

МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

© 2012 В.Р. Крашенинников

Ульяновский государственный технический университет

Поступила в редакцию 02.11.2012

Предложен ряд моделей случайных полей на поверхностях, что может быть использовано для математического моделирования различных характеристик, определённых на поверхностях. Например, изображений Земли, рельефа и гравитационного поля планет и т.д.

Ключевые слова: изображение, случайное поле, авторегрессионные и волновые случайные поля, каузальные и некаузальные модели, спиралевидная сетка отсчётов, стохастическое уравнение.

К настоящему времени разработано множество моделей изображений в виде случайных полей (СП), определённых на плоскости или в пространстве большей размерности. Однако в некоторых практически важных задачах изображения могут быть заданы на поверхностях другого вида, например, сферическое изображение поверхности, рельеф, гравитационное поле планеты, цилиндрическое изображение вала вращения и т.д.. Поэтому представляют интерес модели СП, заданных на поверхностях. В данной статье предложен ряд моделей СП, заданных на поверхностях.

МОДЕЛИ В ВИДЕ РАЗЛОЖЕНИЙ

В многочисленных работах, связанных с исследованием различных полей Земли, Луны и других планет (рельеф, гравитация и т.д.) широко используются их модели в виде разложений по функциям, заданным на сфере:

$$x(\theta, \lambda) = \sum_i \alpha_i \varphi_i(\theta, \lambda), \quad (1)$$

где θ, λ – географические координаты на сфере и α_i – коэффициенты разложения. В качестве $\varphi_i(\theta, \lambda)$ используются сферические, двумерные тригонометрические, выборочные и другие функции.

Используя представление (1) со случайными коэффициентами, можно получить множество моделей СП, заданных на сфере [1].

Аналогичный приём можно использовать и для моделирования СП на других поверхностях.

АВТОРЕГРЕССИОННЫЕ СПИРАЛЕВИДНЫЕ МОДЕЛИ

Изображение на цилиндре. Рассмотрим ци-

линдрическое изображение, например, изображение вала вращения. Если его разрезать вдоль и развернуть, то оно превращается в прямоугольное. На исходном цилиндрическом изображении точки вдоль линии разреза были рядом, поэтому отсчеты в них высоко коррелированы. А на разрезанном изображении эти точки находятся на противоположных краях, поэтому концы строк высоко коррелированы с их началами. Но такие изображения не описываются традиционными моделями на прямоугольниках, так как у этих моделей корреляционные связи ослабевают с ростом расстояния между отсчетами, поэтому точки изображения на концах строк не имеют требуемой высокой корреляции, например, в случае модели Хабиби [3] (рис. 1, а и б).

В [1] предложена следующая модель цилиндрических изображений. Рассмотрим спиралевидную сетку на цилиндре, показанную на рис. 2. Строки этой сетки представляют собой витки спирали (винтовой линии). Для описания изображения, заданного на этой сетке, применим аналог авторегрессионной модели Хабиби:

$$x_{k,l} = \rho x_{k,l-1} + r x_{k-1,l} - \rho r x_{k-1,l-1} + \beta \xi_{k,l}, \quad (2)$$

где k – номер витка спирали и l – номер узла в витке. При этом $l = \overline{0, T-1}$; $x_{k,l} = x_{k+1, l-T}$ при $l \geq T$; T – период, то есть количество точек в одном витке.

На рис. 3,а показана развёртка реализации изображения, полученного с помощью модели (2). Видно, что значения на концах строк сильно коррелированы (рис. 3,б), как это и должно быть на цилиндрическом изображении.

Изображение на сфере. Аналогично спиралевидной модели СП на цилиндре можно построить авторегрессионные модели и на других поверхностях. Рассмотрим случай сферы. Сначала нужно на сфере задать некоторую спираль с точками на ней. Возьмём на сфере радиуса R

Крашенинников Виктор Ростиславович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика».
E-mail: kvr@ulstu.ru

