УДК 629.735.015

РАЗВИТИЕ ЗАДАЧ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЛЕТА ВОЗДУШНЫХ СУДОВ

© 2012 В.В. Митюков, Н.У. Ушаков

Ульяновское высшее авиационное училище гражданской авиации (институт)

Поступила в редакцию 10.10.2012

Рассмотрен процесс разработки математической модели полета воздушного судна (ВС). После вывода уравнений полного движения ВС в векторной форме, замыкания их кинематическими уравнениями, проецирования всех векторов в связанную систему координат, получена система дифференциальных уравнений в оригинальном компактном матричном виде.
Ключевые слова: адекватность, вектор, дифференциальные уравнения, матричные операции, теоремы механики, моделирование полета, системы координат.

С развитием вычислительной техники, системы математического моделирования становятся все более важным инструментом решения многих задач, направленных на повышение уровня безопасности и экономичности эксплуатации транспортных средств. Разработка математической модели достаточно высокой степени адекватности поведению реального объекта для решения широкого круга обучающих и эксплуатационных задач, является непременным условием решения таких вопросов.

Настоящая публикация посвящена прояснению физического смысла математической модели движения твердого тела, с целью приложения к задачам моделирования движения любого транспортного средства в проекциях на произвольную систему координат.

ВЕКТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При традиционном математическом моделировании движения некоторого объекта обычно предполагается, что составляющая его система материальных точек представляет собой твердое тело (недеформируемая конструкция). Поскольку расстояния между любыми точками твердого тела сохраняются неизменными, то движение такой системы материальных точек, сводится к сумме двух движений:

• перемещение центра масс твердого тела (на вектор $\mathbf{r}$)

• вращение точек тела вокруг центра масс (вокруг вектора угловой ориентации $\boldsymbol{\varphi}$)

Из теоретической механики известно, что в *инерциальной* (неускоренной) системе отсчета, которая находится или в состоянии покоя, или движется равномерно и прямолинейно, уравнения движения твердого тела в векторной форме принимают наиболее простой вид [1].

Уравнение движение центра масс под действием суммарного вектора внешних сил $\mathbf{F}$:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \qquad (1)$$

Здесь для системы из k материальных точек с массами m_k и скоростями $\mathbf{V}_k$ на расстоянии $\mathbf{r}_k$ от начала системы отсчета:

$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k$ – суммарный вектор внешних сил

$\mathbf{p} = \sum m_k \cdot \mathbf{V}_k$ – вектор количества движения системы точек (тела).

Исходя из понятия центра масс [1], определяемого как $\mathbf{r} = \sum m_k \cdot \mathbf{r}_k \big/ \sum m_k$, последнее выражение можно записать в другом виде:

$$\mathbf{p} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \sum m_k) = m \cdot \mathbf{V}, \qquad (2)$$

где m – общая масса системы материальных точек;

$\mathbf{r}$ – радиус–вектор от начала системы отсчета до центра масс;

$\mathbf{V}$ – вектор абсолютной скорости центра масс.

• Уравнение вращения вокруг центра масс под воздействием суммарного момента $\mathbf{M}$ можно формально получить из (1), используя понятие векторного произведения (на радиус–вектор $\mathrm{D}\mathbf{r}_k$ слева , проведенного от центра масс к точке k)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \qquad (3)$$

Митюков Виктор Вениаминович, программист отдела вычислительной техники и информатики.
E-mail: v.mityukov@gmail.com
Ушаков Николай Ульянович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, начальник научно-исследовательского отдела. E-mail: nikul@bk.ru

где $\mathbf{M} = \sum \Delta \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k$ – вектор суммарного момента от внешних сил;

$\mathbf{L} = \sum \Delta \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{V}_k$ – вектор момента количества движения тела;

Заменяя в последнем выражении суммирование точек интегрированием по всему объему *m* твердого тела, можно еще записать:

$$\mathbf{L} = \int_m \mathbf{r}_m \times \mathbf{V}_m \cdot dm , \qquad (4)$$

где $\mathbf{r}_m$ – вектор, проведенный от центра масс к к элементу массы (объема) *dm;*

