

УДК 653.511.012.005

## ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТРУДОЕМКОСТИ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ОРГАНИЗАЦИИ СЛОЖНЫХ ИЗДЕЛИЙ

© 2012 О.Э. Чоракаев<sup>1</sup>, И.В. Попов<sup>1</sup>, О.А. Верушкин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт авиационных технологий и управления

Ульяновского государственного технического университета

<sup>2</sup> Федеральный научно-производственный центр ОАО “НПО “Марс”

Поступила в редакцию 02.11.2012

В статье авторы разбирают численный пример экономико-математического моделирования автоматизированного проектирования системы и производственно-технологических процессов организации производства сложных изделий, в том числе элементов авиационной техники и представляет графоаналитическую интерпретацию состояния системы в зависимости от вложения средств по функции  $V = V(C)$ , где  $V$  – вложения по стоимости  $C$ ; приводят доказательство по предложенному методу и точности этого метода технико-экономического и экономико-математического моделирования производственно – технологических и организационных процессов организации производства САПР технико-экономического планирования (ТЭП) (САПРТЭП).

Ключевые слова: экономико-математическое моделирование, автоматизированное проектирование, производственно-технологические процессы.

Адаптацию метода технико-экономического и экономико-математического моделирования (описания) САПРТЭП по методологии ФСИ проведем на численном примере (элементах авиационной техники) вложения *средств* (затрат) с получением *дохода* в развитие и совершенствование названной системы.

Итак: 1. Пусть даны две пары чисел  $C_0 = 874, V_0 = 175$  (начальная точка) и  $C = 103423$  д.е.,  $V = 4370$  д.е. (конечная точка), определяющие соответственно связь между минимальными и максимальными величинами *затрат* и *доходов*. Считая, что в САПРТЭП поддерживается потенциальный уровень средней цены сборочных работ (и вычислительных услуг) при наличии критерия оптимальности

$$I^0 = \int_{C_0}^C x \ln(k_1 x) dx + \int_{V_0}^V y \ln(k_2 y) dy, \text{ то есть име-}$$

ется система, когда устанавливается зависимость  $V = V(C)$ , описывающая непрерывное изменение системы при переходе от начальной к конечной точке, обеспечивающих наиболее быстрое увеличение значений численной характеристики. Далее показано, что искомая зависимость будет иметь степенной вид.

Поскольку заданы две точки, степень  $\gamma$  и

константа  $A$  определяются однозначно:  $\gamma = \ln(V_0/V)/\ln(C_0/C) = 0,674, A = V_0/E_0^\gamma = 1,821$ . Тогда из соотношения вытекает, что  $k_2 = 0,0084$  определяется как корень уравнения  $k_2 \ln^\gamma(k_2 V_0) = \gamma^\gamma / V_0$  и далее  $k_1 = \gamma / C_0 \ln(k_2 V_0) = 0,002$ . Поэтому искомая зависимость – степенная и имеет вид  $V_1 = 1,821 \cdot C^{0,674}$ , а соответствующие средние цены равны  $\bar{C}_1 = 1/k_1 = 495,7, \bar{C}_2 = 1/k_2 = 119,3$ .

Далее, 2. Пусть в добавление к нижней и верхней точкам к численному примеру по п. 1 имеется набор точек (табл. 1), где величины эффекта  $C$  и соответствующего ему вознаграждения  $V$ ;  $V_n$  запланированные величины, а  $V_1$  и  $V_2$  – величины, рассчитанные по аппроксимирующим  $V$  зависимостям  $V_1 = 1,821 \cdot C^{0,674}$  и  $V_2 = 2,83 \cdot C^{0,64}$ . В этом случае не существует степенной зависимости, на графике которой лежат данные точки (рис. 1). Далее найдем степенную зависимость, которая была бы по возможности наиболее близка к набору точек, приведенных в табл. 1. Выбирая в качестве меры близости сумму квадратичных отклонений по методу наименьших квадратов, получим  $V_2 = 2,83 \cdot C^{0,64}$ . Значит,  $C_0 = 874, V_0 = 216$ , и далее  $k_2 = 0,0067$  определяется как корень уравнения  $k_2 \ln^\gamma(k_2 V_0) = \gamma^\gamma / V_0$  (при  $\gamma = 0,64$ ). Наконец,  $k_1 = \gamma / C_0 \ln(k_2 V_0) = 0,002$ , а соответствующие средние цены равны  $\bar{C}_1 = 1/k_1 = 495,7$ , а  $\bar{C}_2 = 1/k_2 = 150,3$ .

