

УДК 62-503.51

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕГУЛИРУЕМОГО СЛИВА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЫ

© 2012 Б.В. Скворцов, М.И. Голикова

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 28.02.2012

В статье рассмотрено математическое моделирование процесса нанесения покрытия на внутреннюю поверхность трубы, основанное на сливе жидкости из вертикальной трубы. Определен закон регулирования слива, обеспечивающий постоянную скорость движения жидкости.

Ключевые слова: стабилизация скорости, слив жидкости, регулирование, математическая модель, коэффициент сопротивления, закон изменения, сливная задвижка, степень открытия.

Слив вязкой жидкости в трубе используется в системе управления нанесением изолирующих покрытий на ее внутреннюю поверхность. Жидкость представляет собой вязкую суспензию взвешенных частиц, которые прилипают к стенкам трубы в процессе слива. Структурные схемы таких систем приведены в [1 – 4]. Их принцип работы основан на управлении скоростью слива в зависимости от высоты столба жидкости в трубе. Скорость слива определяет толщину покрытия при заданных размерах трубы, плотности и вязкости сливаемой жидкости.

Математическая постановка задачи иллюстрируется рисунком 1, где изображена вертикальная труба диаметром $2R$, в которую налита жидкость плотностью ρ , сливающаяся через нижнее отверстие диаметром $2r$. Целью математического моделирования является поиск уравнений, связывающих скорость V движения жидкости с ее высотой H относительно сливного отверстия, при известной плотности жидкости и размерах трубы. Управление скоростью слива осуществляется изменением диаметра сливного отверстия.

При математическом моделировании примем следующие допущения:

1. Жидкость не сжимаема.
2. Движение жидкости в трубе ламинарное, то есть в процессе слива воронка не образуется.

Достоверность таких допущений оценим в процессе дальнейших исследований, тем более что второе допущение достаточно условно, так как в действительности воронка имеет место

*Скворцов Борис Владимирович, доктор технических наук, профессор, научный руководитель НИЛ «Аналитические приборы и системы». E-mail: aps@ssau.ru.
Голикова Маргарита Игоревна, аспирант, инженер НИЛ «Аналитические приборы и системы». E-mail: aps@ssau.ru.*

быть и будет учитываться на второй стадии математического моделирования.

При любых видах течений через любое поперечное сечение трубы в единицу времени проходят равные объемы жидкости [5]:

$$VS = V_1 S_1, \quad (1)$$

где $S = \pi R^2$, $S_1 = \pi r^2$, R и r – радиусы трубы и сливного отверстия соответственно (см. рисунок 1). При изменении сечения трубы изменяется давление и скорость жидкости, ламинарное движение которой под действием силы тяжести описывается уравнением Бернулли [5,7]:

$$p + \rho g H + \frac{\rho V^2}{2} = const, \quad (2)$$

где p – давление, [Н/м²]; ρ – плотность, [кг/м³];

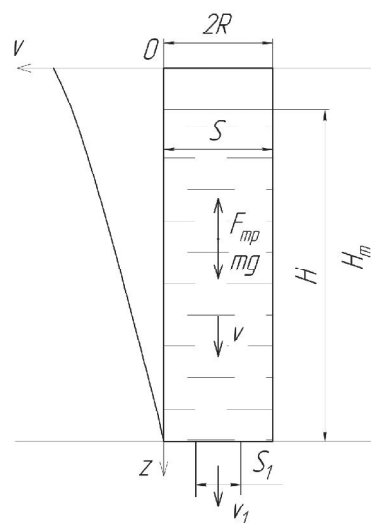


Рис. 1. Иллюстрация к математической модели: H, H_m – текущая и максимальная высота жидкости соответственно, R – радиусы трубы, r – радиус сливного отверстия, V – скорость движения жидкости в полости трубы, V_1 – скорость движения жидкости в сливном отверстии

q – ускорение свободного падения [м/сек²]. Для двух сечений трубы уравнение (2) примет вид:

$$p + \rho g H + \frac{\rho V^2}{2} = p_1 + \rho g H_1 + \frac{\rho V_1^2}{2}. \quad (3)$$

При отсутствии внешних давлений $p = p_1 = 0$. Предположим, что труба наполнена на высоту H и $V=0$, тогда начальная скорость слива через отверстие *любого* диаметра на нижнем торце трубы, то есть при $H_1 = 0$, будет определяться из выражения $\rho g H = \frac{\rho V_1^2}{2}$ по известной формуле

