ФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОЙ СВЕТОВОЙ ТРУБКИ ПРИ ОСТРОЙ ФОКУСИРОВКЕ АЗИМУТАЛЬНО-ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

© 2012 С.Н. Хонина, А.В. Устинов

Институт систем обработки изображений РАН, г.Самара

Поступила в редакцию 19.11.2012

В работе проводится теоретический и численный анализ функции пропускания фокусирующей системы с высокой числовой апертурой с целью формирования в фокальной области тонкой световой трубки при азимутальной поляризации излучения. Аналитически показано, что за счет деструктивной интерференции двух пучков, формируемых двумя узкими кольцами, можно преодолеть не только полноапертурный дифракционный предел, но и предел, связанный с кольцевой апертурой. При этом, однако, интенсивность в центре фокальной плоскости существенно уменьшается, что практически приводит к разрыву трубки. Численно показано, что цельные длинные тонкие трубки можно формировать с помощью аподизации апертуры фазовой функцией дифракционного аксикона, а также комплексной функцией пропускания мод Лагерра-Гаусса и пучков Эйри-Гаусса.

Ключевые слова: острая фокусировка, азимутальная поляризация, световые трубки, дифракционный аксикон, моды Лагерра-Гаусса, радиальные пучки Эйри-Гаусса.

введение

При острой фокусировке цилиндрических пучков с радиальной или азимутальной поляризацией введение узкой кольцевой диафрагмы, блокирующей излучение практически во всей центральной части линзы [1-3], является простым, хотя и энергетически затратным способом формирования узких протяженных пучков в фокальной области. В случае радиальной поляризации формируется тонкая световая нить, а при азимутальной поляризации - световая трубка. Причем поперечный размер соответствует скалярному дифракционному пределу. При других типах поляризации фокальное пятно (или кольцо) оказывается большего размера из-за вклада в фокальную область различных компонент электромагнитного поля.

Чтобы увеличить эффективность или преодолеть дифракционный предел используют более сложные способы полноапертурной аподизации функции зрачка как с помощью чисто фазовых, так и амплитудно-фазовых распределений [4-9]. При этом, как правило, уменьшение размеров фокального пятна сопровождается перераспределением энергии из центральной части в боковые лепестки. Данная ситуация вполне согласуется с теорией Toraldo di Francia [10], в соответствии с которой можно получить сколь угодно узкое центральное пятно за счет роста боковых лепестков, иногда в несколько раз [8,9] или

Хонина Светлана Николаевна, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. E-mail: khonina@smr.ru Устинов Андрей Владимирович, ведущий программист. даже порядков [11] по сравнению с центральным световым пятном.

Наличие существенных боковых лепестков ограничивает применение "суперразрешающих" элементов в изображающих системах и при оптической записи данных, когда приемлемым считается уровень интенсивности в боковых лепестках менее 30% по отношению к центральному пику [12].

Однако оптимизационные процедуры, позволяющие контролировать рост боковых лепестков, приводят к неизбежному уширению размера центрального пятна [12,13].

В работе [14] для радиальной поляризации было показано, что внесение радиального фазового скачка на π радиан по среднему радиусу узкой кольцевой апертуры приводит к уменьшению размера центрального пика до FWHM=0.33 λ , что меньше, чем для простой кольцевой диафрагмы (FWHM=0.36 λ). В этом случае уровень интенсивности боковых лепестков составляет менее 30% от главного пика, и они могут быть отфильтрованы [15] или нивелированы при нелинейного взаимодействии света с носителями записи [16].

Уменьшение размера фокального пятна без существенного роста боковых лепестков достигается при введении радиального фазового скачка за счет деструктивной интерференции двух пучков, формируемых каждым из колец в апертуре [14, 17].

