eta_0: \; \varepsilon = \left(\varepsilon_m^+\right)_{CS}\left[v^2 + \Omega^2 p^2\right],$$

$$k = \sqrt{\frac{\varepsilon \cdot \left(\varepsilon_m^+\right)_{CS}}{\mathrm{Re}_x c_\mu}}; \quad (5)$$

$$\eta = \eta_e: \; u = 1, \quad g = 0, \quad x\frac{\partial k}{\partial x} + \varepsilon + 2m_2 k = 0,$$

$$x\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} + (3m_2 - 1)\varepsilon = 0.$$

В этих уравнениях введены обозначения:

$$b = 1 + \varepsilon_m^+, \; \Omega = \frac{\omega R}{U}, \quad m_2 = \frac{U'}{U}x, \quad m_3 = \frac{R'}{R}x,$$

$m_1 = m_3 + \dfrac{m_2 + 1}{2}$, $\mathrm{Re}_x = \dfrac{Ux}{\nu}$, безразмерная турбулентная вязкость $\varepsilon_m^+$ в пристенной области вычисляется по алгебраическим соотношениям

$\varepsilon_m^+\big|_{\eta<\eta_0} = \left(\varepsilon_m^+\right)_{CS} = \dfrac{(\varepsilon_m)_{CS}}{\nu}$, а при $\eta > \eta_0$ используется соотношение модели $k-\varepsilon$:

$$\varepsilon_m^+ = c_\mu \mathrm{Re}_x \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Разделение пограничного слоя на пристенную область, в которой турбулентная вязкость описывается алгебраической моделью, и область, где реализуется $k-\varepsilon$ модель турбулентности, удобно проводить, вводя дополнительную переменную, характеризующую коэффициент сопротивления трения на стенке. Такой подход, к примеру, предложен Себеси [3]. Границу $\eta_0$ выберем исходя из постоянства величины $y_0^+ = \dfrac{y_0 u_\tau}{\nu} = 50$, где $u_\tau = w_0 U(x)$. Для определения $\eta_0$ важно значение $w$ на стенке твердого тела $(w_0)$, остальные значения не рассматриваются, а производная $w$ по толщине пограничного слоя считается равной 0 $(w_\eta = 0)$. Величина $w_0$ может быть добавлена в список

переменных модели в виде $w_0 = \dfrac{\sqrt[4]{v_0^2 + \Omega^2 p_0^2}}{\mathrm{Re}_x^{1/4}}$, а

граница $\eta_0$ в таком случае рассчитывается как

$$\eta_0 = y_0^+ \frac{1}{w_0 \sqrt{\mathrm{Re}_x}}.$$

Система уравнений в частных производных решается методом сеток с использованием конечно-разностной схемы “прямоугольник”. Получившиеся нелинейные уравнения линеаризуются по Ньютону [5]. Следующая итерация переменных $f, u, v, g, p, k, s, \varepsilon, q, w$ находится в виде: $f_j^{i+1} = f_j^i + \delta f_j^i$.

Итоговую систему линейных алгебраических уравнений представим в матричном виде:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{r}. \qquad (7)$$

Матрица коэффициентов системы (7) имеет блочную трехдиагональную структуру:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{C}_0 & & & & & \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \mathbf{B}_j & \mathbf{A}_j & \mathbf{C}_j & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \mathbf{B}_{J-1} & \mathbf{A}_{J-1} & \mathbf{C}_{J-1} \\ & & & & & \mathbf{B}_J & \mathbf{A}_J \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_0 \\ \boldsymbol{\delta}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{J-1} \\ \boldsymbol{\delta}_J \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_j \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{J-1} \\ \mathbf{r}_J \end{bmatrix}.$$

Векторы переменных

$$\boldsymbol{\delta}_j = \left[\delta f_j \;\; \delta u_j \;\; \delta v_j \;\; \delta g_j \;\; \delta p_j \;\; \delta k_j \;\; \delta s_j \;\; \delta\varepsilon_j \;\; \delta q_j \;\; \delta w_j\right]^T,$$
$j = 0, \ldots, J$.

Блоки $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j$ – матрицы размером 10 х 10, блоки $\mathbf{r}_j$ - матрицы 10 х 1. Матрицы разрежены. Значения их ненулевых элементов приведены в Приложении.

Для начала работы итерационного метода приближений требуется задания начальных профилей используемых переменных. Начальные профили $f, u, v, g, p$ могут быть определены как начальные профили для ламинарного течения [4]. Профили же $k$, $s$, $\varepsilon$, $q$ можно задать следующим образом:

$$k = \frac{\left(\varepsilon_m^+\right)_{CS}}{a_1 \sqrt{\mathrm{Re}_x}} \sqrt{v^2 + \Omega^2 p^2},$$

$$\varepsilon = c_\mu \left(\varepsilon_m^+\right)_{CS} \frac{v^2 + \Omega^2 p^2}{a_1^2}, \qquad s = k_\eta, \;\; q = \varepsilon_\eta.$$

## 3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА И СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Реализация предложенной модели проведена в системе MATLAB в модернизированной программе Vertel.

