

## МОДЕЛЬ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ДЕГРАДАЦИИ МАТЕРИАЛА В РАСЧЕТЕ ДОЛГОВЕЧНОСТИ СОСТАВНОГО ДИСКА

© 2012 В.И. Миронов, Л.Ф. Спевак, В.Б. Трухин

Институт машиноведения Уральского отделения РАН, г.Екатеринбург

Поступила в редакцию 21.11.2012

Рассматривается модель циклической деградации материала на завершающей стадии усталостного разрушения. Порядок использования модели многоциклового усталости в решении связанных краевых задач поясняется примером расчета долговечности составного диска при разных граничных условиях. Обсуждаются результаты параметрического анализа полученного решения.

Ключевые слова: циклическое разупрочнение, усталость, модель материала.

В статье обсуждается возможность применения метода полных диаграмм [1-3] для многоциклового нагружения, при котором реализуется стадия равновесного усталостного разрушения. Отправная идея подхода о взаимосвязи статических и циклических свойств материала прослеживается в постановке базового эксперимента, формулировке критериев усталостной прочности, выборе представительного параметра усталостного процесса и определении эквивалентности двух циклических состояний материала при разной истории нагружения, методологии решения краевых задач.

Испытания с построением полных диаграмм циклически тренированных однократных образцов позволили сформировать новый взгляд на взаимосвязь статических и циклических свойств материала. Они выявили неизбежную деградацию с ростом наработки параметров падающей ветви полной диаграммы [4].

На рис.1 приведена осредненная предельная поверхность, построенной по результатам испытаний малых образцов (длина и диаметр рабочей части по 2мм). Уровень максимального напряжения  $\sigma_M = 260 \text{ МПа}$  стационарного пульсирующего тренировочного цикла отвечает области многоциклового усталости, когда долговечность образцов  $N \geq 5 \times 10^4$  циклов. Такие параметры, как предел прочности  $S_B$ , располагаемая пластичность  $\epsilon_T$  и др. становятся функциями напряжения  $\sigma_M$  и числа циклов  $n$  тренировки. Усталостное разрушение образца происходит в данном случае при снижении предела прочности до уровня  $\sigma_M = \text{const}$ . К этому моменту (при  $n = N$ , где  $N$  - долговечность по

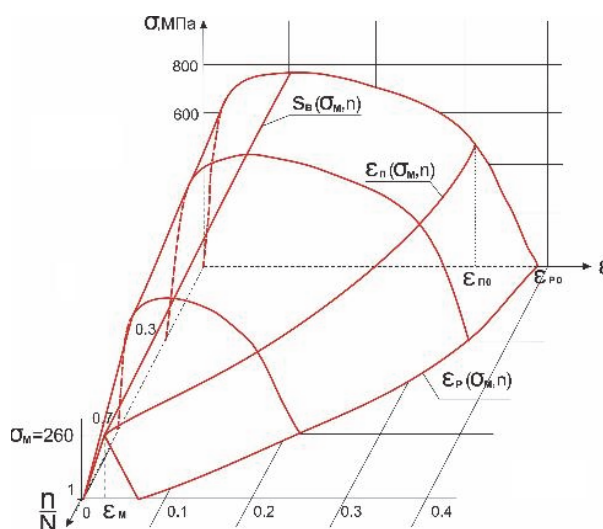


Рис. 1. Циклическая деградация стали 20ГЛ

(усталостной кривой) статическая диаграмма пластичной в исходном состоянии стали 20ГЛ вырождается в билинейную диаграмму, характерную для хрупкого материала. При поддержании заданной циклической деформации  $\epsilon_M = \text{const}$  и достаточно большой жесткости нагружающего устройства возможно дальнейшее циклирование при снижающемся уровне максимального напряжения цикла. Вплоть до равновесного разделения образца на две части при числе циклов  $N_p$ . Такая возможность рассматривалась в работе [3] при решении модельной задачи об усталостном разрушении составного диска при осесимметричном циклическом нагружении.

