

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НАГРЕВА  
НАПЫЛЯЕМЫХ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕННОМ ПОТОКЕ**

© 2012 И.А.Докукина

Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П. Королева  
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 04.06.2012

Представлены результаты математического моделирования нагрева частиц плазменным потоком при их движении от среза сопла плазматрона до напыляемой поверхности. Полученные соотношения использованы для определения температуры нагрева и степени проплавления напыляемых частиц различного диаметра, движущихся по различным траекториям. Исследованиями установлено, что термическое состояние частиц различного диаметра отличается существенно. На расчетном режиме частицы малого диаметра прогреваются до температуры испарения, а 60 и 80-микронные частицы не достигают температуры плавления.

Ключевые слова: плазменные покрытия, математическое моделирование, нагрев частиц, формирование упорядоченной структуры

Для защиты поверхности ответственных деталей различных изделий машиностроения от высокотемпературной газовой коррозии, от повышенного износа поверхностей трения, пылевой или каплеударной эрозии широко применяются плазменные газотермические покрытия. Такое многофункциональное применение плазменных покрытий для защиты конструкционных материалов от воздействия различных внешних факторов связано с возможностью использования в этом методе очень широкой номенклатуры напыляемых порошковых материалов, высокой технологичностью метода, а так же возможностью управления эксплуатационными свойствами покрытий в процессе их нанесения [1, 2]. Однако, высокая эффективность плазменных покрытий в снижении мощности воздействия внешних факторов на конструкционный материал в значительной степени определяется особенностями их структуры.

Характерная структура плазменного газотермического покрытия имеет слоистый характер и состоит из дискообразных кристаллитов, расположенных вдоль поверхности конструкционного материала, горизонтальных и вертикальных границ между кристаллитами и микропустот, расположенных в области вертикальных границ кристаллитов [3]. Толщина каждого дискообразного кристаллита составляет (2-10) мкм и в (10-20) раз меньше его характерного горизонтального размера. Вертикальные границы кристал-

литов ограничены с двух сторон монолитным материалом других дискообразных кристаллитов. Одной из главных особенностей такой структуры плазменных покрытий является ее высокая демпфирующая способность к знакопеременным механическим и температурным напряжениям, а также способность локализовать усталостные повреждения и микротрещины внутри зерна кристаллита не давая им возможности прорасти до конструкционного материала основы. Физическая природа образования слоистой структуры из дискообразных кристаллитов при получении плазменных покрытий связана с последовательным осаждением ускоренных и нагретых в плазменной струе частиц порошкового материала, которые из-за удара о поверхность и последующей пластической деформации приобретают дискообразную форму.

Формирование структуры с заданными параметрами кристаллитов описано в [4]. При моделировании процесса деформации необходимо знать скорость и температуру частиц в момент осаждения на поверхность. Математическое моделирование процессов ускорения напыляемых частиц в плазменной струе и расчет траектории их движения в зависимости от режимов напыления и дисперсности напыляемого материала [5] показали, что при большой дисперсии диаметров напыляемых частиц они попадают на поверхность детали с существенной сепарацией в пятне напыления по траекториям, скоростям и температурам. Неучет этого эффекта неизбежно приведет к снижению качества нанесенного покрытия, так как формирование вышеописанной структуры покрытия должно осуществляться из

*Докукина Ирина Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры производства летательных аппаратов и управления качеством в машиностроении.  
E-mail: bogdanovich@ssau.ru*

оплавленных, но не расплавленных полностью частиц.

Нагрев частиц плазменной струёй определяется температурой плазменного потока, который меняется в зависимости от траектории движения частицы, и скорости.

В данной статье представлены результаты математического моделирования нагрева частиц плазменным потоком при их движении от среза сопла плазматрона до напыляемой поверхности. Нагрев частиц осуществляется за счет конвективного теплообмена и теплообмена излучением. Основным допущением при моделировании нагрева частиц, используемым во всех опубликованных работах по плазменному напылению, является предположение о форме частиц, близкой к сферической и допущение о равномерности теплового потока, действующего на поверхности сферы. Известно, что конвективный теплообмен поверхности с обтекающим ее потоком газа определяется критерием Нуссельта  $Nu = \alpha D / \lambda_r$ , где  $\alpha$  – коэффициент конвективного теплообмена,  $D$  – диаметр частицы,  $\lambda_r$  – теплопроводность плазмы. Экспериментально установлено, что наиболее корректные результаты при оценке конвективного теплообмена между частицами и аргоновой, азотной и водородной плазм получают при использовании выражения:

$$Nu = 2 \left\{ 1 + 0,63 \cdot Re \cdot Pr^{0,8} \left( \frac{Pr_c}{Pr_r} \right)^{0,42} \left[ \frac{\rho_c^2 v_r}{\rho_c^2 v_c} \right] c^2 \right\}, \quad (1)$$