$\mathbf{V}_m$ – вектор скорости элемента массы (объема) *dm.*

На практике чаще используются уравнения движения, записанные в проекционной системе координат, которая уже не является инерциальной. При рассмотрении нескольких систем координат возникает понятие *сложного движения* — когда твердое тело движется относительно какой-либо системы координат (СК), которая, в свою очередь, движется относительно другой системы отсчёта. Обычно выбирают одну из СК за “абсолютную”, другую называют “подвижной” и вводят следующие термины:

• *абсолютное движение* точки/тела в инерциальной СК.

• *переносное движение* подвижной СК относительно инерциальной.

• *относительное движение* точки/тела относительно подвижной СК.

Если подвижную проекционную СК закрепить на твердом теле, то движение точек тела относительно такой СК будет отсутствовать и останется только переносное движение. Тогда, при наличии вращения тела, такая СК станет поворачиваться вместе с телом относительно положения векторов **p** и **L,** приложенных к центру масс. Или иначе можно считать, что векторы **p** и **L** поворачиваются относительно СК в обратную сторону. В результате скорости движения концов этих векторов изменятся на величину скорости добавочного вращательного движения (подвижной СК). Отсюда следует, что векторные уравнения (1) и (3) в такой СК примут следующий вид [1]:

$$m \cdot \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}\right) = \mathbf{F}\,; \qquad (5)$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{M}\,, \qquad (6)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор скорости вращения системы материальных точек (твердого тела)

Для однозначного определения положения твердого тела, систему динамических уравнений (5), (6) необходимо замкнуть кинематическими уравнениями, связывающими векторы движения **V** и **ω** этого тела (или подвижной СК) с векторами **r** и **j** его положения относительно инерциальной СК:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}\,; \qquad (7)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\,. \qquad (8)$$

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Системы координат, связанные с поверхностью Земли и с воздушным судном (ВС), регламентируются ГОСТ 20058-80 [2]. В соответствии с принятыми в нем определениями и обозначениями, основные из этих СК могут быть представлены в виде следующей схемы:

Нормальная земная система координат – *Oo Xg Yg Zg* является неподвижной СК, начало которой *Oo* располагается на поверхности Земли, ось *Yg* направлена вертикально вверх (против местного направления силы тяжести), а направления осей *Xg* и *Zg* выбираются в соответствии с постановкой задачи.

Остальные четыре системы координат являются подвижными, начало которых помещается в центр масс ВС:

Нормальная система координат *O Xg Yg Zg.*

Направления осей *Xg Yg Zg* выбираются параллельно соответствующим осям нормальной земной СК.

Связанная система координат *O X Y Z.*

Ось *X* направлена к носовой, а ось *Y* – к верхней части ВС в плоскости его симметрии. Перпендикулярная к ним ось *Z* направлена в сторону правой части ВС.

Скоростная система координат *O Xa Ya Za.*

Продольная ось *Xa* совпадает с направлением вектора воздушной скорости **V**, ось *Ya* лежит в плоскости симметрии ВС, а ось *Za* направлена в сторону правой части ВС.

Траекторная система координат *O Xк Yк Zк.*

Продольная ось *Xк* совпадает с направлением вектора земной скорости $\mathbf{V}_к$ (скорость относительно земли), а ось *Yк* расположена в вертикальной плоскости.

Положение этих СК относительно друг друга, используя термины и обозначения ГОСТ 20058-80, можно характеризовать следующими параметрами (используя интерпретацию):

L – удаление центра масс ВС вдоль земной поверхности (по оси *Oo Xg*)

H – высота центра масс ВС над земной поверхностью (по оси *Oo Yg*)