Рассматривался тонкий составной диск радиуса  $R_2$ , ограниченный окружностью  $\Gamma_2$  (рис. 2). Данный конструктивный элемент изготовлен следующим образом. Внутри кольца, ограниченного окружностями  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , вставлен диск радиуса  $R_1$  и по границе  $\Gamma_1$  осуществлено их жесткое сцепление. Диск работает в условиях пульсирующего нагружения, когда на поверхности  $\Gamma_2$  заданы равномерно распределенные силы  $q$ ,

Миронов Владимир Иванович, кандидат технических наук, доцент. E-mail: visim.vm@mail.ru

Спевак Лев Фридрихович, кандидат технических наук, доцент. E-mail: lfs@imach.uran.ru

Трухин Вадим Борисович, научный сотрудник. E-mail: tvb@imach.uran.ru

изменяющиеся циклически в интервале  $\overline{0, q_M}$ , либо перемещения  $\underline{u}$  точек границы  $\Gamma_2$  изменяются в интервале  $\overline{0, u_M}$ .

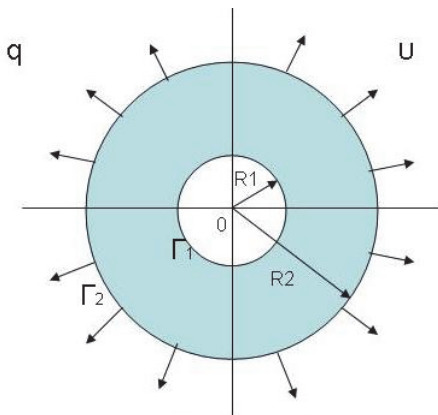


Рис. 2. Составной диск

Внутренний диск изготовлен из того же материала, что и кольцо, только прошедшего предварительную обработку, в результате которой произошло уменьшение пределов текучести и прочности, а также изменились пластические и циклические свойства. Свойства же на стадии упругости остались прежними.

Полагаем, что прочность материала кольца выше, чем у диска настолько, что он остается упругим до полного усталостного разрушения внутренней зоны. Модули упругости материалов диска и кольца одинаковы и не меняются в ходе циклирования до числа циклов  $N$ , определяемого усталостной кривой. Для упрощения расчета долговечности центральной зоны диска считаем, что напряжения в кольце не превышают предела выносливости и вырождения статических свойств материала при циклировании не происходит. Таким образом, диск радиуса  $R_2$  представляет собой сплошное кусочно-неоднородное тело.

Исходные статические свойства материала внутреннего диска ( $0 \leq r < R_1$ ) определяются полной диаграммой деформирования с падающим участком, полученной при одноосном растяжении и выраженной в интенсивностях напряжений и деформаций. Отметим также, что при  $n < N$  на каждом полуцикле нагружения связь между напряжениями и деформациями отвечает закону Гука, т.е. для плоско-напряженного состояния, в котором находятся кольцо и внутренняя зона составного диска в условиях осесимметричного нагружения, имеем

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_r + \nu\epsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_\theta + \nu\epsilon_r). \quad (1)$$

Предельная поверхность разрушения материала ослабленной зоны в ходе циклического нагружения определяется формулой

$$f(\sigma) = \sigma_i \leq S_B(\sigma_M, n). \quad (2)$$

В силовом подходе в качестве контролирующего параметра усталостного процесса выбирается циклический предел прочности  $S_B(\sigma_M, n)$ . В области многоциклового усталости семейство подобных экспериментальных кривых для разных уровней напряжения  $\sigma_M$  аппроксимируется подходящей функцией, например, степенной

$$S_B(\sigma_M; n) = S_{BO} - k_\sigma n^m, \quad (3)$$

а усталостное разрушение при  $\sigma_M = \text{const}$  определяется равенством

$$S_B(\sigma_N, N) = \sigma_M,$$

где  $N$  – число циклов по усталостной кривой.

Определив эквивалентность двух циклических состояний материала при разной истории нагружения равенством

$$S_B(\sigma_{M1}, n_1) = S_B(\sigma_{M2}, n_2), \quad (4)$$

смену напряжений можно интерпретировать как переход с одной кинетической кривой на другую и смену интенсивности накопления повреждений [3]. В этом случае нет необходимости вводить явно в расчет понятие поврежденности, а критерий усталостного разрушения обобщается на ступенчатое нагружение

$$\sigma_{MK} \geq S_B \left[ \sigma_M(n), \sum_i^k n_i \right].$$

Если реализуется жесткое нагружение ( $\epsilon_M = \text{const}$ ), то в каждом (из следующих за  $N$ ) цикле нагружении продолжается вырождение статической диаграммы деформирования, а именно, падает значение предела прочности. Считаем, что падение предела прочности за  $\Delta n_1$  циклов происходит согласно формуле (3) и он снижается до точки  $A$  (рис. 3).