где  $c = \left[ 1 - (H_c / H_r)^{1,14} \right] / \left[ 1 - (H_c / H_r)^2 \right]$ ,  $Pr = \nu / a_r$  – число Прандтля,  $a_r = \lambda_r / \rho_r c_r$  – коэффициент температуропроводности газа,  $H$  – энтальпия газа, индекс "Г" относится к параметру в газе, то есть получен при температуре плазмы, а индекс "С" относится к этому же параметру в пограничном слое на поверхности (обычно рассчитывается при температуре  $(T_r + T) / 2$ , где  $T$  – температура поверхности).

Расчет по соотношению (1) для типовых плазм и частиц, используемых при плазменном напылении, дает для слагаемого в фигурных скобках величину не превышающую 5%. Следовательно, с погрешностью не более 5% можно считать, что критерий Нуссельта в этих условиях примерно равен  $Nu = 2$ , не зависит от числа Рейнольдса  $Re$  и, следовательно, условия теплообмена в различных точках поверхности одинаковы. В связи с этим распределение температуры в частице зависит только от координаты  $z$  и времени  $t$  и для теплофизических параметров частицы, не зависящих от температуры и равных средним значением этих параметров в диапазо-

не температур от начальной  $T_0$  до температуры плавления  $T_m$ , определяется из решения уравнения теплопроводности в сферической системе координат:

$$\frac{\partial(rT)}{\partial t} = a \frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2}, \quad t > 0, \quad T < T_m, \quad (2)$$

где  $a = \lambda / \rho \cdot c$  – коэффициент температуропроводности частицы.

Дифференциальное уравнение (2) должно быть дополнено начальным условием

$$T(r, 0) = T_0, \quad (3)$$

граничным условием на внешней поверхности, отражающим, в общем случае, теплообмен конвекцией и излучением,

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha [T_r - T] - \varepsilon \sigma [T^4 - T_c^4], \quad \text{при } r = R, \quad (4)$$

и условием отсутствия теплового потока в центре шара  $r = 0$  и ограниченности температуры в этой точке

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad T(0, t) < \infty, \quad \text{при } r = 0, \quad (5)$$

где  $\varepsilon$  – полный коэффициент теплоизлучения,  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана,  $T_c$  – температура окружающей среды.

Решение краевой задачи (2)-(5) из-за нелинейности граничного условия (4) нельзя представить в замкнутом аналитическом виде. Однако можно показать, что в высокотемпературной области плазменной струи вклад охлаждения частицы излучением является незначительным. Действительно, переходя в (4) к относительным температурам  $\theta'(r, t) = T(r, t) / T_m$  и относительным координатам  $\xi = r / R$ , представим (4) в виде:

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \xi} = Bi [\theta'_r - \theta'] - Sk [(\theta')^4 - (\theta'_c)^4], \quad (6)$$

где критерии Био  $Bi$  и Старка  $Sk$  введены на основе обычных соотношений

$$Bi = \alpha R / \lambda, \quad Sk = \varepsilon \sigma T_m^3 R / \lambda \quad \text{и} \quad \theta'_r = T_r / T_m, \quad \theta'_c = T_c / T_m, \quad T_m - \text{температура плавления.}$$

Из соотношения (6) видно, что вклад теплоизлучения можно оценить соотношением

$$\delta = Sk [(\theta')^4 - (\theta'_c)^4] / Bi [\theta'_r - \theta'] < \frac{Sk}{Bi} \left[ \frac{(\theta')^4 - (\theta'_c)^4}{\theta'_r} \right] < \frac{Sk}{Bi} \cdot \frac{(\theta')^4}{\theta'_r}. \quad (7)$$

Численный анализ (7) показывает, что в области высокотемпературной части плазменной струи  $\theta' \leq 1$ ,  $\theta'_r > 3$ , величина критерия Старка для типовых напыляемых материалов

$Sk \leq 1,6 \cdot 10^{-2}$ , а величина критерия Био например для окиси циркония и никеля в различных плазмообразующих газах  $Bi$  лежит в диапазоне от 0,25 до 1,5 и от 0,007 до 0,1[6]. Следовательно,  $\delta < 0,02$ , то есть с погрешностью менее 2% в первой области плазменной струи и некоторой части основного течения плазмы вторым слагаемым в (4), связанным с охлаждением частицы тепловым излучением, можно пренебречь и краевая задача (2)-(5) становится линейной.