Результаты расчета для тела Парра [1] при $\Omega = 1, \ldots, 4$ и $\mathrm{Re} = 3 \cdot 10^5 \ldots 9 \cdot 10^5$ представлены на рис. 2, 3. Сравнение рассчитанных профилей пограничного слоя с данными эксперимента [1] показывает хорошее соответствие.

Сравнение толщины вытеснения импульса $\theta_x = \int_0^{y_e} u(1-u)\,dy$ на рис. 4 и коэффициента мо-

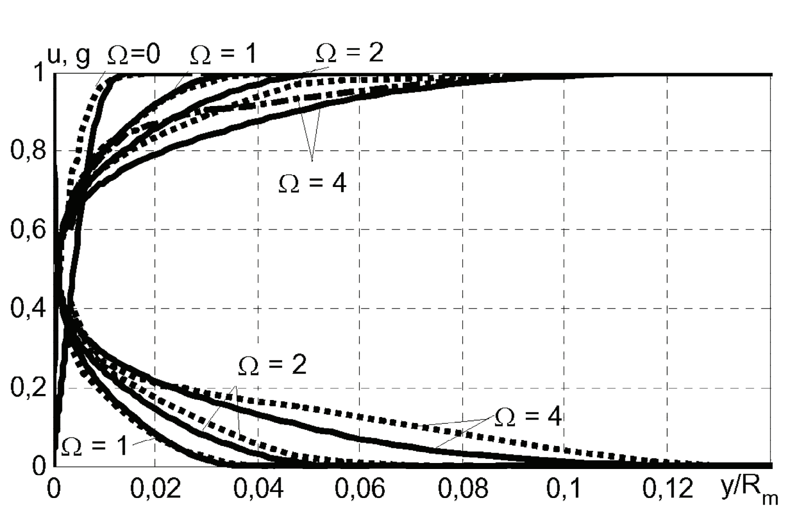


**Рис. 2.** Сравнение безразмерных профилей меридиональной u и окружной g компонент скорости пограничного слоя при различных скоростях вращения $\Omega$, $\mathrm{Re} = 3 \cdot 10^5$, $x / R_m = 3{,}1$. Сплошная линия – расчеты, пунктир – эксперимент Парра [1]