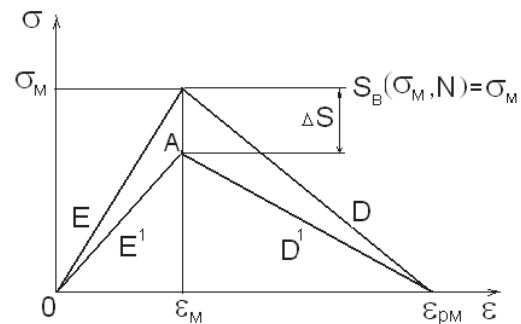


Рис. 3. Циклическая деградация ПДД при  $n > N$

В отличие от работы [3] полагаем, что когда в полуцикле разгрузки напряжения упадут до нуля, остаточных деформаций не образуется (рис. 3). Такое поведение хрупкого материала характерно для многоциклового усталости, когда усталостная трещина развивается без видимых остаточных деформаций. Полагаем, что отношение модуля упругости к модулю спада остается неизменным, тогда при циклическом снижении прочности на  $\Delta S_B$  модуль упругости уменьшится на величину  $\Delta E = \Delta S_B / \epsilon_M$ .

Материал при стационарном нагружении  $\epsilon_M = \text{const}$  остается упругим, но с новыми модулями и с новым коэффициентом поперечной деформации

$$E^1 = E - \Delta E = E - \Delta S_B / \epsilon_M ;$$

$$D^1 = \frac{D}{E} E^1 ; \nu^1 = \nu \frac{E^1}{E} \quad (5)$$

в уравнениях связи напряжений и деформаций (1). Последнее выражение в (5) записано на основании результатов моделирования и испытаний чугуна [5].

В задаче с диском при стационарных граничных условиях и  $n < N$  напряженное состояние стационарно, т.е. справедлива формула (2). Но перераспределение напряжений, связанное со снижением модуля материала центральной зоны при  $n > N$ , делает ее нагружение нестационарным даже при неизменных граничных условиях. Меняется и правило перехода с одной кинетической кривой на другую, определяемое ранее равенством (4). В отсутствие экспериментальных данных, используем следующую схему расчета вырождения диаграммы деформирования при ступенчатом изменении максимальной деформации цикла.

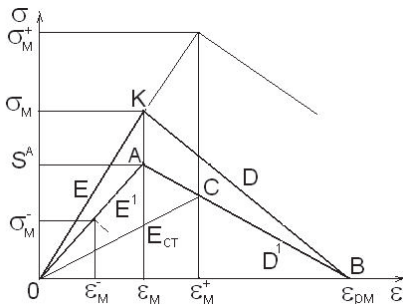


Рис. 4. Схема перехода на новую деформацию цикла при  $n > N$

Пусть в состоянии материала, полученном при циклировании на уровне максимальной деформации цикла  $\epsilon_M$  и определяемом диаграммой OAB (рис. 4), ступенчато увеличивается максимальная деформация цикла от  $\epsilon_M$  до  $\epsilon_M^+$ . Новое состояние ОСВ сопровождается падением сопротивления на величину  $\Delta S$  и модуля упругости до величины  $E_{CT}$

$$\Delta S_{CT} = D^1(\epsilon_M^+ - \epsilon_M) ; E_{CT} = D^1(\epsilon_{PM} - \epsilon_M^+) / \epsilon_M^+ \quad (6)$$

Обозначение  $\Delta S_{CT}$  и  $E_{CT}$  подчеркивает, что падение прочности и новый модуль связаны со статическим переходом на большую деформацию, а не с циклической нагрузкой. При уменьшении максимальной деформации цикла до  $\epsilon_M^-$  свойства материала не меняются и описываются диаграммой OAB. В случае многоосного напряженного состояния под напряжениями и деформациями принимаются интенсивности этих величин.

Имея приведенные соотношения и усталостную кривую в форме  $N\sigma_i^\alpha = C$ , перейдем к определению остаточной долговечности ослабленной зоны составного диска, которая находится в условиях однородного напряженно-деформированного состояния и пропорционального нагружения. Сформулируем краевую задачу расчета ресурса составного диска.

