УДК 62.534 (031)

ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ С ПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

© 2012 С.П. Безгласный, С.В. Жаренков

Самарский государственный аэрокосмический университет

Поступила в редакцию 19.06.2012

В данной статье решена задача о построении асимптотически устойчивых произвольно заданных программных движений двойного маятника переменной длины с подвижной точкой подвеса. Решение получено синтезом активного программного управления, приложенного к системе тел, и стабилизирующего управления по принципу обратной связи. Управление построено в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова теории устойчивости с использованием функций Ляпунова со знакопостоянными производными.
Ключевые слова: уравнения Лагранжа второго рода, программное движение, прямой метод Ляпунова, стабилизация движения, асимптотическая устойчивость.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи по реализации управляемых пространственных движений механической системы имеют важное прикладное значение и широко рассматриваются авторами во многих работах, например [1-6]. В данной работе ставится и решается задача об определении управлений, реализующих и стабилизирующих произвольно заданные программные движения плоского двойного маятника переменной длины с подвижной точкой подвеса. Решение проводится построением активного управления, приложенного к системе тел и представляющего собой совокупность программного управления и стабилизирующего управления, осуществляемого по принципу обратной связи. Исследование программного движения сводится к анализу нулевого решения неавтономной системы и проводится на основе прямого метода Ляпунова [7]. Метод предельных систем [8] и его модификация [9] позволяет при использовании функций Ляпунова со знакопостоянными производными строить искомое управление в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоские движения вертолёта с грузом, прикрепленным на тросе, моделируемого двойным маятником переменной длины с подвижной точкой подвеса. Пусть вертолет имеет массу m_1, и груз – массу m_2. Точки O, O_2 есть центры масс вертолета и груза, точка O_1 – точка крепления троса к вертолету; l_1 – расстояние от центра масс вертолета до точки крепления троса, $l_2(t)$ – длина троса, изменяющаяся по заданному закону. Считаем, что трос не деформируется, нерастяжим и невесом. Тем самым имеем механическую систему – двойной маятник, представляющий собой математический маятник, закрепленный на твердом теле, совершающем плоские вращательные движения относительно подвижного центра масс.

Пусть OXY есть абсолютная неподвижная система координат. Движение центра масс вертолета (тела) в плоскости OXY описывается заданным законом: $\upsilon = \upsilon(t)$ вдоль оси OX и $\theta = \theta(t)$ вдоль оси OY.

Исследуем плоские движения описанной механической системы. Поставим задачу о реализации управляющими силами, прикладываемыми к системе, произвольно заданных (программных) движений двойного маятника переменной длины с подвижной точкой подвеса и о стабилизации этих движений.

Программным (желательным движением) назовем пару $\left(\overline{r}(t), \dot{\overline{r}}(t)\right)$, где $\overline{r}(t)$ – ограниченная, дважды кусочно-непрерывная дифференцируемая вектор-функция, описывающая некоторое заданное движение механической системы.

Уравнения движения исследуемой системы составим в форме уравнений Лагранжа второго рода [10]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\overline{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \overline{q}} = Q, \tag{1}$$

В общем случае программное движение $\overline{r}(t)$ может не являться решением системы дифференциальных уравнений (1), описывающих дви-

Безгласный Сергей Павлович, кандидат физико-математических наук, доцент. E-mail: bezglasnsp@rambler.ru
Жаренков Сергей Васильевич, студент.
E-mail: sergey.zharenkov@gmail.com