В частности, оптимальное отношение цены механосборочной и слесарной работы к цене

Чоракаев Олег Эдуардович, аспирант.

E-mail: olegchorakaev@yandex.ru

Попов Илья Валерьевич, аспирант.

Верушкин Олег Александрович, инженер.

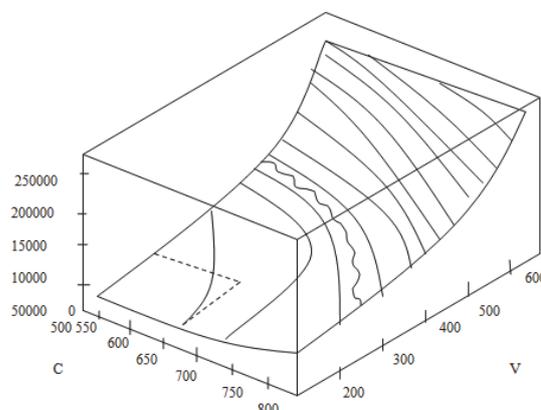
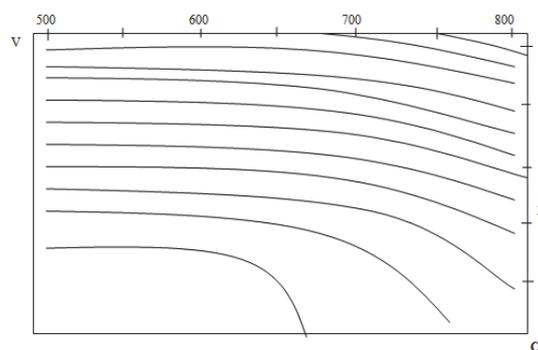
**Таблица 1.** Набор точек величины эффекта  $C$  и вознаграждения  $V$

$C$	$V_n$	$V_1$	$V_2$
874	175	175	216
2185	372	325	388
4370	656	518	605
8740	1093	526	943
13110	1442	1086	1222
17480	1704	1318	1469
21850	1923	1532	1695
30000	2167	1897	2075
40000	2467	2303	2495
50000	2767	2677	2878
60000	3067	3027	3235
70000	3367	3359	3570
80000	3667	3674	3888
90000	3967	3978	4193
103423	4370	4370	4583

вычислительной услуги равно примерно 4,2 и 3,3 соответственно в примерах по п.п. 1 и 2. Оптимальное отношение числа сборочных работ к числу вычислительных услуг (в примере п. 1) равно примерно 2,6 и 5,6, а (в примере п. 2) равно примерно 2,9 и 6,7 при затратах  $C=10000$  и

$C=100000$  соответственно. На рис. 1 задается множество кривых, каждая из которых определяет множество состояний САПРТЭП организации производства машиностроительного предприятия, имеющих одно и то же значение технико-экономической информационной характеристики системы. При увеличении средних значений затрат примерно в 1,5 раза и дохода в 3 раза [нижняя и верхняя линии уровня – “потенциальные возможности” САПРТЭП], ее “сложность” увеличивается примерно в 5 раз (рис. 1, б).