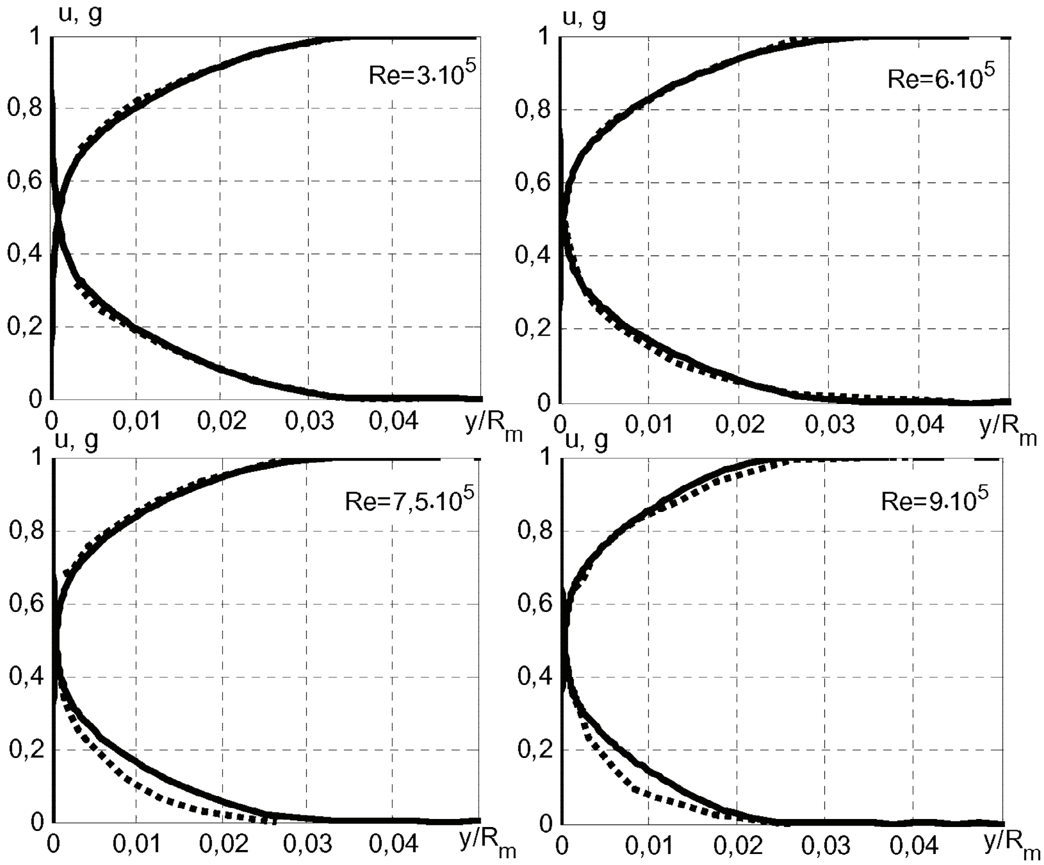


**Рис. 3.** Сравнение безразмерных профилей меридиональной u и окружной g компонент скорости пограничного слоя при различных числах Рейнольдса, $\Omega = 1$, $x / R_m = 3{,}1$. Сплошная линия – расчеты, пунктир – эксперимент Парра [1]

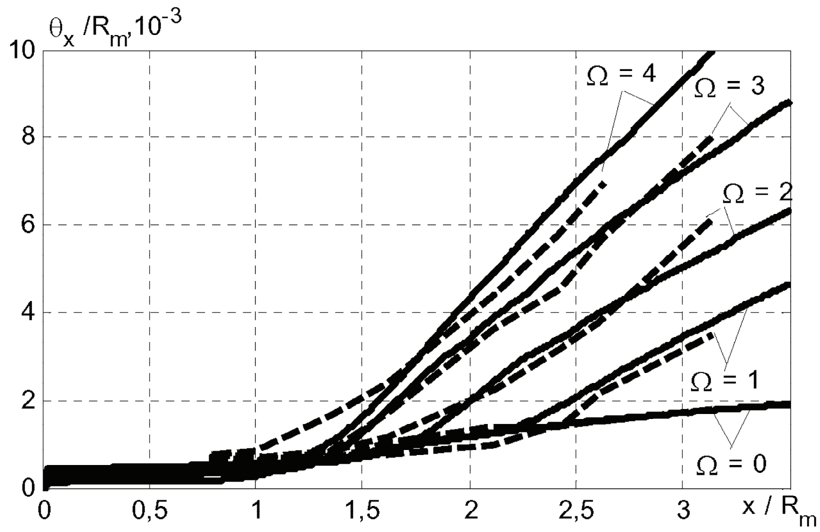


**Рис. 4.** Сравнение толщины вытеснения импульса в меридиональном направлении, $\mathrm{Re} = 3 \cdot 10^5$, $x / R_m = 3{,}1$. Сплошная линия – расчеты, пунктир – эксперимент Парра [1]

мента силы трения в окружном направлении $C_M = \dfrac{M}{\frac{1}{2}\rho\Omega^2 R_m^5}$ на рис. 5 также показывают хорошее соответствие расчета и результатов эксперимента.

Хорошее соответствие результатов эксперимента Лутандера-Ридберга [2] по исследованию положения точки отрыва потока на вращающемся в осевом направлении шаре при $\mathrm{Re} = 1{,}6 \cdot 10^6$ с результатами моделирования (рис. 6) подтверждает возможность использования описанной модели и ее программной реализации в системе

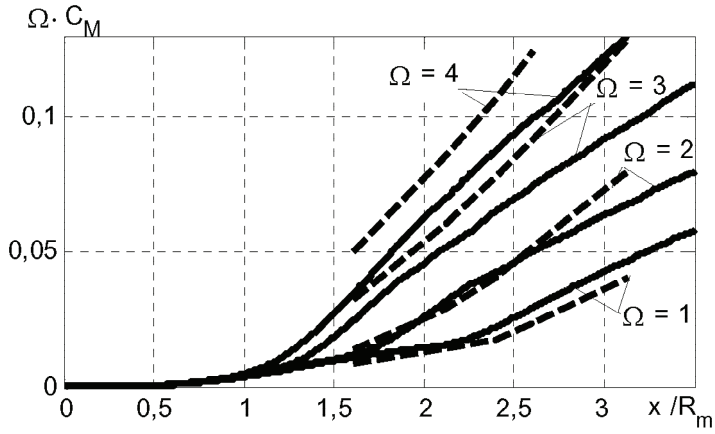


**Рис. 5.** Сравнение коэффициента момента трения в окружном направлении, $\mathrm{Re} = 3 \cdot 10^5$.
Сплошная линия – расчеты, пунктир – эксперимент Парра [1]