Торричелли [5]:

$$V_1 = \sqrt{2gH}. \quad (4)$$

Скорость движения жидкости в самом теле трубы будет определяться по формуле, вытекающей из (1):

$$V = V_1 \frac{S_1}{S} = V_1 \frac{r^2}{R^2} = \frac{r^2}{R^2} \sqrt{2gH} = \alpha \sqrt{2gH}. \quad (5)$$

Реально сопротивления стенок всегда имеют место быть и движение жидкости инерционное. Уравнение Бернулли не отражает реальный процесс, а соответствует лишь его предельному случаю – установившемуся режиму при отсутствии сопротивления стенок трубы (нулевой вязкости). Поэтому необходимо найти другую математическую модель, соответствующую реальному процессу слива вязкой жидкости с учетом инерционности ее массы и сопротивления стенок трубы.

Анализ показал, что если жидкость в полностью запроленной трубе принять за тело определенной массы с некоторым центром тяжести, то в процессе слива центр тяжести этого тела будет перемещаться с определенной скоростью. При этом движущееся тело (оставшаяся в трубе жидкость) будет изменять не только центр тяжести, но и массу. Таким образом, описываемый процесс слива жидкости из трубы подпадает под математическое описание механического движения тела переменной массы под действием внешних сил, которое описывается уравнением (5):

$$\frac{d}{dt}(mV) = F + V_1 \frac{dm}{dt}, \quad (6)$$

где m , V – масса и скорость центра тяжести жидкости внутри полости трубы в текущий момент времени; $F=P - F_c$ – главный вектор всех сил, действующих на тело; V_1 – скорость отделившейся массы; $P = mg$ – вес жидкости. $F_c = kp = k\rho g H$ – сила сопротивления движению жидкости, где k – общий коэффициент сопротивления, определяемый стенками трубы и диаметром сливного отверстия; $p = \rho g H$ – давление жидкости на стенки трубы [5].

Подставляя используемые параметры в уравнение (6) с учетом соотношения (1) получим

$$V \frac{dm}{dt} + m \frac{dV}{dt} = mg - k\rho g H + V \frac{S_1}{S} \frac{dm}{dt}. \quad (7)$$

Масса жидкости определяется через плотность и размеры трубы по формуле $m = \rho HS = \rho H \pi R^2$, поэтому выражение (7) принимает вид:

$$V \rho S \frac{dH}{dt} + \rho SH \frac{dV}{dt} = \rho SHg - k\rho g H + V S_1 \rho \frac{dH}{dt}. \quad (8)$$

Учитывая, что $\frac{dH}{dt} = V$; $dt = \frac{dH}{V}$ из уравнения (8) можно исключить время и плотность

$$V^2 S + SHV \frac{dV}{dH} = gH(S - k) + V^2 S_1. \quad (9)$$

После преобразований, получим

$$\frac{dV}{dH} = \frac{V}{H} \left(\frac{S_1}{S} - 1 \right) + \frac{(S - k)g}{VS}. \quad (10)$$

В уравнении (10) коэффициент k имеет размерность [м²], так как сила сопротивления прямо пропорциональна площади соприкосновения жидкости с поверхностью трубы. Общее сопротивление движению складывается из сопротивления задвижки и трения о стенки трубы.

При таком подходе коэффициент сопротивления k в уравнении (10) находим из следующих соображений, принимая сопротивление стенок равно нулю:

1. Сила сопротивления пропорциональна давлению

$$F_c = kp = k\rho g H. \quad (11)$$

2. При полностью закрытой сливной задвижки, то есть при $r=0$, сила сопротивления F_c максимальна и равна весу жидкости, поэтому максимальное значение коэффициента сопротивления в уравнении (10) определится по формуле

$$F_{c,MAX} = mg = \pi R^2 \rho g H = k_{MAX} \rho g H,$$

откуда

$$k_{MAX} = \pi R^2. \quad (12)$$

3. При полностью открытой задвижке то есть при $r=R$ сила сопротивления F_c минимальна и равна нулю, $k_{MIN}=0$.