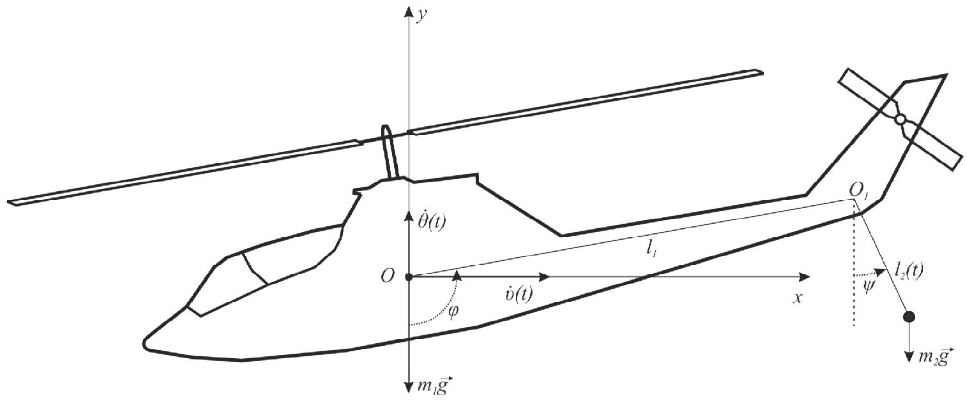

Рис. 1. Схема механической системы

жения управляемой механической системы. Поэтому будем реализовывать программные движения, разделив управляющие воздействия на две группы: силы, реализующие программное движение, и силы, стабилизирующие его.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Пусть центр масс тела движется в плоскости OXY со скоростью $\left(\dot{\upsilon},\dot{\theta}\right)^T$, где символ $(\ )^T$ обозначает транспонирование. Положение вертолета относительно кениговой системы координат Oxy будет характеризоваться углом φ, а положение троса – углом ψ, отсчитываемым от вертикали. Примем данные углы за обобщенные координаты и запишем кинетическую энергию системы:

$$T=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{\upsilon}^2+\dot{\theta}^2\right)+\frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\varphi}^2+m_2l_1l_2(t)\,\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi-\psi)+\frac{1}{2}m_2l_2^2(t)\,\dot{\psi}^2-$$
$$-m_2l_1\dot{l}_2(t)\,\dot{\varphi}\sin(\varphi-\psi)+m_2l_1\dot{\varphi}\dot{\upsilon}\cos(\varphi)+m_2l_2(t)\,\dot{\psi}\dot{\upsilon}\cos(\psi)+$$
$$+m_2l_1\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin(\varphi)+m_2l_2(t)\,\dot{\psi}\dot{\theta}\sin(\psi)+m_2\dot{l}_2(t)\,\dot{\upsilon}\sin(\psi)-m_2\dot{l}_2(t)\,\dot{\theta}\cos(\psi)+$$
$$+\frac{1}{2}m_2\dot{l}_2^2(t)+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{\upsilon}^2+\dot{\theta}^2\right).$$

гюде I_1 – момент инерции тела.

Величина T представима в виде суммы: $T=T_2+T_1+T_0$, где $T_2=\frac{1}{2}\dot{\bar{q}}^T A\left(t,\bar{q}\right)\dot{\bar{q}}$ – квадратичная форма скоростей $\dot{\bar{q}}$, задаваемая симметричной матрицей $A\left(t,\bar{q}\right)$; $T_1=B^T\left(t,\bar{q}\right)\dot{\bar{q}}$ – линейная форма скоростей $\dot{\bar{q}}$, определяемая вектором-столбцом $B\left(t,\bar{q}\right)$; $T_0=T_0\left(t,\bar{q}\right)$ – скалярная функция.

С учётом структуры кинетической энергии уравнения (1) запишутся в следующем виде:

$$A\ddot{\bar{q}}+M+\left(\frac{\partial B}{\partial \bar{x}^T}-\frac{\partial B^T}{\partial \bar{x}}\right)\dot{\bar{q}}+\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial T_0}{\partial \bar{q}}=Q, \quad (2)$$

где через $M=M\left(\bar{q},\dot{\bar{q}}\right)$ обозначен-вектор столбец с компонентами, вычисляемыми по формуле:

$$M_i=\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_j, \qquad \left(i=\overline{1,2}\right).$$

Вектор обобщенных сил $Q=Q_e+Q_c$ в правой части (2), представляет собой сумму внешних сил Q_e, действующих на механическую систему, и управляющих воздействий Q_c, определяемых в дальнейшем и являющихся совокупностью программных Q_p и стабилизирующих Q_s сил: $Q_c=Q_p+Q_s$.

Ниже предполагаем, что движение исследуемой механической системы происходит без воздействия внешних возмущающих сил.

Вычислив слагаемые в левой части (2), получим уравнения движения в скалярном виде:

$$\begin{cases} I\ddot{\varphi}+m_2l_1\ddot{\upsilon}\cos(\varphi)+m_2l_1\ddot{\theta}\sin(\varphi)-m_2l_1\ddot{l}_2(t)\sin(\varphi-\psi)+2m_2l_1\dot{l}_2(t)\dot{\psi}\cos(\varphi-\psi)+ \\ +m_2l_1l_2\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi)+m_2l_1l_2(t)\dot{\psi}^2\sin(\varphi-\psi)+m_2l_1^2\ddot{\varphi}+m_2gl_1\sin(\varphi)=Q_p^{\varphi}+Q_s^{\varphi}, \\ \\ m_2l_2^2(t)\ddot{\psi}+m_2l_2(t)\ddot{\upsilon}\cos(\psi)+m_2l_2(t)\ddot{\theta}\sin(\psi)+m_2l_1l_2(t)\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi)- \\ -m_2l_1l_2(t)\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\psi)+2m_2l_2(t)\dot{l}_2(t)\dot{\psi}+m_2gl_2\sin(\psi)=Q_p^{\psi}+Q_s^{\psi}; \end{cases}$$

3. ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММНЫХ И СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ ДВИЖЕНИЙ

Пусть необходимо, чтобы система совершала некоторое программное движение $\bar{r}(t),\dot{\bar{r}}(t)$. Прямой подстановкой программного движения $\bar{r}(t)$ в систему (2) определим, как и в [6], управляющие силы, реализующие это движение:

$$Q_p=A\ddot{\bar{r}}+M\left(\bar{r},\dot{\bar{r}}\right)+\left(\frac{\partial B}{\partial \bar{q}^T}-\frac{\partial B^T}{\partial \bar{q}}\right)\dot{\bar{r}}+\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{\partial T_0}{\partial \bar{q}}. \quad (3)$$

Подставив силы (3) в уравнения (2), имеем управляемую систему, для которой программное движение $\bar{r}(t),\dot{\bar{r}}(t)$ является решением, но, вообще говоря, не является устойчивым. Возникает задача о его стабилизации, состоящая в определении стабилизирующих сил, которые обеспечат асимптотическую устойчивость исследуемого движения.

Сведем решение задачи о стабилизации программных движений к задаче о стабилизации нулевого решения неавтономной лагранжевой системы. Это позволит применить к задаче о стабилизации программных движений методы и результаты, разработанные для исследования устойчивости и стабилизации нулевого положения равновесия неавтономных систем [9].

Введем новые обобщенные координаты (отклонения) по правилу $\overline{x}=\overline{q}-\overline{r}(t)$. В силу линейности замены и линейности оператора дифференцирования структура уравнений Лагранжа при переходе к уравнениям в отклонениях не изменится, и, аналогично [11], уравнения возмущенного движения примут вид:

$$A\ddot{\overline{x}}+M+M'+\left(\frac{\partial B}{\partial \overline{x}^T}-\frac{\partial B^T}{\partial \overline{x}}\right)\dot{\overline{x}}+A\ddot{\overline{r}}+M''+$$

$$+\left(\frac{\partial B}{\partial \overline{x}^T}-\frac{\partial B^T}{\partial \overline{x}}\right)\dot{\overline{r}}+\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{\partial T_0}{\partial \overline{q}}=Q_s+Q_p, \quad (4)$$

где через M, M' и M'' обозначены соответственно компоненты квадратичной, линейной и нулевой по скоростям векторных форм:

$$M_i=\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{x}_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{x}_j, \quad \left(i=\overline{1,2}\right);$$

$$M'_i=\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{r}_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{r}_j+\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_k\dot{x}_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{r}_k\dot{x}_j, \quad \left(i=\overline{1,2}\right);$$

$$M''_i=\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_k\dot{r}_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{r}_k\dot{r}_j, \quad \left(i=\overline{1,2}\right);$$

Задачу о стабилизации решим прямым методом Ляпунова с использованием функции Ляпунова, которую согласно [11] выберем в виде:

$$V\left(t,\overline{x},\dot{\overline{x}}\right)=\frac{1}{2}\overline{x}^T C\overline{x}+\frac{1}{2}\dot{\overline{x}}^T A\dot{\overline{x}}. \quad (5)$$

Функция (5) является определенно-положительной. Ее производная в силу системы (4) записывается равенством:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{1}{2}\dot{\overline{x}}^T\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial \overline{x}^T}\dot{\overline{r}}\right)\dot{\overline{x}}+\dot{\overline{x}}^T C\overline{x}+\dot{\overline{x}}^T\left[-M'+\left(\frac{\partial B}{\partial \overline{x}^T}-\frac{\partial B^T}{\partial \overline{x}}\right)\dot{\overline{x}}-M''-\left(\frac{\partial B}{\partial \overline{x}^T}-\frac{\partial B^T}{\partial \overline{x}}\right)\dot{\overline{r}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial A}{\partial t}\dot{\overline{x}}-\frac{\partial A}{\partial t}\dot{\overline{r}}-\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial T_0}{\partial \overline{x}}-A\ddot{\overline{r}}+\frac{1}{2}N+Q_c\right]$$

где символом N обозначен вектор-столбец с компонентами

$$N_i=\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{x}_j-\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{x}_j, \quad \left(i=\overline{1,2}\right);$$

