УДК 521.95

РАЗЛОЖЕНИЕ ЗАДАННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПО СИСТЕМЕ НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

© 2012 В.Р. Крашенинников, Р.Р. Микеев

Ульяновский государственный технический университет

Поступила в редакцию 02.11.2012

Предложен способ построения математической модели заданной характеристики методом наименьших квадратов в виде разложения по заданной системе функций, которые не ортогональны по своей природе или ввиду нерегулярности системы точек отсчёта. В качестве примера приводится построение модели рельефа Луны по данным каталога ULCN 2005.

Ключевые слова: моделирование рельефа, метод наименьших квадратов, ортонормирование системы функций, нерегулярная система отсчётов, двумерный ряд Фурье.

В настоящее время к точности математического описания различных характеристик объектов предъявляются повышенные требования. Например, большое значение имеет разработка математических моделей по имеющимся измерениям потенциального поля или мегарельефа Луны и планет земной группы в связи с задачами их исследования и навигации космических аппаратов. При построении этих моделей возникают трудности, связанные с большим количеством точек отсчёта (измерений) и с большим количеством функций, по которым производится разложение. В данной работе предлагается способ преодоления этих технических трудностей.

Пусть даны функции $\{f_1(x), f_2(x),\dots,f_M(x)\}=F$, определённые на множестве точек $\{x_1, x_2,\dots, x_N\}=X$, где X – множество точек из любого пространства (прямая, плоскость, сфера и т.д.). Требуется аппроксимировать заданную функцию $H(x)$ по системе F, то есть получить приближение

$$H(x) \approx \alpha_1 f_1(x)+\dots+\alpha_M f_M(x), \qquad (1)$$

оптимальное по методу наименьших квадратов (МНК).

В практических задачах область определения X представляет собой набор точек, где имеются измерения характеристики $H(x)$, например, измерения рельефа планеты космическими аппаратами. Это множество обычно представляет собой нерегулярный набор точек, в частности, бессистемный набор точек на сфере при исследовании планет. Ввиду бессистемности множества X функции из F оказываются неортогональными, даже если они являются ортогональными как непрерывные или заданные на некоторой специальной сетке. Поэтому применение МНК приводит к решению очень больших систем линейных уравнений, что далеко не всегда удаётся выполнить с требуемым качеством. В ряде работ предлагается введение специальной сетки отсчётов, на которой функции F являются ортонормированными, например, выборочные, сферические и двумерные тригонометрические функции. Но тогда приходится интерполировать измерения характеристики $H(x)$ в точки этой специальной сетки, что вносит дополнительные погрешности в модель уже в самом начале.

Для облегчения применения МНК можно сначала ортонормировать систему функций F, то есть получить систему функций $\Phi=\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_m(x)\}$ таких, что их скалярное произведение

$$(\varphi_i\varphi_j)=\sum_{x\in X}\varphi_i(x)\varphi_j(x)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases} \qquad (2)$$

При этом возможно, что система F линейно зависима, тогда $m<M$. Функции Φ линейно выражаются через F, то есть Φ будет ортонормированным базисом линейного пространства векторов (в данном случае – функций), натянутого на F. Процедура Грама-Шмидта решает задачу ортогонализации системы векторов в случае линейно независимой системы F [1]:

$$y_1=f_1,\; y_2=\begin{vmatrix}(f_1f_1) & f_1\\ (f_2f_1) & f_2\end{vmatrix},\; y_3=\begin{vmatrix}(f_1f_1) & (f_1f_2) & f_1\\ (f_2f_1) & (f_2f_2) & f_2\\ (f_3f_1) & (f_3f_2) & f_3\end{vmatrix} \qquad (3)$$

$$\varphi_k(x)=\frac{y_k}{\sqrt{(y_k y_k)}}=\frac{1}{\sqrt{\Gamma_{k-1}\Gamma_k}}, \qquad (4)$$

Крашенинников Виктор Ростиславович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика».
E-mail: kvr@ulstu.ru
Микеев Руслан Раилевич, аспирант кафедры «Прикладная математика и информатика».
E-mail: ameekey@gmail.com

$$\Gamma_0 = 1\,,\ \ \Gamma_k = \Gamma(f_1,...,f_k) = \begin{vmatrix} (f_1 f_1) & .... & (f_1 f_k) \\ (f_2 f_1) & .... & (f_2 f_k) \\ .... & .... & .... \\ (f_k f_1) & .... & (f_k f_k) \end{vmatrix} - (5)$$

определители Грама. При этом, если потребовать, чтобы $\varphi_k(x)$ выражалась через $f_1(x),...,f_k(x)$, то решение (3-5) является единственным.

Если система функций $h_1(x),...,h_k(x)$ является линейно зависимой, то $\Gamma(h_1,...,h_k) = 0$. Поэтому, если $\Gamma_{k-1} \neq 0$ и $\Gamma_k = 0$, то в процедуре (3-5) функцию $f_k(x)$ следует удалить, так как она линейно зависима от предыдущих функций $f_1(x), f_2(x),..., f_{k-1}(x)$. Если при этом $f_k(x)$ тождественно не равна 0 (а тождественно равных нулю функций в F быть не должно), то из $(y_k f_k) = \Gamma_k = 0$ следует $y_k(x) \equiv 0$, что также является признаком линейной зависимости $f_k(x)$ от предыдущих функций.