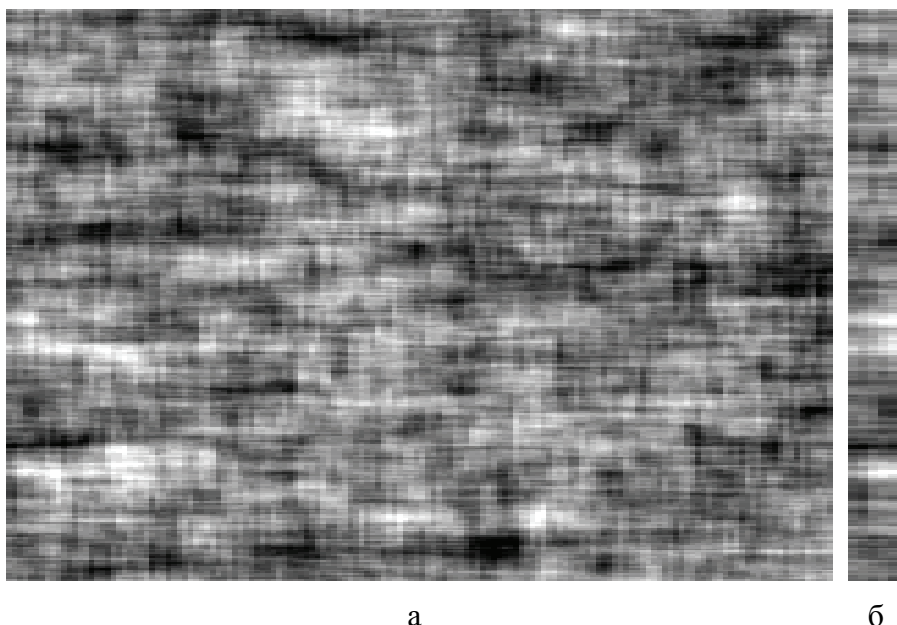


Рис. 1. Изображение, имитированное моделью Хабиби (а), его первые столбцы (б);

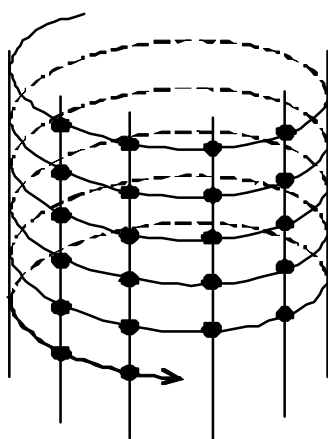


Рис. 2. Спиралевидная сетка на цилиндре.

аналог спирали Архимеда $\theta = 2\pi kt$, где $\theta \in [0; \pi]$ – полярный угол; $t \in [0; 1/2\pi k]$ – параметр (рис. 4); $2\pi k$ – угловое расстояние между соседними витками спирали; $2\pi kR$ – межвитковое расстояние. На этой спирали возьмём точки на расстоянии $2\pi kR$ друг от друга, начиная с “Северного полюса”, то есть с $t = 0$, что даёт примерно равномерную сетку отсчётов на сфере.

Далее становится возможным применение авторегрессионной модели, например, вида (2), когда значение в очередной точке спирали зависит от предыдущей точки и от точек на предыдущем витке. Однако коэффициенты этой модели уже не будут постоянными из-за изме-

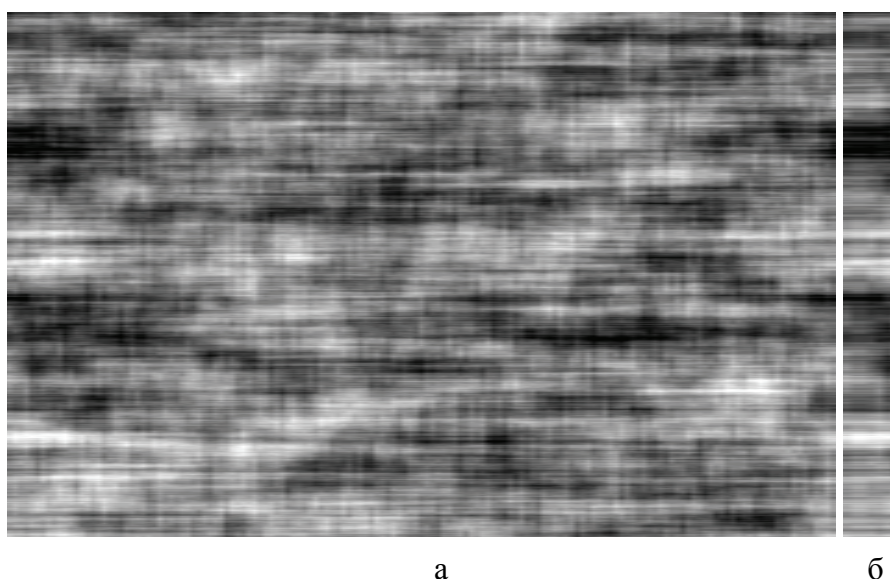


Рис 3. Изображение, имитированное спиральной моделью (а), его первые столбцы (б).

няющейся геометрии расположения точек при движении по спирали. Это значительно усложняет модель.

К сожалению, на сфере нельзя задать сетки отсчётов с равномерной плотностью, как это можно было сделать на цилиндре. Поэтому и авторегрессионные модели на сфере получают сложными для анализа, синтеза и технической реализации.