Исходя из всего вышеприведенного, коэффициент сопротивления пропорционален площади перекрытия трубы задвижкой и определяется по формуле

$$k = \pi(R^2 - r^2). \quad (13)$$

При наличии сопротивления боковой поверхности параметр k в уравнении (10) определить по формуле

$$k = \pi(R^2 - r^2) + 2k_0\pi RH\alpha, \quad (14)$$

где k_0 – коэффициент потерь на трение жидкости о боковую поверхность трубы, $2\pi RH$ – площадь боковой поверхности трубы,

$$\alpha = \frac{r^2}{R^2}. \quad (15)$$

Подстановка (14) в (10) даст следующее уравнение движения жидкости

$$\frac{dV}{dH} = \frac{V}{H}(\alpha - 1) + \frac{g\alpha}{V} - \frac{2Hgk_0\alpha}{VR}. \quad (16)$$

Обозначив

$$A = \alpha - 1; B = g\alpha; D = \frac{2gk_0\alpha}{R} \quad (17)$$

и учитывая (16), получим

$$\frac{dV}{dH} - \frac{A}{H}V = \frac{B - DV}{V}. \quad (18)$$

Это уравнение Бернулли при $n = -1$, с правой частью, зависящей от аргумента H . Согласно [6], решение этого уравнения имеет вид:

$$V = \sqrt{\frac{2B}{1-2A}H - \frac{2D}{1-A}H^2} = \sqrt{\frac{2g\alpha}{2-2\alpha}H - \frac{4k_0g\alpha}{R(2-\alpha)}H^2}. \quad (19)$$

При $\alpha = 1$, имеем формулу Торричелли (5), что подтверждает корректность решения. Известно, что при ламинарном движении жидкости $k_0 = 10^{-2} \dots 10^{-8}$ [7].

Графики зависимости скорости слива от высоты столба жидкости показаны на рис. 2.

График соответствует ожидаемым значениям, соответствующим ламинарному движению жидкости по уравнению Бернулли.

Однако уравнение (16) не учитывает того фактора, что коэффициент сопротивления k_0 зависит от вязкости и скорости от скорости движения жидкости. Согласно [8] для k_0 можно записать

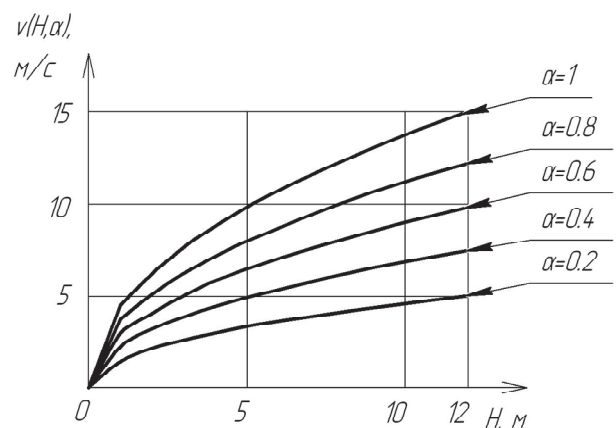


Рис. 2. Графики зависимости скорости слива при разных значениях α и $k_0 = 10^{-4}$, $R = 0,05$ м

$$k_0 = \frac{64}{Re}, \quad (20)$$

где Re – число Рейнольдса – критерий подобия течения вязких жидкостей, равный [5]:

$$Re = \frac{\rho VR}{\eta} = \frac{VR}{\eta_\kappa}, \quad (21)$$

Где η – динамическая вязкость [Па·с],

$$\eta_\kappa = \frac{\eta}{\rho} - \text{кинематическая вязкость} \left[\frac{м^2}{с} \right].$$

Подставляя (21) в (20), получаем формулу определения коэффициента потерь на трение жидкости о боковую поверхность трубы

$$k_0 = \frac{64}{Re} = \frac{32\eta_\kappa}{VR}. \quad (22)$$

Подстановка (22) в (16) даст следующее более точное уравнение движения жидкости при сливе через регулирующую задвижку

$$\frac{dV}{dH} = \frac{V}{H}(\alpha - 1) + \frac{g\alpha}{V} - \frac{64Hg\alpha\eta_\kappa}{V^2R^2}. \quad (23)$$

Дифференциальное уравнение (23) не поддается аналитическому решению. Получившееся уравнение решено численным методом в программе Mathcad. На рисунке 3 приведены решения при разных α .

Рис. 3 иллюстрирует изменение скорости слива вязкой жидкости в зависимости от высоты при различной степени открытия сливной задвижки α и хорошо согласуется с выражением (19), подтверждая корректность упрощенного аналитического решения. Кривые 1 и 2 на рис. 3