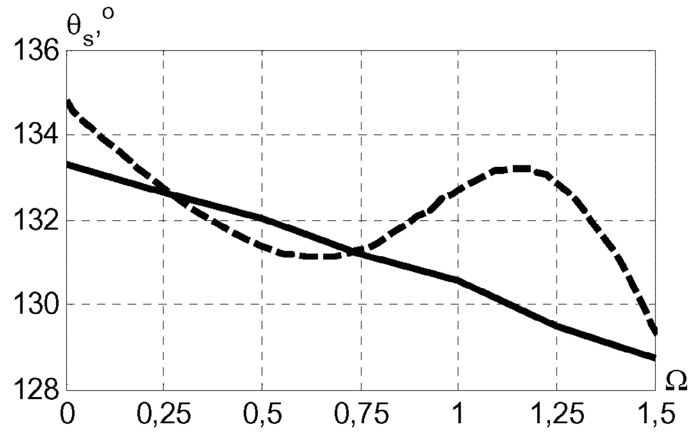


**Рис. 6.** Сравнение положения точки отрыва потока на вращающемся шаре:
сплошная линия – расчет, пунктир – эксперимент Лутандера-Ридберга [2]

MATLAB для нахождения точек отрыва потока в задачах вращающихся осесимметричных тел в осевом потоке.

## 4. ВЫВОДЫ

Модель турбулентности $k-\varepsilon$ представлена в форме, предназначенной для описания осесимметричного пограничного слоя на вращающихся телах, и реализована в системе MATLAB. Сравнение результатов расчета по этой модели с данными экспериментов Парра и Лутандера-Ридберга показывает хорошее соответствие, что позволяет использовать модель турбулентности для решения задач пограничного слоя на вращающихся телах, в том числе до точки отрыва потока.

## ПРИЛОЖЕНИЕ. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Коэффициенты зависят от значения координаты $\eta_j$, определяющей положение точки сетки на толщине пограничного слоя.

Элементы матриц $\mathbf{A}_0, \mathbf{C}_0$ и $\mathbf{r}_0$, определим из условий на поверхности тела вращения:

$$\mathrm{A}_0^{1,1} = \mathrm{A}_0^{2,2} = \mathrm{A}_0^{3,4} = -\mathrm{A}_0^{5,2} = -\mathrm{A}_0^{6,4} = -\mathrm{A}_0^{7,6} = \\ = -\mathrm{A}_0^{8,7} = -\mathrm{A}_0^{9,8} = -\mathrm{A}_0^{10,9} = 1,$$

$$\mathrm{A}_0^{5,3} = \mathrm{A}_0^{5,3} = -h_1/2,\ \mathrm{A}_0^{4,3} = 2v_0,\quad \mathrm{A}_0^{4,5} = 2\Omega^2 p_0,$$

$$\mathrm{A}_0^{4,5} = -4\,\mathrm{Re}_x\, w_0^3.$$

$$\mathrm{C}_0^{5,2} = \mathrm{C}_0^{6,4} = \mathrm{C}_0^{7,6} = \mathrm{C}_0^{8,7} = \mathrm{C}_0^{9,8} = \mathrm{C}_0^{10,9} = 1,$$

$$\mathrm{C}_0^{5,3} = \mathrm{C}_0^{6,5} = -h_1/2.$$

$$\mathrm{r}_0^4 = \mathrm{Re}_x\, w_0^4 - v_0^2 - \Omega^2 p_0^2,\ \mathrm{r}_0^5 = \left(r_4\right)_0,\ \mathrm{r}_0^6 = \left(r_5\right)_0.$$

Уравнения импульсов задаются одинаково при всех $j = 1,\ldots,J$, поэтому первые 4 строки матриц $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j$ и $\mathbf{r}_j$ будут одинаковы во всех областях пограничного слоя:

$$\mathrm{A}_j^{1,10} = \mathrm{A}_j^{2,1} = 1,\quad \mathrm{A}_j^{2,2} = -h_j/2,\quad \mathrm{A}_j^{3,1} = \left(s_3\right)_j,$$

$$\mathrm{A}_j^{3,2} = \left(s_5\right)_j,\ \mathrm{A}_j^{3,3} = \left(s_1\right)_j,\ \mathrm{A}_j^{3,4} = \left(s_7\right)_j,$$

$$\mathrm{A}_j^{4,1} = \left(\beta_3\right)_j,\ \mathrm{A}_j^{4,2} = \left(\beta_5\right)_j,\ \mathrm{A}_j^{4,3} = \left(\beta_9\right)_j,$$

$A_j^{4,4}=(\beta_7)_j$, $A_j^{4,5}=(\beta_1)_j$, $B_j^{1,10}=B_j^{2,1}=-1$,

$B_j^{2,2}=-h_j/2$, $B_j^{3,1}=(s_4)_j$, $B_j^{3,2}=(s_6)_j$,

$B_j^{3,3}=(s_2)_j$, $B_j^{3,4}=(s_8)_j$, $B_j^{4,1}=(\beta_4)_j$,

$B_j^{4,2}=(\beta_6)_j$, $B_j^{4,3}=(\beta_{10})_j$, $B_j^{4,4}=(\beta_8)_j$,

$B_j^{4,5}=(\beta_2)_j$ . $r_j^1=0$, $r_j^2=(r_1)_j$, $r_j^3=(r_2)_j$, $r_j^4=(r_3)_j$, первые четыре строки матриц $\mathbf{C}_j$ - нулевые.