Чтобы упростить модель, возьмём на сфере вспомогательную спираль с тем же количеством витков, но с большим одинаковым количеством точек на всех витках. Тогда сетку отсчётов можно считать приблизительно прямоугольной, а коэффициенты авторегрессионной модели можно выбирать постоянными в пределах одного витка (в зависимости от длины этого витка). А именно, меняться будет только корреляция СП вдоль витка (чем длиннее виток, тем меньше корреляция между соседними точками). Значения изображения в заданной системе точек на поверхности определяются интерполяцией из построенной вспомогательной спирали. Полученная приближённая модель оказывается значительно проще и даёт изображения, близкие по своим характеристикам к требуемым. На рис. 4 показан пример имитации изображения на сфере с помощью спиралевидной модели, аналогичной (3). Естественно, что полученное изображение вблизи экватора похоже по структуре на изображения, генерируемые моделью Хабиби – сильная корреляция по меридианам и параллелям. На полюсах меридианы сходятся, поэтому там радиально-кольцевая структура изображения.

Изображение на других поверхностях. Аналогичным образом возможно построение

спиралевидных моделей СП на других поверхностях, особенно на поверхностях вращения.

НЕКАУЗАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

Наряду с авторегрессионными (каузальными) моделями СП на плоских и пространственных прямоугольных сетках существует ряд некаузальных моделей. Например, гиббсовские поля [2], когда значение СП в точке зависит от ближайших соседей, не предшествующих этой точке в порядке некоторой развёртки. Стохастические уравнения таких СП имеют вид

$$x(p) = f(\{x(u), u \in G_p\}, \xi_p), \quad (3)$$

где $x(p)$ – значение СП в точке p ; G_p – множество ближайших соседей; ξ_p – случайное возмущение. В линейных моделях (3) имеет вид

$$x(p) = A \cdot (x(u), u \in G_p) + \xi_p, \quad (4)$$

где A – матрица; $(x(u), u \in G_p)$ – вектор из отсчётов СП по множеству ближайших соседей G_p ; ξ_p – случайное возмущение. При имитации СП по этой модели сначала разыгрываются возмущения ξ_p , затем решается система линейных уравнений (4).

Если все собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы, то возможна реализация модели (4) прогонкой, начиная, например, с тождественно нулевого приближения. Такой случай имеет место, например, когда (4) представляет собой усреднение по ближайшим отсчётам с суммой модулей коэффициентов меньше единицы.

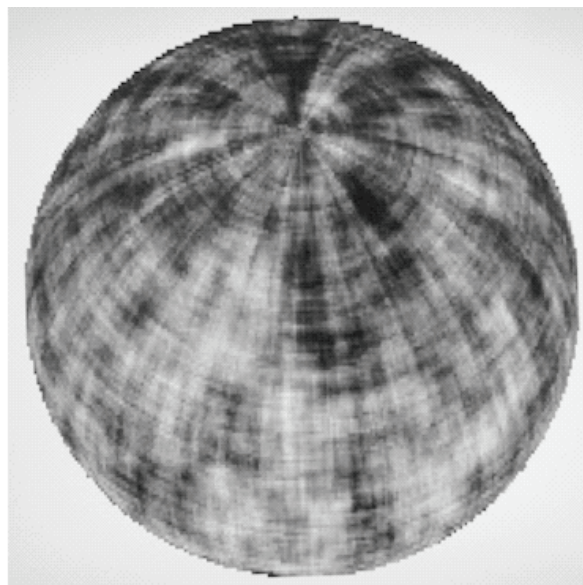
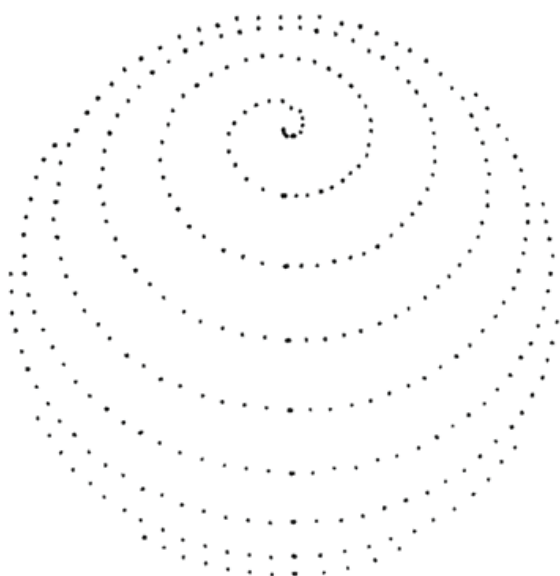


Рис. 4. Спиралевидная сетка на сфере и имитированное изображение

МОДЕЛИ СП НА ПОВЕРХНОСТИ В ВИДЕ ОТСЧЁТОВ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СП

Построение моделей СП непосредственно на поверхностях (за исключением цилиндра) сложны в анализе, синтезе и реализации. Поэтому приходится находить другие методы задания СП на поверхностях. Представляется перспективным следующий подход.