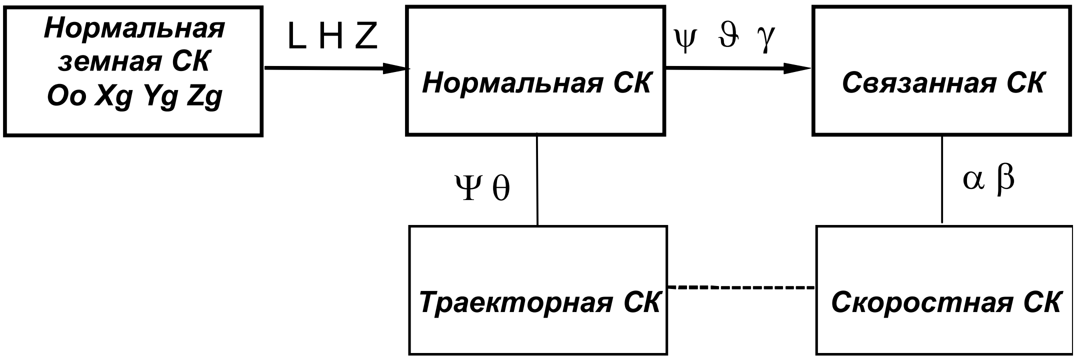

Рис. 1. Основные системы координат в ГОСТ 20058-80 и связи между ними

Z – *боковое отклонение* центра масс ВС (по оси *Oo Zg*)

ψ – угол *рыскания* (соответствует повороту связанной СК вокруг оси *OY*, первоначально совмещенной с осью *Og Yg* нормальной СК)

ϑ – угол *тангажа* (соответствует повороту вокруг оси *O Z*, повернутой на угол ψ).

γ – угол *крена* (соответствует повороту вокруг оси *O X*, повернутой на углы ψ и ϑ).

Ψ – угол *пути* (соответствует повороту траекторной СК вокруг оси *Og Yg*).

Θ – угол *наклона траектории* (поворот вокруг оси *O Zк*, повернутой на угол ψ).

α – угол *атаки* (поворот скоростной СК вокруг оси *O Za* (совмещенной с осью *O Z*)).

β – угол *скольжения* (поворот вокруг оси *O Ya*, повернутой на угол α).

В качестве инерциальной системы отсчета обычно выбирается система координат связанная с поверхностью Земли, оси которой фиксированы относительно этой поверхности, например, *нормальная земная* СК. Такая система отсчета участвует в суточном вращении Земли вокруг своей оси и в годовом вращении вокруг Солнца. Однако порядок перегрузок, обусловленных влиянием этих вращений, весьма мал, даже для гиперзвукового ВС.

В качестве проекционной (уже неинерциальной), традиционно выбирается *связанная* СК (*O X Y Z*), неподвижно фиксированная относительно движущегося тела. В этом случае отсутствует движение точек тела относительно такой СК, а инерциальные характеристики ВС не зависят от его положения (если не учитывать влияние расходования топлива).

Проекциями векторных компонентов уравнений (5), (6), (7), (8) на оси указанных СК являются следующие 12 переменных, регламентированные стандартом ГОСТ 20058-80:

V_{kx}, V_{ky}, V_{kz} – проекции вектора $\mathbf{V}_k$ земной скорости ВС на оси связанной СК;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора **w** скорости вращения ВС на оси связанной СК;

L, H, Z – проекции вектора **r** положения ВС на оси нормальной земной СК;

ψ, ϑ, γ – проекции вектора **j** угловой ориентации ВС на промежуточные оси (которые не все попарно ортогональны между собой).

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

Можно показать, что при переходе к другому базису – новые значения координат вектора выражаются через старые путем их линейного преобразования (отображения). Наиболее приспособленным средством для линейных операций с векторами, является аппарат матричного исчисления. Из немногочисленных операций с матрицами наиболее важной является операция умножения матриц.

При выводе рабочих формул линейных преобразований координат [5] необходимо отметить следующие 5 особенностей матричных операций:

1. В трехмерном пространстве три координаты (компоненты) x, y, z вектора могут быть представлены в виде матрицы-строки или матрицы-столбца. Линейное преобразование матрицы-столбца соответствует умножению его справа на матрицу этого преобразования. Таким образом, матрица каждого последующего преобразования становится левым сомножителем. В случае матрицы-строки производится ее умножение слева уже на транспонированную матрицу преобразования, являющуюся теперь правым сомножителем.