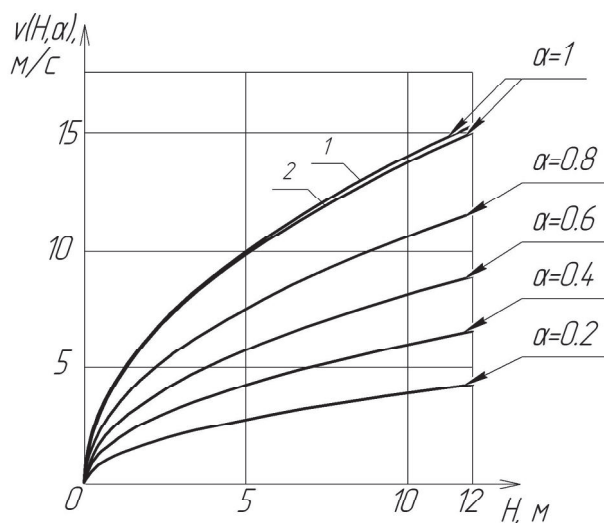


Рис. 3. Графики зависимости скорости слива при различных значениях α , $R = 0,05$ м, $\nu_\kappa = 10^{-7} \left[\frac{м^2}{с} \right]$. 1 – получено по уравнению (16), 2 – по уравнению (23)

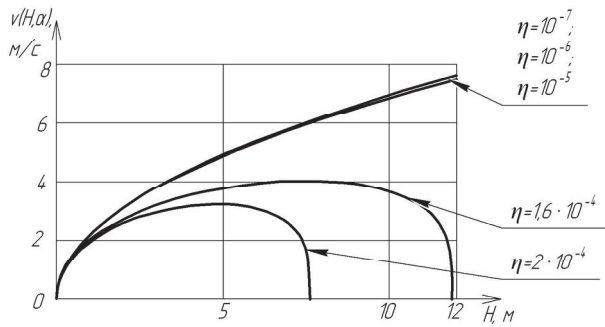


Рис. 4. Влияние вязкости на скорость слива при $\alpha = 0,5$, $R=0,05$ м

показывают результаты решения, полученные по уравнениям (16) и (23), разница которых составляет не более 5%.

Исследуем влияние кинематической вязкости на график слива жидкости.

Выражение (19) дает возможность определить требования к размерам трубы, для которых принципиально возможен слив при заданном коэффициенте трения k_0 . Из условий положительности подкоренного выражения (19) следует, что $R \geq 2k_0 H_m$.

На рис. 4 показана зависимость изменения скорости слива при $\alpha = 0,5$ и различных значениях кинематической вязкости.

Рис. 4 показывает, что при определенных значениях вязкости слив невозможен, что полностью соответствует физической сущности исследуемого процесса, так как сопротивление стенок становится больше силы тяжести. В целом графики на рисунках 2-4 иллюстрируют зависимость скорости слива от параметров технологического процесса. Методом численного моделирования определяем требования к кинематической вязкости жидкости, которую можно использовать для нанесения покрытий. Эти требования определяются при минимальном радиусе трубы $R=0,05$ м, которые подвергаются покрытиям по описываемой технологии и составляют $\eta \leq 1,6 \cdot 10^{-4}$.

Анализ графиков на рис. 3 и 4 показывает, что скорость не стабильна от высоты столба. Синтез системы управления будет состоять в том, чтобы обеспечить постоянную скорость слива в возможно большом диапазоне высоты.

Это возможно путем адаптивного изменения

степени открытия задвижки $\alpha = \frac{r^2}{R^2}$, что дости-

гается изменением радиуса сливного отверстия r в зависимости от высоты столба. Закон изменения $\alpha(H)$ можно найти из уравнения (23), учитывая, что в идеальном случае на рабочем

участке $V=\text{const}$, $\frac{dV}{dH} = 0$. Уравнение (23) в этом

случае примет вид

$$\frac{V}{H}(\alpha - 1) + \frac{g\alpha}{V} - \frac{64Hg\eta_k\alpha}{V^2R^2} = 0. \quad (24)$$

Решая это уравнение относительно α , найдем закон изменения степени открытия сливной задвижки в зависимости от высоты столба жидкости, который будет обеспечивать стабильную скорость движения жидкости по всей длине трубы

$$\alpha = \frac{V^3R^2}{V^3R^2 + gHVR^2 - 64H^2g\eta_k}. \quad (25)$$

График изменения степени открытия сливной задвижки в зависимости от высоты столба жидкости, требуемой скорости размеров трубы и кинематической вязкости показан на рис. 5.

Выражение (25) определяет закон параметрического управления задвижкой в зависимости от текущей высоты столба жидкости при различных размерах трубы и вязкости, что дает возможность построения системы управления нанесением покрытий на внутреннюю поверхность труб.

При малой вязкости во время слива в трубе образуется воронка, имеет место турбулентное движение жидкости. В этом случае коэффициент трения жидкости о боковую поверхность трубы определяется по формуле Альдшуля [8]:

$$k_0 = 0,1 \left(\frac{1,46K_э}{2R} + \frac{100}{Re} \right)^{0,25}, \quad (26)$$

где $K_э$ – эквивалентная абсолютная шероховатость в миллиметрах (определяется из таблиц).