$(r_1),...,(r_5)_j$, а также $(s_1)_j,...,(s_8)_j$, $(\beta_1)_j,...,(\beta_{10})_j$ соответствуют коэффициентам линеаризации уравнений импульсов в меридиональном и окружном направлениях [4].

Задание модели турбулентности в различных областях пограничного слоя приводит к определению нижних шести строк матриц $\mathbf{A}_j,\mathbf{B}_j,\mathbf{C}_j,\mathbf{r}_j$ в каждой из областей отдельно:

- пристенная область, в которой турбулентность описывается алгебраической моделью, $j=1,...,j_0-1$:

$A_j^{5,2}=A_j^{6,4}=A_j^{7,6}=A_j^{8,7}=A_j^{9,8}=A_j^{10,9}=-1$,

$A_j^{5,3}=A_j^{6,5}=A_j^{7,7}=A_j^{9,9}=-h_{j+1}/2$, ,

$C_j^{5,3}=C_j^{6,5}=C_j^{7,7}=C_j^{9,9}=-h_{j+1}/2$ , $r_j^5=(r_4)_j$,

$C_j^{5,2}=C_j^{6,4}=C_j^{7,6}=C_j^{8,7}=C_j^{9,8}=C_j^{10,9}=1$,

$r_j^6=(r_5)_j$ $r_j^7=(r_{dk})_j$, $r_j^9=(r_{de})_j$, коэффициенты матриц нижних шести строк $\mathbf{B}_j$ нулевые, $(r_{dk})_{j-1}=k_{j-1}-k_j+h_j s_{j-1/2}$,

$(r_{de})_{j-1}=\varepsilon_{j-1}-\varepsilon_j+h_j q_{j-1/2}$.

- граница между различными моделями турбулентности $j=j0$. На этом слое матрица $\mathbf{B}_{j0}$ вычисляется по правилам пристенной области, матрица $\mathbf{C}_{j0}$ вычисляется по правилам для области пограничного слоя с $k-\varepsilon$ моделью турбулентности, а 5-10 строки матриц $\mathbf{A}_{j0}$ и $\mathbf{r}_{j0}$ имеют вид:

$A_{j0}^{7,2}=A_{j0}^{8,4}=A_{j0}^{9,6}=A_{j0}^{10,8}=-1$,

$A_{j0}^{7,3}=A_{j0}^{8,5}=A_{j0}^{9,7}=A_{j0}^{10,9}=-h_{j+1}/2$,

$A_{j0}^{5,3}=D_1$, $A_{j0}^{5,5}=D_2$, $A_{j0}^{5,6}=D_3$, $A_{j0}^{5,8}=D_4$,

$A_{j0}^{6,3}=D_5$, $A_{j0}^{6,5}=D_6$, $A_{j0}^{6,6}=D_7$, $A_{j0}^{6,8}=D_8$,

$r_{j0}^5=(r_{D1})_{j0}$, $r_{j0}^6=(r_{D2})_{j0}$, $r_{j0}^7=(r_4)_{j0}$,

$r_{j0}^8=(r_5)_{j0}$, $r_{j0}^9=(r_{dk})_{j0}$, $r_{j0}^{10}=(r_{de})_{j0}$,

где $D_1=\varepsilon_{js}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\varepsilon_m^+\right)_{CS}$, $D_2=\varepsilon_{j0}\dfrac{\partial}{\partial p}\left(\varepsilon_m^+\right)_{CS}$,

$D_3=-2\,\mathrm{Re}_x\,c_\mu k_{j0}$, $D_4=\left(\varepsilon_m^+\right)_{CS}$,

$D_5=2\,\mathrm{Re}_x\,c_\mu k_{j0}^2 v_{j0}$, $D_6=2\,\mathrm{Re}_x\,c_\mu k_{j0}^2\Omega^2 p_{j0}$,

$D_7=2\,\mathrm{Re}_x\,c_\mu k_{j0}\left[v_{j0}^2+\Omega^2 p_{j0}^2\right]$, $D_8=-2\varepsilon_{j0}$,

$(r_{D1})_{j0}=\mathrm{Re}_x\,c_\mu k_{j0}^2-\left(\varepsilon_m^+\right)_{CS}\varepsilon_{j0}$

$(r_{D2})_{j0}=\varepsilon_{j0}^2-\mathrm{Re}_x\,c_\mu k_{j0}^2\left[v_{j0}^2+\Omega^2 p_{j0}^2\right]$.