2. Неважно, в какой очередности выполняется произведение матриц, однако важен их порядок в этом произведении. В общем случае произведение $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ не равно $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$, вследствие чего важно четко соблюдать последовательность выполнения поворотов.

Например, определению скалярного произведения двух векторов **a** и **b** будет соответствовать умножение матрицы-строки на матрицу-столбец: Если же представить произведение этих векторов как матрица-столбец на матрицу-строку, то согласно правилу умножения матриц получится уже не скаляр (свертка), а матрица 3×3:

3. Каждый поворот объекта (матрицы-столбца) представляется матрицей, в которой элемент на главной диагонали, соответствующий оси вращения, равен 1, а элементы проходящих через него строки и столбца равны нулю. Четыре оставшихся элемента это синусы и косинусы соответствующего угла поворота. В частности, поворотам матрицы-столбца вокруг осей *x*, *y*, *z* прямоугольной системы координат на положительные углы α, β, γ будут соответствовать следующие три матрицы:

$$\mathbf{R}x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{R}y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{R}z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Перемещение или поворот рассматриваемой системы координат относительно неподвижного объекта эквивалентен переносу или повороту объекта относительно неподвижной системы координат в обратную сторону.

5. Желательно также выразить векторное произведение двух векторов, например **a** и **b**, через произведение матриц. Такую матрицу несложно подобрать, исходя из координатного определения векторного произведения:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y\cdot b_z - a_z\cdot b_y \\ a_z\cdot b_x - a_x\cdot b_z \\ a_x\cdot b_y - a_y\cdot b_x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Теперь можно приступать к проецированию векторных уравнений (5) – (8) на оси связанной системы координат. С учетом (9), левая часть уравнения поступательного движения центра масс (5) приводится к следующему матричному виду:

$$m\cdot\left(\frac{d\mathbf{V}_k}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_k\right)=m\cdot\left\{\begin{pmatrix} dV_{kx}/dt \\ dV_{ky}/dt \\ dV_{kz}/dt \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} V_{kx} \\ V_{ky} \\ V_{kz} \end{pmatrix}\right\}.$$

В уравнении вращения вокруг центра масс (6) появляется возможность избежать интегрального представления (4) момента количества движения **L**, используя фиксацию положения связанной СК относительно движущегося тела. Точки тела будут совершать относительно центра масс только вращательное движение, в результате чего $\mathbf{V}_m = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_m$. Тогда уравнение (4) относительно движущейся с телом связанной СК, в которой **V = 0**, примет следующий вид:

$$\mathbf{L} = \int_m \mathbf{r}_m \times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_m)\cdot dm .$$

Для выражения, представляющего собой двойное векторное произведение можно записать (опуская для краткости индекс *m* в координатах вектора $\mathbf{r}_m$):

$$\mathbf{r}_m\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_m)=\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} y\cdot(y\omega_x - x\omega_y) - z\cdot(x\omega_z - z\omega_x) \\ z\cdot(z\omega_y - y\omega_z) - x\cdot(y\omega_x - x\omega_y) \\ x\cdot(x\omega_z - z\omega_x) - y\cdot(z\omega_y - y\omega_z) \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} (y^2+z^2) & -xy & -xz \\ -yx & (x^2+z^2) & -yz \\ -zx & -zy & (x^2+y^2) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Далее $\int_m \mathbf{r}_m\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_m)\cdot dm =$

$$=\begin{pmatrix} \int_m (y^2+z^2)dm & -\int_m xy\cdot dm & -\int_m xz\cdot dm \\ -\int_m yx\cdot dm & \int_m (x^2+z^2)dm & -\int_m yz\cdot dm \\ -\int_m zx\cdot dm & -\int_m zy\cdot dm & \int_m (x^2+y^2)dm \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает другое определение [1] момента количества движения **L**:

$$\mathbf{L}=\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}=\begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Тензор инерции **I**, включающий в себя осевые (I_i) и центробежные (I_{ij}) моменты инерции представляется в прямоугольной СК симметричной матрицей, в которой $I_{ij} = I_{ji}$. Для симметричных относительно вертикальной плоскости тел дополнительно обнуляются $I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$, так как для всякой материальной точки с некоторыми значениями $x_i\, y_i\, z_i$ найдется симметрично расположенная такая же масса с теми же значениями x_i и y_i, но с противоположным значением z_i. Таким образом :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Окончательно левая часть уравнения вращательного движения вокруг центра масс (6) с учетом (10), (11) приводится к следующему матричному виду:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\omega_x/dt \\ d\omega_y/dt \\ d\omega_z/dt \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Остаются кинематические уравнения (7), (8), в которых фигурируют производные от векторов **r** и **j**, координаты которых заданы не в связанной СК. Их требуется отобразить на оси связанной СК, то есть выразить новые значения этих координат через их прежние значения.

Пусть векторная величина определена в нормальной СК, например, векторная производная $d\mathbf{r}/dt = \{dL/dt,\ dH/dt,\ dZ/dt\}$. Чтобы получить ее координаты в связанной СК, нужно совместить некоторую систему координат наблюдателя с нормальной СК и, поворачивая СК наблюдателя последовательно на углы ψ, ϑ, γ вокруг промежуточных положений ее осей, совместить с осями связанной СК. Это будет эквивалентно поворотам объекта (вектора $d\mathbf{r}/dt$) относительно первоначального положения СК наблюдателя в обратные стороны, на углы $-\psi, -\vartheta, -\gamma$. Тогда общая матрица ($\mathbf{R}_{gb}$) преобразования прежних координат этого вектора–столбца, заданных в нормальной СК, в новые в связанной СК, определится следующим произведением матриц [3]:

$$\mathbf{R}_{gb}(\psi, \vartheta, \gamma) = \mathbf{R}_x(-\gamma) \cdot \mathbf{R}_z(-\vartheta) \cdot \mathbf{R}_y(-\psi) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet$$

$$\bullet \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}.$$

Для производной от вектора угловой ориентации $d\boldsymbol{\varphi}/dt$ справедливы следующие рассуждения [3]: СК наблюдателя поворачивается на углы ψ, ϑ, γ вокруг промежуточных положений ее осей до совмещения с осями связанной СК. Вектор мгновенной скорости первого поворота $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ будет направлен по оси Y СК наблюдателя. Вектор скорости второго поворота $\dot{\boldsymbol{\vartheta}}$ направлен по оси Z (повернутой на угол у), плюс вектор скорости первого будет повернут еще на угол $-\vartheta$ относительно нового положения СК наблюдателя. После третьего поворота на угол γ вектор его скорости $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ будет направлен по оси X, уже совмещенной с осью X связанной СК, а векторы скорости предыдущих поворотов дополнительно повернуты на угол $-\gamma$ относительно окончательного положения СК наблюдателя. Суммарное преобразование в матричной форме примет следующий вид:

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{R}_x(-\gamma) \cdot \dot{\boldsymbol{\vartheta}} + \mathbf{R}_x(-\gamma) \cdot \mathbf{R}_z(-\vartheta) \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}} =$$

$$= \begin{pmatrix} d\gamma/dt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d\vartheta/dt \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ d\psi/dt \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Внешние силы **F** и моменты **M**, составляющие правые части уравнений (5) и (6), должны включать в себя как минимум силу тяжести **G**, силы и моменты от двигателей – **P** и $\mathbf{M}_{\text{Р}}$, а также от аэродинамического воздействия – $\mathbf{R}_{\text{A}}$ и **M**. Чтобы не загромождать выкладки, желательно на данном этапе выделить силу тяжести, заданную в нормальной СК $\mathbf{G} = \{0, -mg, 0\}$, а остальные внешние силы и моменты представить в общем виде, обозначив их в соответствии с ГОСТ 20058-80 как $\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{R}_{\text{A}}$ и $\mathbf{M}_{\text{R}} = \mathbf{M}_{\text{P}} + \mathbf{M}$.