В данной работе проводится теоретический и численный анализ функции пропускания фокусирующей системы с высокой числовой апертурой с целью формирования в фокальной области тонкой световой трубки при азимутальной поляризации излучения. Такое распределение

устинов Анореи Влаоимирович, ведущии программист. E-mail: andr@smr.ru

используется при оптическом захвате и манипулировании плотных микрочастиц, при теневой микроскопии, а также в микроскопии, основанной на стимулируемом истощении эмиссии (stimulated emission depletion - STED).

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

При острой фокусировке поля с азимутальной поляризацией векторное электрическое поле вблизи фокуса описывается следующим выражением:

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} E_r(\rho, \varphi, z) \\ E_{\varphi}(\rho, \varphi, z) \\ E_z(\rho, \varphi, z) \end{pmatrix} =$$

$$= kf \int_{0}^{\Theta} D(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ J_1(k\rho\sin\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \sqrt{\cos\theta}\sin\theta\exp(ikz\cos\theta) d\theta,$$
(1)

где f – фокусное расстояние, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, $\sin \Theta = NA/n$, NA – числовая апертура линзы, n – показатель преломления среды, $J_1(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода первого порядка, $D(\theta)$ – любая одномерная функция.

Из выражения (1) следует, что в фокальной плоскости формируется световое кольцо в скалярном режиме – все компоненты, кроме азимутальной, равны нулю. Данный факт позволяет легко реализовывать различные оптимизационные процедуры с целью корректировки распределения в фокальной плоскости, в частности для уменьшения размеров светового кольца.

Введение узкой кольцевой апертуры, пропускающей свет только в периферийной части линзы, позволяет уменьшить кольцо до скалярного предела, соответствующего функции Бесселя первого порядка:

$$I_{\delta}(\rho, \varphi, 0) =$$

$$= \int_{\Theta-\delta}^{\Theta} \sin \Theta \sqrt{\cos \Theta} J_{1}(k\rho \sin \Theta) d\Theta \approx$$

$$\approx \int_{1-\Delta}^{1} x (1-x^{2})^{-1/4} J_{1}(k\rho x) dx \approx$$

$$\approx \frac{2}{3} \Delta^{3/4} (2-\Delta)^{3/4} J_{1}\left(k\rho\left(1-\frac{\Delta}{2}\right)\right).$$
(2)

Одновременно происходит удлинение фокального распределения вдоль оптической оси. Таким образом, получается тонкая световая трубка. Радиус такой трубки определяется по максимальному значению функции Бесселя:

$$\rho_0 = \frac{1,84\lambda}{2\pi} \left(1 - \frac{\Delta}{2} \right)^{-1} \longrightarrow_{\Delta \to 0} 0,293\lambda \quad (3)$$

и примерно равен диаметру по полуспаду интенсивности (FWHM).

Заметим, что предельно узкий поперечный размер световой трубки достигается при стремлении ширины кольцевой апертуры к нулю. В этом случае интенсивность (2) также стремится к нулю. Данный факт является основным недостатком такого подхода.

Также известны полноапертурные распределения, позволяющие более эффективно формировать тонкие световые трубки в условиях азимутальной поляризации – полиномы Цернике [9], аксиконоподобные структуры [8, 18], моды Лагерра-Гаусса (ЛГ) [19, 20], а также фазовые бинарные элементы [21, 22].

Для уменьшения диаметра световой трубки можно выполнить оптимизацию [13] функции $D(\theta)$, однако в этом случае не гарантируется достаточная протяженность трубки. Чтобы соблюсти оба условия проще всего совместить процедуру оптимизации с блокировкой центральной части линзы.

Также нужно иметь в виду сложность изготовления оптических элементов, предназначенных для аподизации зрачка фокусирующей системы. Наиболее удобной для производства является бинарная структура, т.е. когда функция $D(\theta)$ имеет кольцевую структуру с двумя постоянными значениями $c_p = \pm 1$, $\theta_{p-1} \le \theta \le \theta_p$.