При решении краевой задачи (2)-(5) также как и при расчете скорости частицы выделим две области. В первой области температура газа  $T_r$  и другие параметры плазменной струи постоянны, а во второй области они являются функциями координаты плазменной струи. Однако, каждая напыляемая частица движется по определенной траектории  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , задаваемой в неявном виде через время  $t$ . Поэтому температура плазмы  $T_r$ , входящая в соотношение (4), в конечном счете на основе перехода  $T_r = T_r(x(t), y(t)) = T_r(t)$  выражается через время нагрева частицы. Причем при  $t \leq t_{я}$  (частица находится в ядре плазменной струи)  $T_r = T_{r,0} = const$ , а при  $t > t_{я}$   $T_r = T_r(t)$ .

Переходя в (2)-(5) к относительной избыточной температуре

$$\theta = (T - T_0)/(T_{r,0} - T_0) \quad (8)$$

приводим краевую задачу к безразмерному виду:

$$\frac{\partial(\xi\theta)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2(\xi\theta)}{\partial \xi^2}, \quad (9)$$

$$\theta(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = Bi(\theta_r - \theta) \quad \text{при } \xi = 1, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0, \quad \theta(0, Fo) \neq \infty,$$

где  $\xi = r/R$ ,  $Bi = \alpha R/\lambda$ ,  $Fo = at/R^2$ ,

$$\theta_r = (T_r(t) - T_0)/(T_{r,0} - T_0). \quad (11)$$

Решение краевой задачи (8)-(11) с температурой окружающей среды  $\theta_r = \theta_r(Fo)$  заданной как функцией времени  $t$  или функцией числа Фурье  $Fo$  известно [7] и с помощью преобразования Лапласа и применения теоремы Дюамеля может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} \theta(\xi, Fo) &= \frac{\partial}{\partial Fo_0} \int_0^{Fo} \theta_r(\tau) G(\xi, Fo - \tau) d\tau = \\ &= \frac{\partial}{\partial Fo_0} \int_0^{Fo} \theta_r(Fo - \tau) G(\xi, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{где } G(\xi, Fo) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin \mu_n \xi}{\mu_n \xi} \exp(-\mu_n^2 Fo), \quad (13)$$

$$A_n = (-1)^{n+1} \frac{2Bi \sqrt{\mu_n^2 + (Bi - 1)^2}}{\mu_n^2 + Bi^2 - Bi},$$

$\mu_n$  – корень характеристического уравнения(14)

$$tg \mu_n = \mu_n / (1 - Bi). \quad (15)$$

Вид решения (12) в области ядра плазменной струи упрощается в связи с тем, что в этой первой области  $\theta_r(Fo) = 1$  ( $T_r(t) \equiv T_{r,0}$ ) и решение (12) имеет вид:

$$\theta_r = (Fo) \equiv G(\xi, Fo), \quad \text{при } Fo \leq Fo_{я}, \quad (16)$$

где  $Fo_{я} = at_{я}/R^2$ ,  $t_{я}$  – время нахождения частицы в ядре плазменной струи.

Проведение численных расчетов распределения температуры по сечению напыляемой частицы в различные моменты времени ее движения в плазменной струе по соотношениям (12), (13) и по заданному виду распределения температуры струи [5] не представляет математических сложностей, однако эти расчеты могут быть существенно упрощены на определенных участках траектории движения частицы с учетом малости размеров напыляемых частиц.

Действительно, из анализа решения (12), (13) и (16) вытекает, что при не слишком малых значениях  $Fo$  для любых значений  $Bi$  ряд в (13) достаточно быстро сходится из-за быстрого увеличения значений  $\mu_n$  с ростом  $n$  в (15) и экспоненциального роста сомножителей  $\exp(-\mu_n^2 Fo)$ . Поэтому после протекания начального периода нагрева шара, когда при малых  $Fo$  необходимо учитывать ряд членов ряда в (13) (так называемый неупорядоченный режим нагрева [7]), наступает период  $Fo_1$ , когда решение (13) с высокой точностью описывается только первым слагаемым суммы

$$\theta(\xi, Fo) = 1 - A_1 \frac{\sin \mu_1 \xi}{\mu_1 \xi} e^{-\mu_1^2 Fo}, \quad Fo \geq Fo_1. \quad (17)$$

Эта стадия нагрева носит название регулярного режима [7].