Пусть задана произвольная поверхность S . Для задания СП на ней можно применить простой приём: взять некоторое СП в пространстве P , содержащем S , и принять за отсчёты СП в точках поверхности значения пространственного СП в этих точках.

При этом можно использовать любую модель СП в пространстве. Однако следует учесть, что необходимо получать отсчёты изображения именно в точках поверхности.

МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА АВТОРЕГРЕССИОННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СП

Применим пространственное авторегрессионное СП, например, авторегрессионную модель, определённую на прямоугольной сетке P . Но тогда понадобится процедура аппроксимации значений СП в точки поверхности. Ещё одно неудобство состоит в том, что авторегрессионная модель требует последовательного вычисления значений СП во всех точках сетки, поэтому при имитации СП на поверхности будет вычислено и не использовано большое количество значений пространственного СП. Кроме того, син-

тез авторегрессионных моделей с заданной КФ очень сложен, что препятствует построению изображений на поверхностях с заданной КФ.

На рис. 5,а показано изображение на сфере, полученное из трёхмерного авторегрессионного СП с множительной корреляцией вида модели Хабиби [3]. На нём проглядываются круги, параллельные трём координатным плоскостям. Это объясняется тем, что при переходе с одного сечения сферы на другое КФ быстро убывает, поэтому СП в пределах одного параллельного сечения более коррелировано, чем на соседних сечениях, что и приводит к впечатлению, что изображение является наложением кругов. В плоском случае, как мы видели раньше, модель Хабиби похожа на клетчатую ткань, то есть образована пересечением системы прямолинейных отрезков.

На рис. 5,б показан пример изображения на сфере, когда СП в пространстве состоит из слоёв, имитированных с помощью четырёхточечной авторегрессионной модели [3], а между слоями экспоненциальная корреляция. Это изображение выглядит более однородным по всей сфере.

МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА ВОЛНОВЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СП

Более удобна для построения изображений на поверхностях волновая модель [3,4]. В этой модели СП является суммой волн (возмущений), возникающих в случайных точках непрерывного трёхмерного пространства. Если взять гауссоидные волны, то получаем

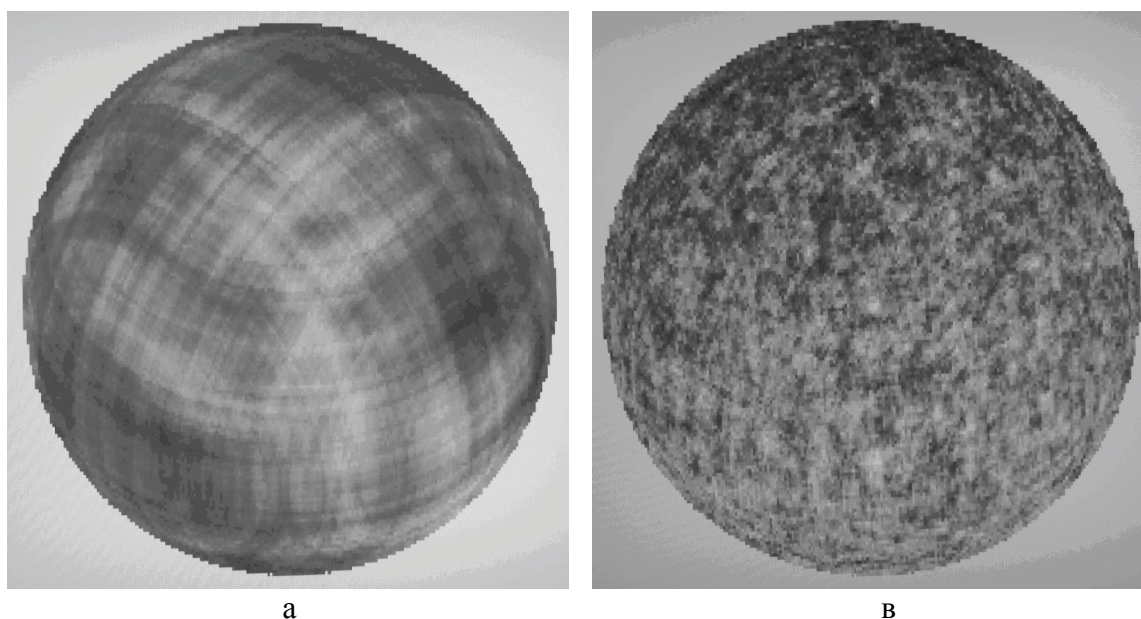


Рис. 5. Изображения на сфере, полученные из пространственных авторегрессионных полей: а – модель Хабиби, б –четырёхточечная модель слоёв