Рассмотрим уменьшение радиуса фокального кольца за счет использования функции следующего вида:

$$D(\theta) = \begin{cases} 0, \ 0 \le \theta < \Theta - 2\delta, \\ 1, \ \Theta - 2\delta \le \theta < \Theta - \delta, \\ -1, \ \Theta - \delta \le \theta \le \Theta. \end{cases}$$
(4)

Функция (4) позволяет получить в фокусе интерференцию пучков, формируемых отдельными кольцами (2):

$$I_{\tau}(\rho,\varphi,0) = \int_{\Theta-\delta}^{\Theta} \sin\Theta\sqrt{\cos\Theta}J_{1}(k\rho\sin\Theta)d\Theta - \int_{\Theta-2\delta}^{\Theta-\delta} \sin\Theta\sqrt{\cos\Theta}J_{1}(k\rho\sin\Theta)d\Theta \approx$$

$$\approx \int_{I-\Delta}^{1} x(1-x^{2})^{-1/4}J_{1}(k\rho\alpha)dx - \int_{I-2\Delta}^{I-\Delta} x(1-x^{2})^{-1/4}J_{1}(k\rho\alpha)dx =$$
(5)
$$= \frac{2}{3}\Delta^{3/4} \left[(2-\Delta)^{3/4}J_{1}\left(k\rho\left(1-\frac{\Delta}{2}\right)\right) - \left[(4-4\Delta)^{3/4} - (2-\Delta)^{3/4} \right]J_{1}\left(k\rho\left(1-\frac{3\Delta}{2}\right)\right) \right]$$

Используя аппроксимацию функции Бесселя [23]:

$$J_1(x) \approx \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16},$$
 (6)

получим из (5) следующее приближенное выражение:

$$I_{\tau}(\rho,\varphi,0) \approx \frac{2}{3} (2\Delta)^{34} \left[\frac{k\rho}{2} (0.318 + 1.034\Delta - 1.14\Delta^2) - \frac{(k\rho)^3}{16} (0.318 + 2.08\Delta - 7.167\Delta^2) \right].$$
(7)

Откуда можно аналитически найти D, обес-

печивающий минимальный размер светового кольца в фокальной плоскости. Максимум выражения (7) достигается, когда:

$$\left(k\rho_{\tau}\right)^{2} = \frac{8}{3} \frac{\left(0,318+1,034\Delta-1,14\Delta^{2}\right)}{\left(0,318+2,08\Delta-7,167\Delta^{2}\right)}.$$
 (8)

Из (8) следует, что минимальное значение радиуса фокального кольца обеспечивается при $\Delta_{\min} \approx 0,0788$. В этом случае:

$$\rho_{\tau,\min} \approx 0,246\lambda. \tag{9}$$

Из-за аппроксимации функции Бесселя (6) оценка (9) занижена примерно на 6%, т.е. $\rho_{\tau,min} \approx 0,26\lambda$, но даже в этом случае преодолевается скалярный предел, соответствующий (3).

2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В данном разделе приведены результаты численного моделирования для выражения (1) для различных функций пропускания $D(\theta)$. Фокусное расстояние было выбрано равным $f = 101\lambda$, числовая апертура линзы NA = 0,99. Фокусировка рассматривалась в воздухе n = 1, таким образом, максимальный азимутальный угол в (1) $\Theta \approx 82^{\circ}$, что обеспечивает достаточную точность выражений (2) и (5).

В табл. 1 приведены результаты моделирования для узкой кольцевой апертуры шириной $\Delta = 0.05$ (первая строка). В этом случае оценка

(3) дает радиус светового кольца $\rho_{_0}=0, 3\lambda$, что очень близко к полученному численно результату $\rho_{_0}=0, 304\lambda$.

Для увеличения эффективности можно использовать моды лазерного излучения. Во второй строке Табл. 1 приведен результат для моды ЛГ (1,1). Однако в этом случае радиус световой трубки увеличивается $\rho_0 = 0,34\lambda$. Структура освещающего поля практически повторяется в фокальной плоскости, будет иметь соответствующее число колец. С увеличением радиального номера моды эффективность в центральной трубке будет падать, а диаметр будет уменьшаться.