На этой стадии относительную разность температур между поверхностью шара и его центром из (16) можно представить в виде:

$$\varepsilon = \frac{\theta(1, Fo) - \theta(0, Fo)}{\theta(1, Fo)} = \frac{A_1 \left(1 - \frac{\sin \mu_1}{\mu_1}\right) e^{-\mu_1^2 Fo}}{1 - A_1 \frac{\sin \mu_1}{\mu_1} e^{-\mu_1^2 Fo}} \quad (18)$$

$Fo \geq Fo_1$ .

Из (18) по заданной величине  $\varepsilon$  и величине

$Bi$  можно найти момент времени  $Fo_1$ , когда эта разность температур достаточно мала

$$Fo_1 = \mu_1^{-2} \ln[A_1(1 - (\sin \mu_1)/\mu_1)/\varepsilon] \quad (19)$$

и температуру по сечению частицы можно считать с нужной точностью постоянной и рассматривать тепловые процессы ее нагрева в приближении термически “тонкой” частицы.

Например, при  $Bi \cong 1$ , что характерно для окислов, из (19) находим, что при  $Fo > Fo_1 = 0,9$  относительная разность температур между поверхностью шара и его центром будет меньше 5% ( $\varepsilon = 0,05$ ). Следовательно, при нагреве окислов начиная с момента времени  $Fo > 0,9$  с погрешностью менее пяти процентов можно считать перепад температур по сечению частицы малым и использовать для анализа температур приближение термически “тонкой” частицы.

Этот момент времени, когда допустим переход от расчетов по общему решению (12) или (16) к более простому решению для термически “тонкой” частицы, близок к моменту времени выхода частиц из ядра плазменной струи. Для напыляемых частиц из металлов, этот момент времени достигается существенно раньше, чем частица выходит из ядра плазменной струи.

Действительно, нагрев металлических порошков, характеризуется малыми значениями  $Bi \ll 1$  (например, для никеля  $Bi$  лежит в диапазоне от 0,007 до 0,06 в зависимости от вида плазмообразующего газа), поэтому первый корень уравнения (15) равен [7]  $\mu_1^2 = 3Bi$ , а остальные находятся из решения уравнения (15) при  $Bi \cong 0$ . Это приводит к тому, что первый коэффициент (14) ряда (13) равен  $A_1 = 1$ , а остальные  $A_n \rightarrow 0$  при  $Bi \rightarrow 0$  для  $n > 1$ . В этом случае решение (16) существенно упрощается и принимает вид:

$$\theta(\xi, Fo) = 1 - \frac{\sin \xi \sqrt{3Bi}}{\xi \sqrt{3Bi}} e^{-3BiFo} \quad (20)$$

При этом разность температур между поверхностью шара  $\theta(1, Fo)$  и его центром  $\theta(0, Fo)$  имеет вид:

$$\theta(1, Fo) - \theta(0, Fo) \cong 0,5Bi e^{-3BiFo} \quad (21)$$

где при получении (21) использовано разложение  $\sin$  в (20) в ряде по  $\sqrt{3Bi} \ll 1$ .

Следовательно, перепад температур в шаре при малых  $Bi$  является малым. Его максимальное значение  $0,5Bi$  достигается при  $Fo = 0$  и в дальнейшем убывает. Поэтому при малых значениях  $Bi$  так же как и при наступлении регулярного температурного режима нагрева частицы можно исходить из того, что температура по сечению шара фактически постоянна (так назы-

ваемое приближение термически “тонкой” частицы) и вместо дифференциального уравнения в частных производных второго порядка для нахождения температуры использовать обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, получаемое из уравнения баланса тепла в частице.

Записывая уравнение баланса тепла для шара без предположений о независимости теплофизических параметров частицы от температуры получим:

$$mc \frac{dT}{dt} = \alpha S(T_r - T) - \varepsilon \sigma S(T^4 - T_c^4), \quad (22)$$

где  $m = \rho 4\pi R^3/3$  – масса шара,  $S = 4\pi R^2$  – площадь его поверхности.