При известной геометрии диска, нагруженного на границе  $\Gamma_2$  (рис. 2) заданными перемещениями или равномерно распределенными силами, изменяющимися в стационарном режиме, требуется определить долговечность ослабленной зоны  $N_p$  и напряженно-деформированное состояние диска после произвольного числа циклов на заключительной стадии циклирования  $N \leq n < N_p$ .

Для решения задачи имеем систему уравнений:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \text{ - уравнение равновесия;}$$

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}; \text{ - соотношение Коши;}$$

- физические уравнения (1);

- модель усталостного повреждения материала (3-6), (7);

- кривая Велера при мягком нагружении  $N\sigma_i^\alpha = C$ ;

- Г.У.  $u = u_M(1 - |\cos kt|)$  или  $q = q_M(1 - |\cos kt|)$ .

Искомые величины  $\sigma_r, \sigma_\theta, \epsilon_r$  и  $\epsilon_\theta$  зависят от числа циклов нагружения  $n$  и значения  $u$  или  $q$  на границе. При  $n = 0$  решение задачи (7) известно

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{uE}{(1-\nu)R_2}, \epsilon_r = \epsilon_\theta = \frac{u}{R_2}, \epsilon_z = -\frac{2\nu}{1-\nu}\epsilon \quad (8)$$

и совпадает с упругим решением. Напряженно-деформированное состояние диска однородно, что дает

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_i, \quad \epsilon_r = \epsilon_\theta = (1 - \nu)\epsilon_i \quad (9)$$

В результате ослабления центральной зоны, т.е. изменения параметров упругости внутреннего диска, напряженно-деформированное состояние в нем станет отличаться от состояния внешнего диска. В этом случае перемещение в составном диске ищется в виде

$$u_r = \begin{cases} Ar, & 0 \leq r \leq R_1 \\ Br + \frac{C}{r}, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases}$$

Соответственно, неоднородное напряженно-деформированное состояние диска имеет вид:

$$\epsilon_r = \begin{cases} A, & 0 \leq r \leq R_1 \\ B - \frac{C}{r^2}, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \begin{cases} A, & 0 \leq r \leq R_1 \\ B + \frac{C}{r^2}, & R_1 \leq r \leq R_2, \end{cases}$$

$$\sigma_r = \begin{cases} \frac{E_1 A (1 + \nu_1)}{1 - \nu_1^2}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \left( B - \frac{C}{r^2} + \nu_2 \left( B + \frac{C}{r^2} \right) \right), & R_1 \leq r \leq R_2, \end{cases}$$

$$\sigma_{\theta} = \begin{cases} \frac{E_1 A (1 + \nu_1)}{1 - \nu_1^2}, & 0 \leq r \leq R_1 \\ \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \left( B + \frac{C}{r^2} + \nu_2 \left( B - \frac{C}{r^2} \right) \right), & R_1 \leq r \leq R_2, \end{cases} \quad (10)$$

где  $E_1, \nu_1$  и  $E_2, \nu_2$  – параметры упругости внутренней и внешней зоны. Параметры  $A, B, C$  определяются из граничных условий на внешней границе и из условия непрерывности на границе зон перемещения и напряжения в радиальном направлении.

Очевидно, что в интервале стационарного циклирования ( $0 < n \leq N$ ) условие (2) выполняется, а решение (9) неизменно. Равенство в условии (2) связывается с началом стадии разрушения материала ослабленной зоны. Согласно принципа устойчивости тела в целом [6], эта стадия может протекать равномерно, если возможны равновесные состояния кусочно-однородного диска при  $n > N$ .

Получить точное аналитическое решение задачи (7), отвечающее положению равновесия диска, невозможно. Это связано с тем, что снижение модуля упругости при  $n = N + \Delta n$  циклов и снижение сопротивления материала центральной зоны приведут к нарушению условия (2) и к статическому перераспределению напряжений и деформаций в диске, аналогично описанному выше (схема на рис. 4). Что, в свою очередь, приведет к снижению модуля упругости и вызовет новое перераспределение напряжений: задача становится связной. Для ее решения применим пошаговую процедуру догружения с проверкой устойчивости напряженного состояния диска на каждом шаге  $\Delta n$  циклического догружения. Проверка выполняется методом последовательных приближений.