При большем количестве M функций в множестве F процедура (3-5) становится громоздкой и может давать неточные результаты, так как требует вычисления определителей высоких порядков. Применим модифицированный вариант этой процедуры ортонормирования. Преобразуем процедуру следующим образом. Будем представлять очередную функцию $\varphi_k(x)$ в виде разложения по $f_k(x)$ и уже найденным $\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_{k-1}(x)$:

$$z_k(x) = f_k(x) - (f_k \varphi_1)\varphi_1(x) -$$

$$- (f_k \varphi_2)\varphi_2(x) - ... - (f_k \varphi_{k-1})\varphi_{k-1}(x)\,, \quad (6)$$

$$\varphi_k(x) = \frac{z_k(x)}{\sqrt{(z_k z_k)}} =$$

$$= \frac{y_k(x)}{\sqrt{(f_k f_k) - (f_k\varphi_1)^2 - (f_k\varphi_2)^2 - ... - (f_k\varphi_{k-1})^2}}\,. \quad (7)$$

В силу единственности системы функций Φ процедуры (3-5) и (6-7) дают одни и те же функции Φ, а функции $y_k(x)$ и $z_k(x)$ могут отличаться только постоянным множителем. Поэтому, если $z_k(x) \equiv 0$ (или подкоренное выражение в (7) равно нулю), то $f_k(x)$ нужно исключить из рассмотрения.

Отметим, что процедура (6-7) не требует вычисления определителей больших порядков, как это имеет место в (3-5). Однако получаемые функции в (6-7) не выражены в явном виде через функции F. При необходимости к этому представлению

$$\varphi_k = c_{k1} f_1 + c_{k2} f_2 + ... + c_{kk} f_k \quad (8)$$

можно вернуться следующим образом. Представим (6-7) в виде

$$\varphi_k = a_{k1}\varphi_1 + a_{k2}\varphi_2 + ... + a_{k,k-1}\varphi_{k-1} + a_{kk} f_k\,. \quad (9)$$

Тогда

$$c_{kp} = a_{kp}c_{pp} + a_{k,p+1}c_{p+1,p} + a_{k,p+2}c_{p+2,p} + ...$$

$$... + a_{k,k-1}c_{k-1,p} = \begin{cases} \sum_{i=p}^{k-1} a_{ki}c_{ip}, & i \le p \le k-1, \\ a_{kk}, & p = k. \end{cases} \quad (10)$$

Или в матричном виде:

$$\overline{C}_k = \begin{pmatrix} c_{k,1} \\ c_{k,2} \\ c_{k,3} \\ \cdots \\ c_{k,k-1} \\ c_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots & a_{k,k-1} & 0 \\ 0 & a_{k2} & a_{k3} & \ldots & a_{k,k-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{k3} & \ldots & a_{k,k-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{k,k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{k-1,1} \\ c_{k-1,2} \\ c_{k-1,3} \\ \cdots \\ c_{k-1,k-1} \\ a_{kk} \end{pmatrix} = A_k \begin{pmatrix} \overline{C}_{k-1} \\ a_{kk} \end{pmatrix} (11)$$

Приведём в качестве иллюстрации построение модели мегарельефа Луны в виде конечного отрезка двумерного ряда Фурье

$$H(\theta,\lambda) \approx a_0 + \sum_{m,n=1}^{L} \cos(m\theta)[a_{mn}\cos(n\lambda) + b_{mn}\sin(n\lambda)] \quad (12)$$

по данным каталога ULCN 2005 [2], содержащего 272931 точек. Из этого каталога выбиралось множество *S* из 7736 опорных точек, приблизительно равномерно распределённых по поверхности, и для них описанным способом строились модели (12) с различными порядками *L*. При возрастании порядка модели (12) СКО её погрешности на множестве *S* уменьшалось до нуля. Однако СКО на всём каталоге достигало минимума 4.78км при *L*=17, а затем начинало возрастать, так как при повышении порядка в модель вводятся высокочастотные гармоники, несвойственные рельефу Луны. Это является обычной ситуацией при построении моделей: на опорных точках она может быть хорошей, но неудачной в целом. Отметим, что применение стандартных пакетов программ (например, АСНИ “СФЕРА” [3], SHTOOLS [4]) для построения модели непосредственно методом наименьших квадратов на *S* оказалось безуспешным из-за вычислительных погрешностей при решении систем линейных уравнений высоких порядков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М. : Наука, 1967. 576 с.

2. The Unified Lunar Control Network 2005 / *B.A. Archinal, M.R. Rosiek, R.L. Kirk, B.L. Redding*//U.S. Geological Survey Open-File Report 2006-1367 Version 1.0 URL: http://pubs.usgs.gov/of/2006/1367/ (дата обращения 12.10.2012).
3. *Valeev S.G. Mikeev R.R.* The software package of statistical modeling of potential fields of the planets// International Astronomical Congress "Astrokazan-2011", August 22-30, Kazan, Russia. 2011. C.101-103
4. *Wieczorek M.A.* Gravity and topography of the terrestrial planets // Treatise on Geophysics. – 2007. Volume 10: Planets and Moons. Pp. 165-206.

GIVEN CHARACTERISTICS EXPANSION INTO NON-ORTHOGONAL FUNCTIONS BY LEAST SQUARE METHOD

Ulianovsk State Technical University

We propose a method of constructing a mathematical model of the characteristics of a given method of least squares in the form of an expansion in a given set of features that are not orthogonal by nature or because of irregularities of the reference points. As an example, to build a model of the relief of the moon according to the catalog ULCN 2005.

Keywords: terrain modeling, the method of least squares, the orthonormal system of functions, irregular frame of reference, the two-dimensional Fourier series.

Victor Krasheninnikov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head at the Applied Mathematics and Computer Science Department. E-mail: kvr@ulstu.ru
Ruslan Mikeev, Post-Graduate Student.
E-mail: ameekey@gmail.com