- область пограничного слоя с $k-\varepsilon$ моделью турбулентности, $j=j_0+1,...,J-1$:

$A_j^{7,2}=A_j^{8,4}=A_j^{9,6}=A_j^{10,8}=-1$,

$A_j^{7,3}=A_j^{8,5}=A_j^{9,7}=A_j^{10,9}=-h_{j+1}/2$;

$A_j^{5,k}=(\alpha_{2k-1})_j$, $A_j^{6,k}=(\varphi_{2k-1})_j$,

$B_j^{6,k}=(\varphi_{2k})_j$, $B_j^{5,k}=(\alpha_{2k})_j$, $k=1,...,9$;

$C_j^{7,3}=C_j^{8,5}=C_j^{9,7}=C_j^{10,9}=-h_{j+1}/2$,

$C_j^{7,2}=C_j^{8,4}=C_j^{9,6}=C_j^{10,7}=1$, $r_j^5=(r_K)_j$,

$r_j^6=(r_E)_j$, $r_j^7=(r_4)_j$, $r_j^8=(r_5)_j$, $r_j^9=(r_{dk})_j$, $r_j^{10}=(r_{de})_j$,

где коэффициенты уравнения $k$:

$$(\alpha_1)_j=\frac{m_1^n}{2}s_j^n+\frac{x^n}{2}s_{j-1/2}^n\frac{\partial}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j^n,$$

$$(\alpha_2)_j=\frac{m_1^n}{2}s_{j-1}^n+\frac{x^n}{2}s_{j-1/2}^n\frac{\partial}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{j-1}^n,$$

$$(\alpha_3)_j=-m_2^n k_j^n-\frac{x^n}{2}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_{j-1/2}^n,$$

$$(\alpha_4)_j=-m_2^n k_{j-1}^n-\frac{x^n}{2}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_{j-1/2}^n,$$

$$(\alpha_5)_j=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_j^n,\ (\alpha_6)_j=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{j-1}^n,$$

$$(\alpha_9)_j=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_j^n,\ (\alpha_{10})_j=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_{j-1}^n,$$

$$(\alpha_{11})_j = h_j^{-1} s_j^n \left(\frac{\partial b_2}{\partial k}\right)_j^n + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial k}\right)_j^n - m_2^n u_j^n - \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial k}\right)_j^n - \frac{x^n}{2} u_{j-1/2}^n \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_j^n,$$

$$(\alpha_{12})_j = -h_j^{-1} s_{j-1}^n \left(\frac{\partial b_2}{\partial k}\right)_{j-1}^n + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial k}\right)_{j-1}^n - \\ -m_2^n u_{j-1}^n - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial k}\right)_{j-1}^n - \frac{x^n}{2} u_{j-1/2}^n \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_{j-1}^n,$$

$$(\alpha_{13})_j = h_j^{-1} (b_2)_j^n + \frac{m_1^n}{2} f_j^n + \frac{x^n}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{j-1/2}^n,$$

$$(\alpha_{14})_j = -h_j^{-1} (b_2)_{j-1}^n + \frac{m_1^n}{2} f_{j-1}^n + \frac{x^n}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{j-1/2}^n,$$

$$(\alpha_{15})_j = h_j^{-1} s_j^n \left(\frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon}\right)_j^n + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}\right)_j^n - \left(\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}\right)_j^n\right],$$

$$(\alpha_{16})_j = -h_j^{-1} s_{j-1}^n \left(\frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon}\right)_{j-1}^n + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}\right)_{j-1}^n - \left(\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}\right)_j^n\right],$$

$$(\alpha_7)_j = (\alpha_8)_j = (\alpha_{17})_j = (\alpha_{18})_j = 0,$$

$$(r_K)_j = -\left[(b_2 s)_j^n - (b_2 s)_{j-1}^n\right] h_j^{-1} - \\ -\left[P_{j-1/2}^n - Q_{j-1/2}^n - 2m_2^n (uk)_{j-1/2}^n + m_1^n (fs)_{j-1/2}^n\right] + \\ + x^n \left(u_{j-1/2}^n \left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_{j-1/2}^n - s_{j-1/2}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{j-1/2}^n\right),$$

$$b_2 = 1 + \frac{\varepsilon_m^+}{\sigma_k} = 1 + \frac{c_\mu}{\sigma_k}\mathrm{Re}_x \frac{k^2}{\varepsilon},\ P = c_\mu \mathrm{Re}_x \frac{k^2}{\varepsilon}\left[v^2 + \Omega^2 p^2\right],$$

$$Q = \varepsilon,\ \frac{\partial b_2}{\partial k} = \frac{c_\mu}{\sigma_k}\mathrm{Re}_x \frac{2k}{\varepsilon},\ \frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon} = \frac{c_\mu}{\sigma_k}\mathrm{Re}_x \frac{-k^2}{\varepsilon^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon} = 1,\ \frac{\partial P}{\partial k} = 2c_\mu \mathrm{Re}_x \frac{k}{\varepsilon}\left[v^2 + \Omega^2 p^2\right],$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = c_\mu \mathrm{Re}_x \frac{-k^2}{\varepsilon^2}\left[v^2 + \Omega^2 p^2\right],$$

$$\frac{\partial P}{\partial v} = 2c_\mu \mathrm{Re}_x \frac{k^2}{\varepsilon} v,\ \frac{\partial P}{\partial p} = 2c_\mu \mathrm{Re}_x \frac{k^2}{\varepsilon}\Omega^2 p.$$