На первом шаге по формулам (5) находятся константы материала центральной зоны после  $n = N + \Delta n$  циклов, одинаковые во всех точках ввиду однородности напряженного состояния. Решается задача (7) для составного упругого диска при новых константах в физических уравнениях (1) для центральной зоны. Находится решение (10) и интенсивность напряжений в центральной зоне. Проверяется условие (2), находятся интенсивности напряжений и деформаций, необходимые для корректировки упругих констант материала центральной зоны по формулам (6). Снова решается задача (7), проводится корректировка констант для однородно деформированной центральной зоны и т.д.

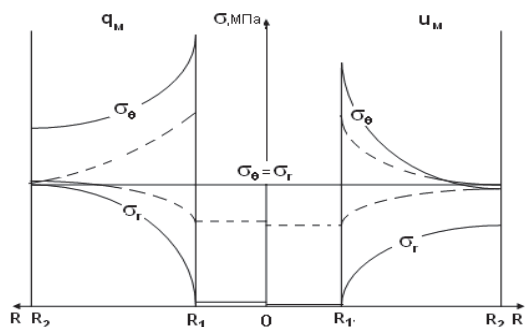
Если итерационный процесс сходится в области положительных напряжений с любой наперед заданной точностью, то диск после  $\Delta n$  циклов и статического перераспределения напряжений имеет новое положение равновесия и новые упругие свойства материала центральной зоны. Возможно циклирование с новой амплитудой деформаций в течение следующих  $\Delta n$  циклов. Такой прием с остановкой циклирования вполне оправдан ввиду несоизмеримо разных физических процессов накопления усталостных повреждений и перераспределения напряжений в упругом теле. Обычно полагается, что последний процесс проходит практически мгновенно. Наружное кольцо и центральный диск остаются упругими, но поскольку сходимость итерационного процесса зависит от свойств материала и от геометрии конструкции, то остаточная долговечность также зависит от этих факторов. Для наглядности параметрического анализа рассмотрим числовой пример расчета долговечности  $N_p$  диска с учетом состояний разупрочнения, в котором полагалось:

- Радиус наружного кольца  $R_2 = 0,1$  м.
- Радиус центрального диска  $R_1 = 0,03$  м.
- Модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .
- Показатель усталостной кривой  $\alpha = 6$ .
- Показатель кинетической кривой  $m = 2$ .
- Максимальная нагрузка цикла  $q_M = 85,714285$  МПа.
- Максимальное перемещение  $u_M = 0,00003$  м.
- Соотношение модулей упругости и хрупкости  $E / D = 2$ .

На рис. 5 приведены результаты расчета тангенциальных и радиальных напряжений в составном диске при максимальном значении цикла нагрузки  $q_M$  (левая часть) и максимальном перемещении  $u_M$  (правая часть), подобранных из условия равенства напряжений в исходном состоянии. В первом случае протяженность этапа разупрочнения  $N_p = 440$  циклов, а во втором  $N_p = 5750$  циклов. В обоих случаях нагружения уменьшение начального модуля хрупкости, равнозначное повышению трещиностойкости материала, приводит к увеличению долговечности. Так увеличение отношения  $E / D$  до 5 увеличивает стадию разупрочнения до 1450 циклов в первом и до 6270 циклов во втором случае, соответственно. Число итераций при установлении положения равновесия сокращается в 3 и в 1,2 раза.

Равенство  $\sigma_{\theta} = \sigma_r$  имеет место во всем диске до числа циклов  $n=N$ , а затем, при сохранении однородности напряженного состояния, напряжения в центральной ослабленной зоне падают до нуля (при числе циклов  $n = N + N_p$ ). Задача о составном диске переходит в задачу Ламе, так как по условию задачи наружное кольцо остается упругим. Штрихами на рис. 5 показано промежуточное состояние диска при  $n = N + 0,5N_p$ .