Существенно уменьшить диаметр трубки можно за счет итерационного расчета [13]. В третьей строке Табл. 1 показаны результаты такого расчета с контролируемым ростом боковых лепестков. В этом случае преодолевается дифракционный предел ($\rho_0 = 0,284\lambda$), однако световая трубка в центральной части имеет меньшую интенсивность.

Полином Цернике второго порядка позволяет сформировать аналогичную световую трубку [9], радиус которой $\rho_0 = 0,28\lambda$, при этом уменьшение диаметра достигается за счет роста боковых лепестков.

Использование подхода (4) позволяет еще сильнее уменьшить диаметр трубки в фокальной плоскости ($\rho_0 = 0,268\lambda$), но за счет дальнейшего снижения интенсивности. В этом случае кар-

Таблица 1. Формирование тонких световых трубок



тина в фокальной области выглядит практически как трубка с разрывом.

Чтобы получить очень длинные световые трубки можно использовать в качестве пропускающей функции фазу дифракционного аксикона $\exp(i\alpha r)$ [24]. Такая система работает как высокоапертурный линзакон [25]. В таблице 2 в первой строке показано формирование узкого конуса, который начинается немного дальше фокальной плоскости и продолжается на расстояние более 60 длин волн. Радиус такого конуса достаточно мал: вначале (на расстоянии z=51) $\rho_0 (z = 5\lambda) = 0, 3\lambda$ и в конце (на расстоянии z=601) $\rho_0 (z = 60\lambda) = 0, 63\lambda$.

Если использовать суперпозицию двух аксиконов – рассеивающего и собирающего: $\exp(i\alpha r) + \exp(-i\alpha r) = 2\cos(\alpha r)$, то можно формировать два симметричных конуса одновременно (см. вторую строку Табл. 2). Однако при этом имеет место разомкнутость правого и левого световых пучков.

Как было сказано ранее, для формирования цельных тонких световых трубок можно использовать моды ЛГ высокого порядка. В третьей строке табл. 2 показан результат для моды ЛГ (18,1). В этом случае формируется сплошная длинная световая трубка, радиус которой в центре равен $\rho_0(z=0) = 0,34\lambda$, а на расстоянии 60 длин волн примерно в 4 раза больше - $\rho_0(z=60\lambda)=1,33\lambda$. Таким образом, расходимость такой трубки больше, чем для аксикона, и соответствует гауссовым пучкам. В связи с большой расходимостью интенсивность трубки быстро падает при удалении от фокальной плоскости. Продольную интенсивность трубки можно сделать более равномерной, если уменьшить гауссов параметр s. При этом освещающее излучение сосредоточивается в центральной части линзы, числовая апертура уменьшается и расходимость гауссова пучка уменьшается за счет увеличения фокального радиуса.

Иной результат получается, если в качестве функции пропускания использовать радиальную функцию Эйри-Гаусса (ЭйГ). Такое распределение было рассмотрено в работе [26] как близкое к гауссовым модам, причем было показано, что в фокальной плоскости формируется более компактный пучок. Действительно, световая трубка получается немного уже - $\rho_0 (z = 0) = 0,336\lambda$, $\rho_0 (z = 60\lambda) = 1,2\lambda$ – пос-

Таблица 2. Формирование длинных световых трубок



ледняя строка в табл. 2). Причем равномерность продольной интенсивности можно варьировать с помощью гауссова параметра s без увеличения радиуса трубки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено формирование тонкой световой трубки в условиях острой фокусировки азимутально-поляризованного излучения.