уравнение $\varepsilon$:

$$(\varphi_1)_j = \frac{m_1^n}{2} q_j^n + \frac{x^n}{2} q_{j-1/2}^n \frac{\partial}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j^n,$$

$$(\varphi_2)_j = \frac{m_1^n}{2} q_{j-1}^n + \frac{x^n}{2} q_{j-1/2}^n \frac{\partial}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{j-1}^n,$$

$$(\varphi_3)_j = -\frac{x^n}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{j-1/2}^n - \frac{1}{2}\left(3m_2^n - 1\right)\varepsilon_j^n,$$

$$(\varphi_4)_j = -\frac{x^n}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{j-1/2}^n - \frac{1}{2}\left(3m_2^n - 1\right)\varepsilon_{j-1}^n,$$

$$(\varphi_5)_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_1}{\partial v}\right)_j^n,\ (\varphi_6)_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_1}{\partial v}\right)_{j-1}^n,$$

$$(\varphi_9)_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_1}{\partial p}\right)_j^n,\ (\varphi_{10})_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_1}{\partial p}\right)_{j-1}^n,$$

$$(\varphi_{11})_j = h_j^{-1} q_j^n \left(\frac{\partial b_3}{\partial k}\right)_j^n + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P_1}{\partial k}\right)_j^n - \left(\frac{\partial Q_1}{\partial k}\right)_j^n\right],$$

$$(\varphi_{12})_j = -h_j^{-1} q_{j-1}^n \left(\frac{\partial b_3}{\partial k}\right)_{j-1}^n + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P_1}{\partial k}\right)_{j-1}^n - \left(\frac{\partial Q_1}{\partial k}\right)_{j-1}^n\right],$$

$$(\varphi_{15})_j = h_j^{-1} q_j^n \left(\frac{\partial b_3}{\partial \varepsilon}\right)_j^n - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \varepsilon}\right)_j^n - \\ -\frac{1}{2}\left(3m_2^n - 1\right)u_j^n - \frac{x^n}{2} u_{j-1/2}^n \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_j^n,$$

$$(\varphi_{16})_j = -h_j^{-1} q_{j-1}^n \left(\frac{\partial b_3}{\partial \varepsilon}\right)_{j-1}^n - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \varepsilon}\right)_{j-1}^n - \\ -\frac{1}{2}\left(3m_2^n - 1\right)u_{j-1}^n - \frac{x^n}{2} u_{j-1/2}^n \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{j-1}^n,$$

$$(\varphi_{17})_j = h_j^{-1} (b_3)_j^n + \frac{m_1^n}{2} f_j^n + \frac{x^n}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{j-1/2}^n,$$

$$(\varphi_{18})_j = -h_j^{-1} (b_3)_{j-1}^n + \frac{m_1^n}{2} f_{j-1}^n + \frac{x^n}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{j-1/2}^n,$$

$$(\varphi_7)_j = (\varphi_8)_j = (\varphi_{13})_j = (\varphi_{14})_j = 0,$$

$$(r_E)_j = -\left[(b_3 q)_j^n - (b_3 q)_{j-1}^n\right] h_j^{-1} - \left[(P_1)_{j-1/2}^n - \right. \\ \left. -(Q_1)_{j-1/2}^n + m_1^n (fq)_{j-1/2}^n - \left(3m_2^n - 1\right)(u\varepsilon)_{j-1/2}^n\right] + \\ + x^n \left(u_{j-1/2}^n \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{j-1/2}^n - q_{j-1/2}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{j-1/2}^n\right),$$

$$b_3 = 1 + \frac{\varepsilon_m^+}{\sigma_\varepsilon} = 1 + \frac{c_\mu}{\sigma_\varepsilon}\mathrm{Re}_x \frac{k^2}{\varepsilon},$$

$$P_1 = c_{\varepsilon 1} c_\mu \mathrm{Re}_x\, k\left[v^2 + \Omega^2 p^2\right],\ Q_1 = c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k},$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \varepsilon} = 2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{k},\ \frac{\partial Q_1}{\partial k} = -c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k^2},$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial \varepsilon} = 0,\ \frac{\partial P_1}{\partial v} = 2c_{\varepsilon 1}c_\mu \operatorname{Re}_x kv,$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial p} = 2c_{\varepsilon 1}c_\mu \operatorname{Re}_x k\Omega^2 p,$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial k} = c_{\varepsilon 1}c_\mu \operatorname{Re}_x \left[v^2 + \Omega^2 p^2\right].$$