Таким образом, в рамках рассматриваемой модели САПРТЭП по схеме “затраты-доход” полученные результаты позволяют определять оптимальные пропорции между ее составляющими (в комплексе с промышленными АСУ и САПРТЭП) и оценивать “потенциальные возможности” состояния САПРТЭП в смысле характеристики, связанной в силу способа ее построения с множеством реализаций. Следует отметить, что хотя величины затрат, дохода (см. табл. 1), работ (сборочных), вычислительных услуг и измеряются в условных единицах (д.е.), эти данные основаны на реальном исследовании сборочного производства авиастроительного предприятия. Величины  $C$  и  $V_n$  имеют существенное значение, поскольку при их разработке явно или неявно использовались многочисленные содержательные свойства исследуемой организации производства машиностроительного предприятия как большой экономической системы при выполнении госбюджетных НИР и ОКР. При этом в примере по п.1 соответствует случай когда, по некоторым неформальным соображениям, *максимальным* и *минимальным* уровням *затрат* и *доходов* придается на авиастроительном предприятии решающее значение. В примере по п.2 отражен случай, когда все дан-



**Рис. 1.** Графоаналитическая интерпретация состояния системы от вложений по функциональной зависимости  $V = V(C)$ : а – линия уровня функции  $V=V(C)$ ; б – график функции  $V=V(C)$

ные таблицы 1 имеют значение, причем значимость каждой точки учитывается в той или иной мере в зависимости от поставленной цели за счет выбора соответствующей аппроксимации.

На основании вышеизложенного, приведем соответствующее аналитическое доказательство по п.п. 1 и 2 примера.

1. По п. 1 примера доказательство вытекает из свойств интеграла, ограничений

$$C(S) \leq C, \int_0^1 \ln f(S) dS \leq \ln \left( \int_0^1 f(S) dS \right), \text{ где}$$

$f(S)$  почти всюду неотрицательная суммируемая на отрезке  $[0,1]$  функция. Покажем справедливость этого неравенства. Если  $f(S)$  равна нулю на некотором множестве положительной меры, то левая часть неравенства равна  $-\infty$ , и тогда неравенство верно. В противном случае для почти всех  $S \in [0,1]$  в силу вогнутости логарифма получим, (касательная лежит выше графика вогнутой функции рис. 1):

$$\ln f(S) \leq \ln \left[ \int_0^1 f(S) dS \right] + \frac{1}{\int_0^1 f(S) dS} \left[ f(S) - \int_0^1 f(S) dS \right].$$

Интегрируя это неравенство по отрезку  $[0,1]$ , получим искомое неравенство, что и требовалось доказать.

2. По п. 2 примера 2.1. Действительно, рассмотрим, следующее семейство функций ( $\varepsilon > 0$ ):  $C_\varepsilon(S) = (2\varepsilon)^{-1} \cdot C$ ,  $B_\varepsilon(S) = (2\varepsilon)^{-1} \cdot B$ ,  $U_\varepsilon(S) = (2\varepsilon)^{-1} \cdot U$ ,  $V_\varepsilon(S) = (2\varepsilon)^{-1} \cdot V$  при  $S_0 - \varepsilon < S < S_0 + \varepsilon$  и  $C_\varepsilon(S) = 0$ ,  $B_\varepsilon(S) = 0$ ,  $U_\varepsilon(S) = 0$ ,  $V_\varepsilon(S) = 0$  для остальных  $S \in [0,1]$ , где  $S_0$  – некоторое число из интервала  $(0,1)$ . Тогда непосредственно проверяется, что функции этого семейства удовлетворяют соответствующим ограничениям и  $\Phi[C_\varepsilon(S), B_\varepsilon(S), V_\varepsilon(S), U_\varepsilon(S)] \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

2.2. Сформируем и докажем два вспомогательных утверждения:

2.2.1. Пусть  $f(t)$  – монотонная положительная непрерывная функция времени, определенная при  $t \geq x_0$ . Положим  $F(z) = \int_{x_0}^z f(t) dt$  при

$$z \geq x_0 \text{ и пусть}$$

$$F(z) \rightarrow +\infty \text{ при } z \rightarrow +\infty.$$

Пусть кроме того, некоторого  $R > 0$  при всех  $z \geq x_0$  выполняется неравенство  $F(z) \leq R \cdot zf(z)$ . Предположим далее, что каждому  $x$  однозначно сопоставлен некоторый  $y = y(x)$  [соответственно обратная зависимость:  $x = f(y)$ , причем  $y(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow +\infty$ ]. Тогда, если  $F(x) < F[y(x)]$  при

$x \rightarrow +\infty$ , то  $y(x) < x$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Докажем.