Разработанная математическая модель не учитывает инерционность электрических и электромеханических процессов, протекающих в системе управления. Она рассматривает пока лишь только один элемент замкнутой системы управления – непосредственно трубу с изменяющимся сливным отверстием и в виде формулы (25)

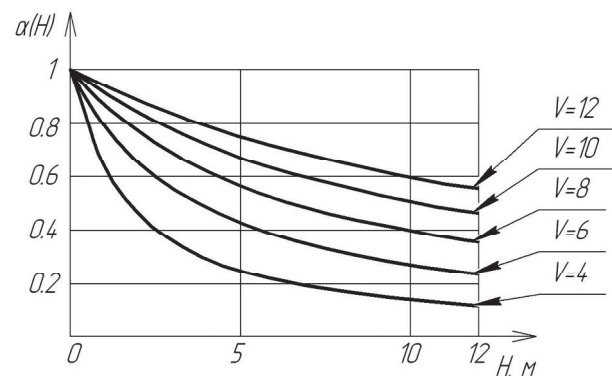


Рис. 5. График закона управления задвижкой в зависимости от высоты столба жидкости, обеспечивающий стабильность заданной скорости слива V

формулирует предельные требования к закону регулирования, обеспечивающему максимальное качество наносимого покрытия. Моделирование работы всей системы управления будет проводиться при дальнейших исследованиях. Полученная методика решения справедлива и для турбулентного движения жидкости в трубе, при использовании выражения (26).

Материалы, полученные по результатам проведенных исследований, позволяют найти математические алгоритмы управления для системы нанесения покрытий на внутреннюю поверхность трубы, используемой в производственном цикле ОАО «НЕГАСПЕНЗАПРОМ».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Пат. 96793 Российская Федерация, МПК⁷В05С11/10. Устройство нанесения покрытия на внутреннюю поверхность трубы / *Скворцов Б.В., Борминский С.А., Голикова М.И.*; заявитель и патентообладатель СГАУ.- 2010114883; заявл. 13.04.10; опубл. 20.08.10, Бюл. №23.
- 2 Пат. 106850 Российская Федерация, МПК⁷В05С7/08. Устройство нанесения изолирующих покрытий на внутреннюю поверхность трубы / *Скворцов Б.В., Борминский С.А., Голикова М.И.*; заявитель и патентообладатель Скворцов Б.В., Борминский С.А., Голикова М.И. 2011106716/05; заявл. 22.02.11; опубл. 27.07.11, Бюл. №21.
- 3 *Борминский С.А., Голикова М.И.* Устройство автоматического управления процессом нанесения шликера на внутреннюю поверхность трубы // Актуальные проблемы радиоэлектроники и телекоммуникаций: труды Всероссийской научно-технической конференции, г. Самара. Самара, 2010. С. 147-150.
- 4 *Скворцов Б.В., Борминский С.А., Голикова М.И.* Система автоматического контроля и управления процессом нанесения эмали на внутреннюю поверхность трубы // Методы, средства и технологии получения и обработки измерительной информации. К 60-летию кафедры ИИТ. Шлядинские чтения-2010: труды международной научно-технической конференции, г. Пенза. Пенза, 2010. С. 74-76.
- 5 *Яворский Б.М., Детлаф А.А.* Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. М.: Наука, 1974. 942 с.
- 6 *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
- 7 *Люкшин В.С.* Справочник машиностроителя. В 6 т. Т.1. Москва, 1956. 568 с.
- 8 Сайт «Гидравлика». URL: <http://mosgruz.net> (дата обращения 15.01.2012).

MATHEMATICAL MODELING OF CONTROLLED DISCHARGE OF A VISCOUS FLUID VERTICAL PIPE

© 2012 B.V. Skvortsov, M.I. Golikova

Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolyov
(National Research University)

This article discusses the mathematical modeling of the coating on the inside surface of the pipe based on discharge of the liquid. Regulating law of discharge of a vertical pipe, providing a constant fluid speed is defined.

Key words: speed stabilization, discharge of a fluid, regulation, mathematical model, coefficient of resistance, law of change, drain valve, the degree of opening.

Boris Skvortsov, Doctor of Technics, Professor, Supervisor at the Research Laboratory «Analytical Devices and Systems».
E-mail: aps@ssau.ru.

Margarita Golikova, Graduate Student, Engineer at the Research Laboratory «Analytical Devices and Systems».
E-mail: aps@ssau.ru.