Влияние геометрии конструкции, задаваемое отношением радиусов  $R_1 / R_2$  (при фиксированном

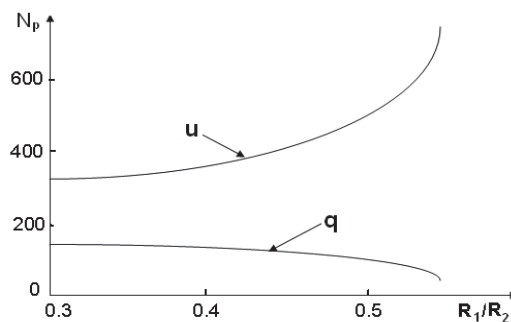


**Рис. 5.** Распределение тангенциальных и радиальных напряжений в составном диске на стадии циклического разупрочнения

значении  $R_2$ ) и определяющей жесткость системы нагружения центральной зоны, поясняет рис. 6.

Продолжительность стадии разупрочнения  $N_p$  невелика и при заданном на границе перемещении выше, чем при заданном напряжении. В первом случае уменьшение толщины упругого кольца, то есть увеличение отношения  $R_1/R_2$ , приводит к увеличению  $N_p$ , а во втором к снижению числа циклов до разрушения. Такая закономерность наблюдается до значения  $R_1/R_2 = 0,55$ . Далее отмеченный выше итерационный процесс не сходится, так как жесткость системы, передающей нагрузку в центральную зону и представленной в данной задаче упругим кольцом, становится недостаточной для реализации реологически неустойчивых состояний материала.

Таким образом, устойчивость процесса циклического разупрочнения материала в элементе конструкции зависит как от свойств материала, так и от условий нагружения. В модельной задаче о долговечности составного диска показано, что продолжительность стадии разупрочнения  $N_p$  зависит с одной стороны от трещиностойкости и скорости циклического разупрочнения материала, а с другой от вида граничных условий и жесткости системы нагружения зоны разрушения, то есть от геометрии конструкции. Разрушение центральной зоны может выглядеть как хрупкое, если упругое кольцо тонкое, или как вязкое, при достаточно толстом кольце. Отметим, что в статически неопределимой системе неустойчи-



**Рис. 6.** Влияние типа граничных условий и соотношения размеров упругого кольца и центральной зоны на продолжительность стадии разупрочнения

вые циклические состояния в разрушающемся элементе реализуются как при заданных на границе перемещениях (кинематическое нагружение), так и при заданных силах. Принятое в расчетной схеме (рис. 3) условие кинематического нагружения не существенно сужает область реализации циклического разупрочнения, так как большинство задач теории упругости и строительной механики статически неопределимы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков С.Д. Функция сопротивления материалов и постановка краевых задач механики разрушения. Свердловск: УНЦ АН СССР. Институт металлургии. 1986. 65 с.
2. Волков С.Д., Миронов В.И. Устойчивость процесса усталостного разрушения конструкционных материалов. Свердловск: УПИ, 1981. Деп. ВИНТИ, № 5459-81. 71 с.
3. Миронов В.И., Стружанов В.В., Тарташник К.А. Краевая задача усталости кусочно-неоднородного плоского тела // Динамика прочность и износостойкость машин. 1998. №5. С.73-80.
4. Миронов В.И. Циклическая деградация материала в элементах конструкций горных машин // Известия УГТУ. 2008. Вып. 23. С.67-75.
5. Миронов В.И. Свойства материала в реологически неустойчивых состояниях // Заводская лаборатория. 2002. Т.68. №10. С.41-47.
6. Никитин Л.В., Рьжак Е.И. Об осуществимости состояний материала, соответствующих "падающему" участку диаграммы // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. №2. С.155-161.

### A MODEL OF THE CYCLIC DEGRADATION OF THE MATERIAL IN THE CALCULATION OF THE SERVICE LIFE OF A COMPOUND DISC

© 2012 V.I. Mironov, L.F. Spevak, V.B. Trukhin

Institute of Engineering Science, Russian Academy of Science (Ural Branch), Ekaterinburg

A model of the cyclic degradation of the material in the final stage of fatigue fracture is considered. The procedure of applying the model of high-cycle fatigue in solving coupled boundary value problems is exemplified by the calculation of the service life of a compound disc under various boundary conditions. The results of the parametric analysis of the solution are discussed.

Key words: cyclic weakening, fatigue, model of material.

Vladimir Mironov, Candidate of Technics, Associate Professor.

E-mail: visim.vm@mail.ru

Lev Spevak, Candidate of Technics, Associate Professor.

E-mail: lfs@imach.uran.ru

Vadim Trukhin, Research Fellow. E-mail: tvb@imach.uran.ru