*Доказательство.* Пусть заключение предложения неверно. Тогда найдется некоторое положительное  $\delta$  и последовательности  $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow +\infty [y_n = y(x_n), x_n = x(y_n)]$  такие, что

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - 1 \right| \geq \delta, \left| \frac{y_n}{x_n} - 1 \right| \geq \delta. \quad (1)$$

По теореме о среднем для интеграла и в силу монотонности  $f(t)$  получим

$$|y_n - x_n| \leq \frac{|F(y_n) - F(x_n)|}{\min[f(x_n), f(y_n)]}. \quad (2)$$

Если  $f(x_n) = \min[f(x_n), f(y_n)]$ , то неравенство (2) можно переписать в виде

$$\frac{|y_n - x_n|}{x_n} \leq \frac{|F(y_n) - F(x_n)|}{F(x_n)} \cdot \frac{F(x_n)}{x_n f(x_n)}. \quad (3)$$

Если  $f(y_n) = \min[f(x_n), f(y_n)]$ , то неравенство (2) принимает вид

$$\frac{|y_n - x_n|}{y_n} \leq \frac{|F(y_n) - F(x_n)|}{F(y_n)} \cdot \frac{F(y_n)}{y_n f(y_n)}. \quad (4)$$

Но по условию п. 2.2.1 правые части неравенства (2)-(4) стремятся к нулю при  $n \rightarrow +\infty$ , что противоречит определенности от нуля левых частей этих неравенств в силу соотношений (1).

2.2.2. Для функции  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\ln t}}$ , некоторо-

го  $x_0 > 1$  и построенной по ним функции  $F(z)$ , выполняются сделанные в п. 2.2.1 допущения. Докажем это.

*Доказательство.* Свойства монотонности, положительности и непрерывности функции  $f(x)$  очевидны, а условие  $F(z) \rightarrow +\infty$  при  $z \rightarrow +\infty$  выполняется в силу расходимости соответствующего интеграла. Требуемая константа  $R > 0$  имеет место в силу непрерывности и существования конечного предела соответствующей функции, который (интеграл) вычисляется непосредственно с помощью правила Лопиталля:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{F(z)}{zf(z)} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{f(z)}{f(z) + zf'(z)} = 1.$$

3. Пусть  $B = B(t)$ ,  $C = C(t)$ ,  $U = U(t)$  и  $V = V(t)$  – решение системы и после интегрирования этих уравнений получим соотношения:

$$C^2 = B^2 \ln B - \frac{1}{2} B^2 + \bar{R}_1, \quad (5)$$

$$V^2 = U^2 \ln U - \frac{1}{2} U^2 + \bar{R}_2, \quad (6)$$

где  $\bar{C}_i (i = 1, 2)$  – постоянные, определяемые по формулам

$$\bar{R}_1 = C_0^2 - B_0^2 \ln B_0 - \frac{1}{2} B_0^2, \quad \bar{R}_2 = V_0^2 - U_0^2 \ln U_0 - \frac{1}{2} U_0^2.$$

Используя (5)-(6) получим:

$$\int_{B_0}^B \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \ln x - 0,5x^2 + \bar{R}_1}} = t,$$

$$\int_{U_0}^U \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \ln x - 0,5x^2 + \bar{R}_2}} = t. \quad (7)$$

Соотношения (5)-(7) полностью задают искомое решение. Установим требуемые свойства этого решения. Из (7) вытекает, что

$$\int_{B_0}^B \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \ln x - 0,5x^2 + \bar{R}_1}} = \int_{U_0}^U \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \ln x - 0,5x^2 + \bar{R}_2}}. \quad (8)$$

Здесь нетрудно видеть, что подкоренные выражения слева и справа в (8) – возрастающие непрерывные функции переменной  $x$  при  $x \geq B_0$  и  $x \geq U_0$ , равные  $x = B_0$  и  $x = U_0$  значениям  $C_0$  и  $V_0$  соответственно. Поэтому левая и правая части выражения (8) – непрерывные возрастающие функции переменных  $B$  и  $U$ . Множествами значений этих функций являются все неотрицательные числа в силу несуммируемости подинтегральных выражений в (8) (они эквивалентны функции  $1/\sqrt{\ln x}$  при  $x \rightarrow +\infty$ ). Следовательно соотношение (8) взаимнооднозначно определяет переменные  $B$  и  $U$ , причем  $B \rightarrow +\infty$  и  $U \rightarrow +\infty$ .