Теоретический показал, что для полярных компонент задача сводится к скалярной и может быть решена при разбиении апертуры на узкие кольца. Для отдельного кольца получено аналитическое выражение и показано, что за счет суперпозиции пучков, приходящих в фокальную область от разных колец можно преодолеть не только полноапертурный дифракционный предел, но и предел, соответствующий функции Бесселя первого порядка. При этом, однако, интенсивность в центре фокальной плоскости существенно уменьшается, что практически приводит к разрыву трубки.

Численно рассмотрены различные типы аподизации апертуры фокусирующей системы, позволяющие формировать длинные тонкие световые трубки. Показано, что при использовании фазовой функции дифракционного аксикона формируется слаборасходящийся световой конус длиной более 60λ , радиус которого увеличивается от $0,3 \lambda$ до $0,63 \lambda$. Световой конус смещен из фокальной плоскости вправо или влево в зависимости от типа аксикона (рассеивающий или собирающий).

Для формирования цельной световой трубки, симметричной относительно фокальной плоскости, можно использовать моды Лагерра-Гаусса высокого порядка. С ростом радиального порядка моды уменьшается радиус световой трубки и падает доля энергии. Расходимость такой трубки соответствует гауссовым пучкам и больше, чем для аксикона: радиус от минимального центре 0,34 λ на расстоянии 60 длин волн увеличился примерно в 4 раза до 1,33 λ . Из-за существенной расходимости интенсивность трубки быстро падает при удалении от фокальной плоскости. Продольную интенсивность трубки можно сделать более равномерной, если масштабно уменьшить освещающее линзу излучение, однако при этом увеличится толщина формируемой трубки.

Решить эту проблему предлагается за счет использования радиальных функций Эйри-Гаусса. Расходимость пучка будет примерно такой же, но равномерность продольной интенсивности можно варьировать с помощью гауссова параметра без увеличения толщины трубки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Quabis S.* Focusing light to a tighter spot // Opt. Commun. 2000. V. 179. P. 1-7.
- 2. *Dorn R*. Sharper focus for a radially polarized light beam // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. P. 233901.
- Sheppard C.J.R. Annular pupils, radial polarization, and superresolution // Appl. Opt. 2004. V. 43(22). P. 4322-4327.
- 4. *Helseth L.E.* Mesoscopic orbitals in strongly focused light // Opt. Commun. 2003. V. 224. P. 255-261.
- Sun C.-C., Liu C.-K. Ultrasmall focusing spot with a long depth of focus based on polarization and phase modulation // Opt. Lett. 2003. V. 28. P. 99–101.
- Kozawa Y., Sato S. Sharper focal spot formed by higherorder radially polarized laser beams // J. Opt. Soc. Am. A. 2007. V. 24. P. 1793-1798.
- Creation of a needle of longitudinally polarized light in vacuum using binary optics / H. Wang, L. Shi, B. Lukyanchuk, C. Sheppard and C.T. Chong // Nat. Photonics. 2008. V. 2. P. 501-505.
- Хонина С.Н. Волотовский С.Г. Управление вкладом компонент векторного электрического поля в фокусе высокоапертурной линзы с помощью бинарных фазовых структур // Компьютерная оптика. 2010. Т. 34. № 1. С. 58-68.
- 9. Анализ влияния волновых аберраций на уменьшение размеров фокального пятна в высокоапертурных фокусирующих системах / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, Е.А. Пелевина // Компьютерная оптика. 2011. Т. 35. № 2. С. 203-219.
- di Francia G.T. Degrees of freedom of an image // J. Opt. Soc. Am. 1969. V. 59. P. 799–804.
- Huang F.M., Zheludev N.I. Super-resolution without evanescent waves // Nano Lett. 2009. Vol. 9. P. 1249-1254.
- Sales T.R.M., Morris G.M. Diffractive superresolution elements // J. Opt. Soc. Am. A. 1997. Vol. 14. P. 1637.
- Хонина С.Н., Волотовский С.Г. Минимизация светового и теневого фокального пятна с контролируемым ростом боковых лепестков в фокусирующих системах с высокой числовой апертурой // Компьютерная оптика. 2011. Т. 35. № 4. С. 438-451.
- Хонина С.Н., Устинов А.В. Уменьшение размера фокального пятна при радиальной поляризации с помощью бинарного кольцевого элемента // Компьютерная оптика. 2012. Т. 36. № 2. С. 219-226.
- 4pi-confocal microscopy is coming of age / Joerg Bewersdorf, Alexander Egner, Stefan W. Hell // G.I.T. Imaging & Microscopy. 2004. Vol. 4. P. 24-25.
- Helseth L.E. Breaking the diffraction limit in nonlinear materials // Opt. Commun. 2005. Vol. 256. P. 435.
- 17. Bokor N., Davidson N. Tight parabolic dark spot with high numerical aperture focusing with a circular π phase plate // Opt. Commun. 2007. V. 270. P. 145-150.
- Хонина С.Н., Волотовский С.Г. Исследование применения аксиконов в высокоапертурной фокусирующей системе // Компьютерная оптика. 2010. Т. 34. № 1. С. 35-51.
- Tian B. Pu J. Tight focusing of a double-ring-shaped azimuthally polarized beam // Opt. Lett. 2011. V. 36, N 11. P. 2014-2016.
- Generation of sub-wavelength super-long dark channel using high NA lens axicon // K. Lalithambigai, P. Suresh, V. Ravi, K. Prabakaran, Z. Jaroszewicz, K.B. Rajesh, P. M. Anbarasan, and T.V.S. Pillai // Opt. Lett. 2012. Vol. 37. No. 6. P. 999-1001.