Переходя к относительным переменным, получим:

$$\frac{1}{3} \frac{d\theta'}{dFo} = Bi(\theta'_r - \theta') - Sk((\theta')^4 - (\theta'_c)^4), \quad (23)$$

где для удобства, также как при получении соотношения (8) использована относительная температура  $\theta' = T/T_m$ ,  $\theta'_r = T_r/T_m$  и  $\theta'_c = T_c/T_m$ ,  $T_m$  – температура плавления частицы.

Расчет температуры частиц по полученным соотношениям проводился в следующей последовательности. По соотношениям [5] рассчитывалась траектория движения частицы заданного диаметра на заданном технологическом режиме и температура плазмы вдоль каждой точки ее траектории. Расчет распределения температуры по сечению частицы в период ее нахождения в ядре плазменной струи проводился по соотношению (16) и при этом контролировалась температура поверхности частицы и относительная разность температур между поверхностью и ее центром. Если величина этой относительной разности становилась менее 5%, для дальнейшего расчета использовалось соотношение (23) в виде конечно-разностного уравнения. Если при выходе частицы из ядра плазменной струи величина этой относительной разности превышала 5%, то для расчета температур использовалось соотношение (12) и оно применялось до тех моментов времени, пока величина относительной разности температур не становилась менее 5%. Расчет по такой схеме проводился до момента времени, при котором температура поверхности достигала температуры плавления материала частицы.

Как уже отмечалось ранее, установление в рамках математической модели режимов, при которых частицы заданной дисперсности достигают температуры плавления и частично оплавляются, что обеспечивает высокие адгезионные и когезионные свойства покрытия, так как при-

варивание частиц происходит в твердой фазе через прослойку расплавленного материала, позволяет существенно сократить объем трудоемких и дорогих технологических исследований из-за локализации диапазонов их варьирования.

Однако, важным для научных и практических исследований является исследование зоны проплавления напыляемых частиц.

При достижении на поверхности частицы температуры плавления скорость повышения температуры в частице резко уменьшается из-за того, что получаемое тепло начинается затрачиваться на перевод материала частицы из твердой в жидкую фазу. При этом краевая задача нагрева частицы (2) - (5) трансформируется в краевую двухслойную задачу для материала в жидкой и твердой фазе с фазовой границей раздела материала  $r_m = r_m(t)$ , перемещающейся от поверхности частицы к ее центру.

Математическая постановка такой задачи состоит из двух уравнений теплопроводности для твердой и жидкой фаз [8]:

$$\frac{\partial(rT)}{\partial t} = a \frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2}, \quad r \in [0, r_m(t)], \quad t > 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial(rT)}{\partial t} = a_p \frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2}, \quad r_m \in [r_m(t), R], \quad t > 0. \quad (25)$$

Здесь за момент времени  $t=0$  принят момент, когда температура поверхности достигает температуры плавления.

Решение этих уравнений должно удовлетворять начальному условию:

$$T(r, 0) = f(r), \quad f(R) = T_m, \quad (26)$$

вытекающему из решения краевой задачи нагрева частицы до температуры плавления.

Граничные условия на внешней поверхности частицы имеют тот же вид, что и в краевой задаче нагрева (4):

$$\lambda_p \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha(T_\Gamma - T), \quad r = R, \quad (27)$$

с требованием ограниченности решения при  $r = 0$  (5)

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad T(0, t) < \infty, \quad r = 0. \quad (28)$$

На границе раздела твердой и жидкой фаз  $r = r_m(t)$  должно удовлетворять условие равенства температуры температуре плавления:

$$T(r_m(t), t) = T_m \quad (29)$$

и условие Стефана

$$\lambda_p \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_m+0} - \lambda_p \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_m-0} = \rho L \frac{dr_m}{dt}, \quad (30)$$

где  $L$  – скрытая теплота фазового перехода материала из твердой в жидкую фазу, индекс “ $p$ ” в параметрах означает, что они отнесены к расплаву.

Точное аналитическое решение такой двухслойной краевой задачи Стефана для шара даже при  $T_\Gamma = const$  к настоящему времени не получено и в различных прикладных исследованиях используются различные приближенные решения с различными упрощениями в реальной физической модели процесса нагрева и плавления.