Из (8) вытекает:

$$\int_{\max(C_0, B_0)+1}^B \frac{dx}{\sqrt{\ln x}} \prec \int_{\max(C_0, B_0)+1}^{U(B)} \frac{dx}{\sqrt{\ln x}},$$

при  $B \rightarrow +\infty$ , где  $\prec$  – знак предопределения.

Тогда, по п.п. 2.2.1 и 2.2.2, получим  $B \prec U$  (при этом  $B \rightarrow +\infty, U \rightarrow +\infty$ ) и далее отсюда и из (5)-(6) устанавливаем, кроме того, что и  $C \prec V$  (при  $C \rightarrow +\infty, V \rightarrow +\infty$ ), что и требовалось доказать.

4. Пусть  $C = C(t), U = U(t)$  и  $V = V(t)$  – решение системы, тогда имеем соответственно:

$$(C + V) = \ln(kU)^2, \quad \left(\overset{\vee}{U}^2\right) = 2(C + V). \quad (9)$$

Отсюда

$$\left(\overset{\vee}{U}^2\right) = 2 \ln(kU^2). \quad (10)$$

Полагая  $z = U^2$  и делая стандартную замену  $\overset{\vee}{z} = P(z)$ , из (10) после понижения порядка уравнения и последующего интегрирования получим

$$P^2 = 4z \ln(kz) - 4z + 4R, \quad (11)$$

где  $R$  – постоянная, в силу начальных условий и уравнения (9), задается формулой:

$$R = (C_0 + V_0)^2 - U_0^2 \ln(kU_0^2) + U_0^2. \quad (12)$$

Следовательно, из (11) вытекает, что:

$$\int_{U_0^2}^{U^2} \frac{dz}{\sqrt{z \ln(kz) - z + R}} = 2t. \quad (13)$$

В силу условия  $k \geq 1/U_0^2$  подкоренное выражение слева (13) возрастающая непрерывная функция и при  $z \geq U_0^2$ , равная при  $z = U_0^2$  значению  $(C_0 + V_0)^2$ . Поэтому (13) однозначно определяет (см. аналогичные рассуждения в п. 2.3) искомое решение  $U = U(t)$ , причем  $U(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Далее получим решение  $C = C(t), V = V(t)$  в виде

$$C(t) = C_0 + \int_0^t \ln[U(x)] dx, \quad V(t) = V_0 + \int_0^t \ln[kU(x)] dx. \quad (14)$$

Соотношения (13)-(14) полностью задают искомое решение. Из (14) вытекает, что  $C(t) \rightarrow +\infty$  и  $V(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ , а в силу эквивалентности  $\ln U \prec \ln(kU)$  при  $U \rightarrow +\infty$  получим  $C \prec V$ .

5. Из системы уравнений вытекает, что искомое решение  $C = C(t), V = V(t)$  определяется соотношениями:

$$\int_{C_0}^C \frac{dx}{\ln(k_1 x) + 1} = t, \quad \int_{V_0}^V \frac{dx}{\ln(k_2 x) + 1} = t. \quad (15)$$

Рассуждая так же, как в п. 3, с применением п.п. 2.2.1 и 2.2.2 получим, что  $C \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty$  и  $C \prec V$ .