В результате приведения векторных уравнений (5) – (8) к проекционной (связанной) СК, с использованием полученных выше соотношений, получается следующая система дифференциальных уравнений в матричной форме [3]:

Уравнения поступательного движения центра масс

– динамические

$$m\cdot\left\{\begin{pmatrix} dV_{kx}/dt \\ dV_{ky}/dt \\ dV_{kz}/dt \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} V_{kx} \\ V_{ky} \\ V_{kz} \end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}$$

– кинематические

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} dL/dt \\ dH/dt \\ dZ/dt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V_{kx} \\ V_{ky} \\ V_{kz} \end{pmatrix}$$

Уравнения вращения вокруг центра масс

– динамические

$$\begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} d\omega_x/dt \\ d\omega_y/dt \\ d\omega_z/dt \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M_{R_x} \\ M_{R_y} \\ M_{R_z} \end{pmatrix}$$

– кинематические

$$\begin{pmatrix} d\gamma/dt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}\cdot\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d\vartheta/dt \end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.+\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ d\psi/dt \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

ТРАНСФОРМИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Интегрирование полученной системы дифференциальных уравнений численными методами (вычисление зависимостей по времени указанных 12 переменных), накладывает дополнительное условие разрешимости относительно входящих в них производных. То есть, вычислительные методы ориентированы на определенный вид уравнений, в котором левая часть каждого уравнения состоит только одной из 12 производных. Это приводит к необходимости избавления от матричных сомножителей при вектор–столбцах производных, путем умножения их на обратную матрицу. *Обратной* для матрицы **A** называется квадратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$, обладающая свойством:

$$\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица

В уравнениях поступательного движения, для упрощения получения обратных матриц можно воспользоваться свойством ортогональности входящих в них матриц [5]. Квадратная матрица **U** называется *ортогональной*, если ее столбцы являются попарно ортогональными векторами единичной длины. Отсюда следует, что для ортогональной матрицы **U** должно выполняться равенство:

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{U}=\mathbf{E}$$

то есть, обратная матрица $\mathbf{U}^{-1}$ совпадает с транспонированной $\mathbf{U}^{\mathrm{T}}$.

Следует напомнить, что транспонирование сумм и произведений матриц **A** и **B** подчиняется следующим законам [5]:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}};$$

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

В уравнениях вращательного движения ортогональные матрицы в общем случае отсутствуют, поэтому обратные матрицы приходится получать более громоздким путем составления и решения систем линейных уравнений (например, для девяти элементов матрицы размера 3x3 требуется составить 9 уравнений). В результате их аналитического решения получаются следующие обратные матрицы при векторных производных $d\boldsymbol{\omega}/dt$ и $d\boldsymbol{\varphi}/dt$ [4]:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{I_y}{(I_x I_y - I_{xy}^2)} & \dfrac{I_{xy}}{(I_x I_y - I_{xy}^2)} & 0 \\ \dfrac{I_{xy}}{(I_x I_y - I_{xy}^2)} & \dfrac{I_x}{(I_x I_y - I_{xy}^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{I_z} \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\cos\gamma}{\cos\vartheta} & -\dfrac{\sin\gamma}{\cos\vartheta} \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \\ 1 & -\dfrac{\sin\vartheta\cos\gamma}{\cos\vartheta} & \dfrac{\sin\vartheta\sin\gamma}{\cos\vartheta} \end{pmatrix}.$$

Проделав указанные выкладки, исходные матричные уравнения можно привести к нужному виду, в котором в левых частях будут находиться только входящие в эти уравнения матрицы–столбцы производных [4]:

Уравнения поступательного движения центра масс

– динамические

$$\begin{pmatrix} dV_{kx}/dt \\ dV_{ky}/dt \\ dV_{kz}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} V_{kx} \\ V_{ky} \\ V_{kz} \end{pmatrix} + g \cdot \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ -\cos\vartheta\cos\gamma \\ \cos\vartheta\sin\gamma \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \cdot \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} \qquad (12)$$