Существенным упрощением данной краевой задачи является то, что из-за малости размеров частиц к моменту времени, когда температура поверхности достигает температуры плавления материала, параметр  $Fo$  в задаче нагрева близок или больше единицы и по сечению частицы устанавливается распределение температуры с малым перепадом между поверхностью и центром. Следовательно, можно считать, что  $T(r, 0) = f(r) \cong T_m$ . Это приводит к тому, что в твердой фазе уравнению теплопроводности (24), начальному условию (26) и крайним условиям (29) и (28) удовлетворяет решение  $T(r, t) = T_m$  при  $r \leq r_m(t)$  при  $t \in (0, t_m]$ . Такое допущение физически означает, что все тепло, поступающее в частицу через внешнюю поверхность (27), расходуется на расплавление твердой фазы и повышение температуры расплава.

С учетом сделанного допущения двухслойная краевая задача (24)-(30) сводится к однослойной – плавлению и нагреву шарового слоя  $r \in [r_m(t), R]$  с обращением в ноль второго слагаемого в левой части условия Стефана (30). То есть краевая задача имеет вид:

$$\frac{\partial(rT)}{\partial t} = a_p \frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2}, \quad r \in [r_m(t), R],$$

$$r_m(0) = R, \quad t > 0, \quad (31)$$

$$\lambda_p \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_m} = \rho_p L \frac{dr_m}{dt}, \quad (32)$$

$$\lambda_p \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R = \alpha(T_\Gamma - T). \quad (33)$$

Однако, даже в такой постановке в литературе отсутствует точное аналитическое решение задачи Стефана для шарового слоя и для различных прикладных применений используется специальные допущения. Основное допущение, которое используются при решении аналогичных задач плавления или затвердевания, основано на том, что в увеличивающемся в размерах слое по мере его плавления устанавливается квазистационарное распределение температуры. Такое

допущение было предложено Л.С. Лейбеноном [7], широко используется в прикладных исследованиях и официально называется первым методом Лейбенона решения задач Стефана. В рамках такого подхода из краевой задачи (31)-(33) определяют квазистационарное распределение температуры и закон движения фазовой границы. Используя полученное выражение для закона движения фазовой границы  $r_m(t)$  определяют время расплавления из краевой задачи (31)-(33) либо из уравнения теплового баланса находят распределение температуры в слое расплава в рамках данного приближения.

Однако, наибольшей общностью при решении таких краевых задач обладает метод дифференциальных рядов Любова Б.Я. [9].

Введя безразмерные переменные  $\xi = r/R$  и  $\xi_m(t) = r_m(t)/R$ ,  $\theta'(\xi, t) = T(r, t)/T_m$  и  $\theta'_m(t) = T_r(t)/T_m$  представим краевую задачу (31)-(33) в виде:

$$\frac{\partial(\xi\theta')}{\partial t} = \tilde{a} \frac{\partial^2(\xi\theta')}{\partial \xi^2}, \quad \xi \in [\xi_m(t), R], \quad t > 0, \quad (34)$$

$$\theta'(\xi_m(t), t) = 1, \quad \left. \frac{\partial \theta'}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_m} = \gamma \frac{d\xi_m}{dt}, \quad (35)$$

$$\left. \frac{\partial \theta'}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = Bi_p (\theta'_r - \theta'), \quad \xi = 1, \quad (36)$$

где использованы обозначения

$$\tilde{a} = a_p / R^2, \quad a_p = \lambda_p / c_p \rho_p,$$

$$Bi_p = \alpha_p R / \lambda_p = \lambda_r / \lambda_p,$$

$$\gamma = R^2 \rho_p L / \lambda_p T_m = (R^2 / a_p) \cdot St,$$

$$St = L / c_p T_m - \text{критерий Стефана.}$$

В соответствии с методом дифференциальных рядов решение краевой задачи (34)-(36) ищем в виде ряда:

$$\theta'(\xi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\theta'_n(\xi, t) / \tilde{a}^n). \quad (37)$$

Быстрая сходимость такого ряда в данном случае обеспечивается тем, что параметр разложения  $\tilde{a} = a_p / R^2 \geq 90$ .