- 21. *Chen W., Zhan Q.* Three-dimensional focus shaping with cylindrical vector beams // Opt. Commun. 2006. V. 265. P. 411-417.
- Focusing properties of concentric piecewise cylindrical vector beam / X. Gaoa, J. Wanga, H. Gua, W. Xub // Optik. 2007. V. 118. P. 257-265.
- Abramowitz M., Stegun I.A. Handbook of Mathematical Functions. Courier Dover Publications, 1972. 1046 p.
- 24. Хонина С.Н., Волотовский С.Г. Исследование приме-

нения аксиконов в высокоапертурной фокусирующей системе // Компьютерная оптика. 2010. Т. 34. № 1. С. 35-51.

- 25. Линзакон: непараксиальные эффекты / С.Н. Хонина, Н.Л. Казанский, А.В. Устинов, С.Г. Волотовский // Оптический журнал. 2011. Т. 78. № 11. С. 44-51.
- 26. *Хонина С.Н.* Эйри-подобные двумерные распределения // Вестник СГАУ. 2010. №4. С. 299-311.

FORMING OF THE THIN LIGHT TUBE AT SHARP FOCUSING OF AZIMUTHALLY-POLARIZED RADIATION

© 2012 S.N. Khonina, A.V. Ustinov

Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara

The theoretical and numerical analysis of transmission function of focusing system with the high numerical aperture is spent with the purpose of formation in focal area of a thin light tube at azimuthally-polarized radiation. It is analytically shown, that due to a destructive interference of two beams, formed by two narrow rings, it is possible to overcome not only whole-aperture diffractive limit, but also a limit connected with the ring aperture. Thus, however, intensity in the center of a focal plane essentially decreases, that practically leads to break of a tube. It is numerically shown, that long thin tubes can be formed by means of aperture apodizing by phase function of diffractive axicon, and also by complex transmission function matched with Laguerre-Gaussian modes and radial Airy-Gaussian beams.

Keywords: Sharp focusing, azimuthal polarization, light tubes, diffractive axicon, fashions Laguerre-Gaussian modes, radial Airy-Gaussian beams.

Svetlana Khonina, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Research Fellow. E-mail: khonina@smr.ru Andrey Ustinov, Leading Programmer. E-mail: andr@smr.ru