- внешняя граница пограничного слоя, $j = J$. $\mathbf{B}_J$ в таком случае может быть вычислена по правилам для основной части пограничного слоя, матрицы же $\mathbf{A}_J$ и $\mathbf{r}_J$ примут вид:

$$\mathrm{A}_j^{5,k} = \left(\alpha_{2k-1}\right)_j,\ \mathrm{A}_j^{6,k} = \left(\varphi_{2k-1}\right)_j,\ k = 1,...,9;$$

$$\mathrm{A}_j^{7,2} = \mathrm{A}_j^{8,4} = 1,\ \mathrm{A}_J^{9,6} = E_1,\ \mathrm{A}_J^{9,8} = E_2,\ \mathrm{A}_J^{10,6} = E_3,$$

$$\mathrm{A}_J^{10,8} = E_4,\ \mathrm{r}_J^5 = \left(r_K\right)_J,\ \mathrm{r}_J^6 = \left(r_E\right)_J,\ \mathrm{r}_J^7 = 0,$$

$$\mathrm{r}_J^8 = 0,\ \mathrm{r}_J^9 = \left(r_{E1}\right)_J,\ \mathrm{r}_J^{10} = \left(r_{E2}\right)_J,$$

где $E_1 = 2m_2^n + x^n \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_j^n,$

$$E_3 = -c_{\varepsilon 2}\frac{\left(\varepsilon_J^n\right)^2}{\left(k_J^n\right)^2},\ E_2 = 1,$$

$$E_4 = \left(3m_2^n - 1\right) + x^n \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_J^n + c_{\varepsilon 2}\frac{2\varepsilon_J^n}{k_J^n},$$

$$\left(r_{E1}\right)_J = -\left[x^n\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_J^n + \varepsilon_J^n + 2m_2^n k_J^n\right],$$

$$\left(r_{E2}\right)_J = -\left[x^n\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_J^n + c_{\varepsilon 2}\frac{\left(\varepsilon_J^N\right)^2}{k_J^n} + \left(3m_2^n - 1\right)\varepsilon_J^n\right].$$

Вычисление производных проводится по схеме $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^n = A_1 f^{n-2} + A_2 f^{n-1} + A_3 f^n$, где в случае использования первого порядка $A_1 = 0$, $A_2 = \frac{-1}{x_n - x_{n-1}}$, $A_3 = \frac{1}{x_n - x_{n-1}}$, в случае второго порядка $A_1 = \frac{x_n - x_{n-1}}{\left(x_{n-2} - x_{n-1}\right)\left(x_{n-2} - x_n\right)}$,

$$A_2 = \frac{x_n - x_{n-2}}{\left(x_{n-1} - x_{n-2}\right)\left(x_{n-1} - x_n\right)},$$

$$A_3 = \frac{2x_n - x_{n-1} - x_{n-2}}{\left(x_n - x_{n-2}\right)\left(x_n - x_{n-1}\right)},$$

причем производные вида $\left[\frac{\partial}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]_j^n = A_3$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Parr O.* Untersuchungen der dreidimensionalen Grenzschicht an rotierenden Drehkörpern bei axialer Anströmung//Applied Mechanics. 1963. Vol. 32. N. 6. P. 393-413.
2. *Дорфман Л.А.* Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М.: Физматлит, 1960. 260 с.
3. *Cebeci T.* Analys of Turbulent Flows, Elsevier, 2004. 376 p.
4. *Куркин Е.И., Шахов В.Г.* Пограничный слой на вращающихся осесимметричных телах при их осевом обтекании // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2008. Сер. 10. Вып. 4. С. 38-49.
5. *Себиси Т., Брэдшоу П.* Конвективный теплообмен, М.: Мир, 1987. 590 с.


## K-ε MODEL OF TURBULENCE IN THE PROBLEM OF THE BOUNDARY LAYER AT ROTATING BODIES



Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolyov
(National Research University)

It is suggested $k-\varepsilon$ turbulence model for solving the boundary layer on rotating bodies. The model is implemented in MATLAB and showed good agreement with experimental results of Parr and Lutander-Rydberg.

Keywords: $k-\varepsilon$ turbulence model, boundary layer, rotating body.

*Evgeni Kurkin, Postgraduate Student at the Aero-Hydrodynamics Department. E-mail: eugene.kurkin@mail.ru*
*Valentin Shakhov, Candidate of Technics, Professor, Head at the Aero-Hydrodynamics Department. E-mail: shakhov@ssau.ru*