Используя стандартный подход [9], основанный на том, что ряд (37) подставляется в (34) и сравниваются члены с одинаковой степенью  $\tilde{a}$ , получаем систему следующих рекуррентных соотношений:

$$\frac{\partial^2(\xi\theta'_0)}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial(\xi\theta'_{n-1})}{\partial t} = \frac{\partial^2(\xi\theta'_n)}{\partial \xi^2}, \quad n \geq 1, \quad (38)$$

от которой потребуем, чтобы она удовлетворяла граничным условиям на подвижной границе (35) следующим образом:

$$\theta'_0(\xi_m, t) = 1, \quad \theta'_n(\xi_m, t) = 0, \quad n \geq 1, \quad (39)$$

$$\left. \frac{\partial \theta'_0}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_m} = \gamma \frac{d\xi_m}{dt}, \quad \left. \frac{\partial \theta'_n}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_m} = 0, \quad n \geq 1. \quad (40)$$

Тогда температура  $\theta'_0(\xi, t)$  в виде ряда (37) точно удовлетворяет уравнению теплопроводности (34) и граничным условиям (35).

Используя соотношение для  $\theta'_0(\xi, t)$  в (38), (39) и (40) интегрированием получаем:

$$\theta'_0(\xi, t) = 1 + \gamma \left( \frac{1}{\xi_m(t)} - \frac{1}{\xi} \right) \xi_m^2 \frac{d\xi_m}{dt}. \quad (41)$$

Этот первый член  $\theta'_0(\xi, t)$  ряда (40) по своей сути дает квазистационарное распределение температуры по сечению расплава и во всех известных приближенных методах решения задач Стефана [7] используется для определения закона перемещения фазовой границы  $\xi_m = \xi_m(t)$ . Однако, метод дифференциальных рядов в принципе последовательным интегрированием соотношений (38) с условиями (39) и (40) позволяет найти все члены ряда (37). Например, второй член ряда (37) имеет вид:

$$\theta'_1(\xi, t) = \frac{\gamma}{3!} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\xi_m}{\xi} (\xi - \xi_m)^3 \frac{d\xi_m}{dt} \right\}. \quad (42)$$

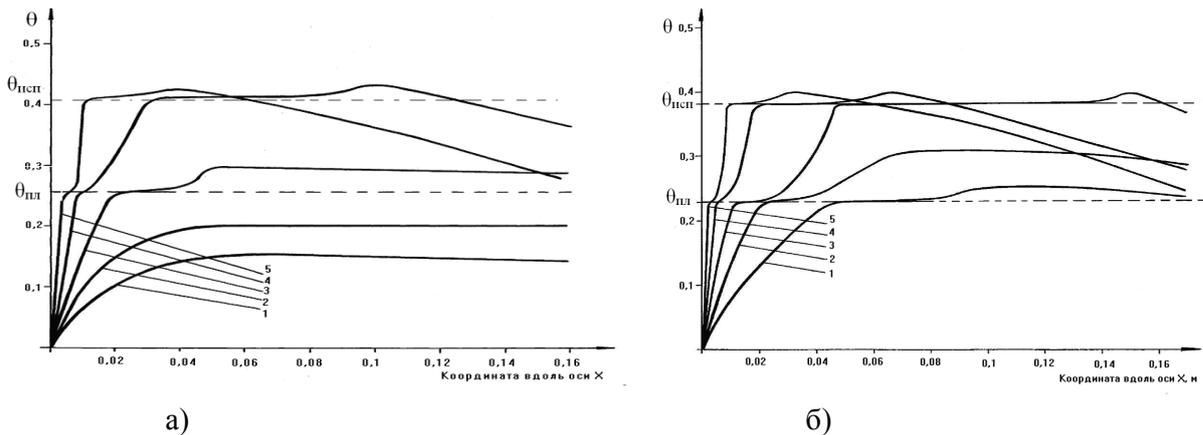
Однако, используя доказанное экспериментально утверждение [7], что квазистационарное распределение температуры в расплаве позволяет с достаточной для практических целей точностью определить закон движения фазовой границы. Для этого в (41) переходим от  $t$  к  $Fo$

$$\theta'_0(\xi, Fo) = 1 + St \left( \frac{1}{\xi_m} - \frac{1}{\xi} \right) \xi_m^2 \frac{d\xi_m}{dFo} \quad (43)$$

и подставляя (43) в граничное условие на внешней границе (36), получаем дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными для определения  $\xi_m = \xi_m(Fo)$  в виде:

$$\left[ \xi_m + Bi_p (1 - \xi_m) \right] \xi_m d\xi_m = \frac{Bi_p}{St} (\theta'_r - 1) dFo \quad (44)$$

В случае, когда траектория движения частицы находится в первой области плазменной