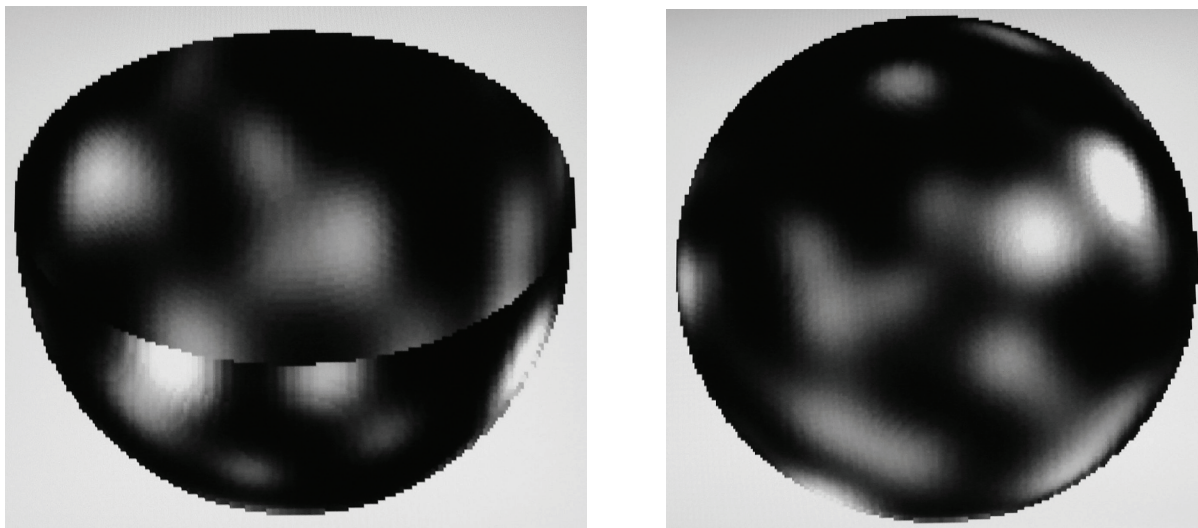


Рис. 6. Изображения на полусфере и сфере, имитированные с помощью волновой модели

$$x(p) = c \sum_u \xi_u \exp(-2d_u^2 / R_u^2), \quad (5)$$

где суммирование производится по всем случайным центрам волн u ; d_u – расстояние от u до p ; R_u – случайный коэффициент масштаба волны; ξ_u – стандартная нормальная случайная величина; c – коэффициент. Для того, чтобы эта модель порождала СП с заданной КФ, нужно только выбрать подходящее распределение вероятностей масштабного коэффициента R_u . На рис. 6 показаны примеры изображений на полусфере и сфере, имитированных с помощью волновой модели в трёхмерном пространстве.

Отметим, что применение многомерной волновой модели делает возможным представление и имитацию изображений и на гиперповерхностях любых размерностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Палагин Ю.И. Имитационные параметрические модели случайных полей на сфере // Автоматика и телемеханика. 2000. № 1. С. 80-87.
2. Васильев К.К., Крашенинников В.Р. Статистический анализ многомерных изображений. Ульяновск: УЛГТУ. 2007. 172 с.
3. Krashennnikov V.R., Kalinov D.V., Pankratov Yu.G. Spiral Autoregressive Model of a Quasi periodic Signal// Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 11, No. 1, 2001, pp. 211-213.
4. Малышев В.А., Минлос Р.А. Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений. М.: Наука, 1988. 288 с.
5. Krashennnikov V.R. Wave Image Models on the Surfaces // Proceedings of 8th Open German-Russian Workshop "Pattern Recognition and Image Understanding" OGRW-8-2011. Nizhny Novgorod, 2011. Pp. 154-157.

RANDOM FIELDS MODELS ON SURFACES

© 2012 V.R. Krashennnikov

Ulianovsk State Technical University

Models of random fields given on arbitrary surfaces are suggested. They can be used in mathematic representation of images, planets relief, gravitation and others physical characteristics.

Key words: surface, random field, image, autoregression, wave, causal and non-causal models.