Следовательно, после анализа численного примера с доказательствами по п.п. 1, 2, 3, 4 и 5, имеется основание полагать, что разработанный *экономико-математический* метод описания САПРТЭП в составе комплексной системы опытного производства исследуемого предприятия, логичен, жизнеспособен и *функционально* применим для описания технико-экономических процессов опытного производства, а также может быть кооптирован на любые комплексные автоматизированные управляющие системы отрасли машиностроения и электронного приборостроения страны.

На основании вышеизложенного, необходимо отметить, что:

1. Существующие классические методы технико-экономического и экономико-математического моделирования производственно-технологических и организационных процессов организации производства с использованием САПРТЭП обеспечивают ряд вопросов *модели-*

рования, но не всегда эффективны из-за относительной сложности учета ограничений, налагаемых на изменение переменных, и необходимости решения двухточечных краевых задач с использованием программных комплексов и ЭВМ, что значительно затрудняется высокой стоимостью функции расчетов.

2. Проведенный анализ и исследование технико-экономических и экономико-математических методов описания САПРТЭП, а также разработанная методика технико-экономического и экономико-математического моделирования производственно-технологических и организационных процессов с использованием САПРТЭП, основанная на принципе технологии «затраты-доход» и «вложения-доход» по критериям функциональности и стоимости на уровне функции при верификации разработок, дают основание полагать, что разработанные методы и методика описания САПРТЭП наиболее полно обеспечивают взаимосвязку компонентов системы по функции (как полезному свойству, состоянию или действию) как с позиции технико-экономического и экономико-математического моделирования, так и математического интерпретирования и технико-экономического описания процессов организации производства технических систем.

3. Использование системы вложений по методике Канбан – «затраты-доход» и «вложения-

доход», позволяет уяснить принцип «затратности» любой исследовательской работы, которая может принести доход, доход весьма весомый, а может и остаться в виде затрат, без положительного экономического эффекта! Это позволяет исследователям при проведении НИР и ОКР *настраиваться* в направлении получения обязательного экономического эффекта разработок и экспериментов, что является положительным моментом «затратной» системы исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляшко Ф.Е. Методика проведения расчетов экономической эффективности работы сборочного производства самолетов на основе математического моделирования процессов в САПР, АСУТП, АСТПП комплексной АСУП // Проблемы машиностроения и автоматизации. Международный журнал. №2/2008. С.34-39
2. Маркорян И.Н. Разработка моделей и методов снижения трудоемкости сборочных процессов авиационного производства на основе функционально-стоимостного анализа. Дисс. ... канд. экон. наук. 08.00.13. - Математические и инструментальные методы экономики. Ульяновск, 2006. С.164.
3. Попов П.М. Оптимизация технических решений автоматизированного проектирования и управления разработками для комплексного повышения эффективности подготовки машиностроительных производств. Дисс. ... докт. техн. наук. 05.13.12 – «Системы автоматизации проектирования (по техническим наукам - промышленность)». Ульяновск. УлГТУ, 2001. С. 288.

## ECONOMIC MATHEMATICAL MODELING AIDED DESIGN LABOR-INTENSIVE PRODUCTION AND TECHNOLOGICAL PROCESS OF THE ORGANIZATION OF COMPLEX PRODUCTS

© 2012 O.E. Chorakaev<sup>1</sup>, I.V. Popov<sup>1</sup>, O.A. Verushkin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Aviation Technology and Management  
Ulyanovsk State Technical University

<sup>2</sup>Federal Research and Production Center of JSC "NPO" Mars " , Ulyanovsk

The authors make out a numerical example of economic and mathematical modeling computer-aided design and manufacturing systems - process of organizing production of complex products, including aircraft components and provides graphic-analytical interpretation of the system depending on the investments by the function  $V = V(C)$ , where  $V$  – investments at cost  $C$ , show evidence of the proposed method and the accuracy of the method feasibility and economic and mathematical modeling of production - technological and organizational processes of the organization of production of CAD technical and economic planning. Keywords: economic and mathematical modeling, computer-aided design, manufacturing and production processes.

---

Oleg Chorakaev, Graduate Student.  
E-mail: olegchorakaev@yandex.ru  
Ilya Popov, Graduate Student.  
Oleg Verushkin, Engineer