**Рис. 1.** Зависимость относительной избыточной температуры частиц различного диаметра от координаты вдоль оси  $x$  для различных режимов нанесения покрытия:  
 а – сила тока  $I=400A$ ,  $T_g=10710 K$ , б – сила тока  $I=500A$ ,  $T_g=11500 K$  для грануляции порошка  
 1 - 80 мкм; 2 – 60 мкм; 3 – 40 мкм; 4 – 20 мкм; 5 – 10 мкм

струи ( $\theta'_r = const$ ) уравнение (44) дает в неявном виде закон движения фазовой границы:

$$\xi_b^2 \{3Bi_p + 2(1 - Bi_p)\xi_m\} = 2 + Bi_p - (6Bi_p/St) \cdot (\theta'_r - 1)Fo \quad (45)$$

В случае, когда  $\theta'_r(Fo)$  зависит от времени, соотношению (44) можно придать вид удобный для перехода к конечноразностной схеме для численного интегрирования при движении частицы вдоль траектории:

$$d(\xi_m^2) = 2 \frac{Bi_p}{St} \frac{\theta'_r(Fo) - 1}{Bi_p + (1 - Bi_p)\xi_m(Fo)} dFo \quad (46)$$

Время полного проплавления частицы определяется из условия  $\xi_m(Fo_m) = 0$  и дается соотношениями:

$$Fo_m = St(2 + Bi_p) / [6Bi_p(\theta'_r - 1)], \quad (47)$$

а при ее полном расплавлении во второй области в виде неявного уравнения

$$\int_0^{Fo_m} (\theta'_m - 1) d\tau = \frac{St}{6Bi} (2 + Bi_p), \quad (48)$$

решаемого численным методом последовательных приближений.

Изменение температуры расплавляемой частицы на этапе плавления определяется из соотношения (43) после подстановки в него найденного закона  $\xi_m = \xi_m(Fo)$  из (45) или (46), а после его полного расплавления из решения уравнения (23), в котором теплофизические параметры стоят не для твердой фазы, а для расплава.

Полученные соотношения были использованы для определения температуры нагрева и сте-

пени проплавления напыляемых частиц различного диаметра, движущихся по различным траекториям. Результаты типичных расчетов приведены на рис. 1.

Из приведенных графиков видно, что термическое состояние частиц различного диаметра отличается существенно. Так, например, при напылении на первом режиме частицы диаметром 10 и 20 мкм прогреваются до температуры испарения, в то время, как 60 и 80-микронные частицы не достигают температуры плавления. Увеличение силы тока до 500 А обеспечивает расплавление всех частиц, включая 80-микронные.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барвинок В.А. Плазма в технологии, надежность, ресурс. М.: Наука и технологии, 2005. 456 с.
2. Кудинов В.В., Бобров Г.В. Нанесение покрытий напылением. Теория, технология и оборудование. Учебник для вузов. М.: Металлургия, 1992. 432 с.
3. Докукина И.А. Исследование структуры и свойств теплозащитных плазменных покрытий // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2011. №3. С. 91-97.
4. Докукина И.А. Теоретические исследования формирования мезоструктурно-упорядоченных кластерных структур в плазменных покрытиях // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2009. №4. С. 106-112.
5. Барвинок В.А., Богданович В.И., Докукина И.А., Савич Е.К. Физическое и математическое моделирование динамики движения дисперсных частиц в плазменной струе // Известия Самарского научного центра РАН. Спец. выпуск. 2008. Т. 3. С. 70-76.
6. Иванов Е.М. Инженерный расчет теплофизических процессов при плазменном напылении. Саратов: Изд. Сарат. ун-та, 1983. 138 с.
7. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. – 600с.
8. Барвинок В.А., Богданович В.И., Докукина И.А. Математическое моделирование и физика процессов

нанесения плазменных покрытий из композиционных плакированных порошков. М.: Международный центр НТИ, 1998. 96 с.

9. *Карташев Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 530 с.

## **MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESS OF HEATING THE SPRAY PARTICLES IN THE PLASMA FLOW**

© 2012 I.A.Dokukina

Samara State Aerospace University

The results of mathematical modeling of heat flow plasma particles as they move from the nozzle to the sprayed surface of the plasma torch. The relations obtained are used to determine the heating temperature and the degree of penetration of the spray particles of different diameters, moving along different trajectories. Research has shown that the thermal state of particles of different diameters differ significantly. In the design mode of small-diameter particles are heated to a temperature of vaporization, and 60, and 80-micron particles do not reach the melting point.

Key words: plasma coating, mathematical modeling, the heating of the particles, forming an ordered structure