– кинематические

$$\begin{pmatrix} dL/dt \\ dH/dt \\ dZ/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{kx} \\ V_{ky} \\ V_{kz} \end{pmatrix} (13)$$

Уравнения вращения вокруг центра масс

– динамические

$$\begin{pmatrix} d\omega_x/dt \\ d\omega_y/dt \\ d\omega_z/dt \end{pmatrix} = \frac{1}{(I_x I_y - I_{xy}^2)} \cdot \begin{pmatrix} I_y & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_x & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(I_x I_y - I_{xy}^2)}{I_z} \end{pmatrix} \times \qquad (14)$$

$$\times \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_{Rx} \\ M_{Ry} \\ M_{Rz} \end{pmatrix} \right\}$$

– кинематические

$$\begin{pmatrix} d\psi/dt \\ d\vartheta/dt \\ d\gamma/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\cos\gamma}{\cos\vartheta} & -\dfrac{\sin\gamma}{\cos\vartheta} \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \\ 1 & -\dfrac{\sin\vartheta\cos\gamma}{\cos\vartheta} & \dfrac{\sin\vartheta\sin\gamma}{\cos\vartheta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} . (15)$$

ВЫВОДЫ

В работе проведено подробное исследование векторных уравнений движения механической системы в инерциальной и неинерциальной системах отсчета.

Систематизированы разрозненные сведения о пяти из регламентированных в ГОСТ 20058-80 системах координат, на которые преимущественно проецируются векторные компоненты уравнений движения ВС. Выявлены параметры, определяющие их положение относительно друг друга.

Подробно рассмотрен процесс проецирования полученных векторных уравнений на оси связанной системы координат с привлечением аппарата матричного исчисления.

Получены дифференциальные уравнения математической модели полета в компактном матричном виде, преобразованные к виду, разрешенному относительно ее производных .

Нужно отметить, что полученная система уравнений (12) – (15) имеет инвариантный вид, пригодный для описания баллистики движения любого твердого тела (транспортного средства) в проекциях на связанную систему координат. Различия между ними будут определяться только их массами, моментами инерции и действующими на них внешними силами и моментами.

Представления сил и моментов динамических уравнений (их сложность и полнота), включающих в себя как минимум силы и моменты от двигателя и аэродинамического воздействия, зависят от характера решаемой задачи и могут дополняться:

• уравнениями, задающими управляющие воздействия

• уравнениями, моделирующими динамику двигателей

• уравнениями, описывающими состояние внешней среды

• уравнениями, воспроизводящими взаимодействие колес шасси с ВПП и др.

Построение адекватной модели сил и моментов – чрезвычайно трудная задача с изначально заложенной неопределенностью и заслуживает отдельной публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Халфман Р.* Динамика: Пер.с англ. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литер., 1972. 568 с.
2. ГОСТ 20058-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. М.: Изд-во стандартов, 1981. 53 с.
3. *Митюков В.В., Извольский И.В.* Методика преобразования координат при моделировании движения твердого тела. // Автоматизация процессов управления, 2010. № 4 (22). С. 16-20
4. *Митюков В.В., Ушаков Н.У.* Доработка математической модели полета от общего вида к прикладному // Научный вестник УВАУ ГА. Ульяновск: УВАУ ГА(И). 2011. № 3. С. 9–16.
5. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 280 с.

DEVELOPMENT OF AIRCRAFT FLIGHT COMPUTER MODELING

© 2012 N.U. Ushakov, V.V. Mitukov

Ulyanovsk Higher Civil Aviation School (Institute)

Development of aircraft flight computer modeling is considered. After deriving the vector equations of aircraft general motion, its closure by kinematic equations, vector mapping into the bound coordinate system, the matrix differential equation system is obtained.
Keywords: adequacy, vector, differential equations, matrix operations, theorems of mechanics, flight modeling, coordinate system.

Viktor Mityukov, Software Engineer of Computer and Information Sciences Department.
E-mail: v.mityukov@gmail.ru
Nikolay Ushakov, Ph. D. in Technical Sciences, Senior Scientific Researcher , Head of Scientific Department.
E-mail: nikul@bkl.ru