Определим стабилизирующее управление равенством:

$$Q_s=-C\overline{x}-D\dot{\overline{x}}+M''+\left(\frac{\partial B}{\partial \overline{x}^T}-\frac{\partial B^T}{\partial \overline{x}}\right)\dot{\overline{r}}+$$

$$+\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{\partial T_0}{\partial \overline{x}}+\frac{\partial A}{\partial t}\dot{\overline{r}}+A\ddot{\overline{r}}+Q_p, \quad (6)$$

где матрицы C и D являются ограниченными и неисчезающими и выбираются из условий:

$$c_0E\le C=const\le c_1E, \quad \left(0<c_0<c_1-const\right)$$

$$d_0E\le D(t,q)=const\le d_1E, \quad \left(0<d_0<d_1-const\right)$$

$$2D+\frac{dA}{dt}\ge \alpha_0E, \quad \left(0<\alpha_0-const\right)$$

Тогда производная функции (5) имеет оценку

$$\frac{dV}{dt}\cong-\dot{\overline{x}}^T\left(\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t}+D\right)\dot{\overline{x}}\le-\frac{\alpha_0}{2}\left\|\dot{\overline{x}}\right\|^2\le 0$$

и является определенно-отрицательной функцией по скоростям. Таким образом, на основе теоремы об асимптотической устойчивости из [9] имеем асимптотическую устойчивость исследуемого программного движения.

Вычислим слагаемые правой части (6) и получим стабилизирующие управления в скалярном виде:

$$Q_c^{\varphi}=Q_s^{\varphi}+Q_p^{\varphi}=-c_{11}x_1+d_{11}\dot{x}_1+2m_2l_1l_2(t)\dot{\psi}^{*2}\sin\left(\varphi^*+x_1-\psi^*-x_2\right)+$$

$$+3m_2l_1\dot{l}_2(t)\dot{\psi}^*\cos\left(\varphi^*+x_1-\psi^*-x_2\right)+m_2l_1\ddot{\upsilon}\cos\left(\varphi^*+x_1\right)+$$

$$+m_2l_1\ddot{\theta}\sin\left(\varphi^*+x_1\right)-m_2l_1\ddot{l}_2(t)\sin\left(\varphi^*+x_1-\psi^*-x_2\right)-$$

$$-m_2l_1\dot{\varphi}^*\dot{\upsilon}\sin\left(\varphi^*+x_1\right)+m_2l_1\dot{\varphi}^*\dot{\theta}\cos\left(\varphi^*+x_1\right)-$$

$$-m_2l_1\dot{l}_2(t)\dot{\varphi}^*\cos\left(\varphi^*+x_1-\psi^*-x_2\right)+I_1\ddot{\varphi}^*+m_2l_1^2\ddot{\varphi}^*+$$

$$+m_2l_1l_2(t)\ddot{\psi}^*\cos\left(\varphi^*+x_1-\psi^*-x_2\right);$$

$$Q_c^{\psi}=Q_s^{\psi}+Q_p^{\psi}=-c_{22}x_2+d_{22}\dot{x}_2-2m_2l_1l_2(t)\dot{\varphi}^{*2}\sin\left(\varphi^*+x_1-\psi^*-x_2\right)+$$

$$+2m_2l_1\dot{l}_2(t)\dot{\varphi}^*\cos\left(\varphi^*+x_1-\psi^*-x_2\right)+2m_2l_2(t)\dot{\upsilon}\cos\left(\psi^*+x_2\right)+$$

$$+2m_2\dot{l}_2(t)\dot{\theta}\,\mathrm{sins}\left(\psi^*+x_2\right)+4m_2l_2(t)\dot{l}_2(t)\dot{\varphi}^*+$$

$$+m_2l_2(t)\ddot{\upsilon}\cos\left(\psi^*+x_2\right)+m_2l_2(t)\ddot{\theta}\sin\left(\psi^*+x_2\right)-$$

$$-m_2l_2(t)\dot{\psi}^*\dot{\upsilon}\sin\left(\psi^*+x_2\right)+m_2l_2(t)\dot{\psi}^*\dot{\theta}\cos\left(\psi^*+x_2\right)$$

$$+m_2l_1l_2(t)\ddot{\varphi}^*\cos\left(\varphi^*+x_1-\psi^*-x_2\right)+m_2l_2^2(t)\ddot{\psi}^*;$$

Отметим, что при выборе программного и стабилизирующего управлений предложенным способом, заданные движения реализуются при любых законах движения точки подвеса маятника O: $\upsilon=\upsilon(t)$, $\theta=\theta(t)$.

Для иллюстрации полученных результатов проинтегрируем численно с помощью математического пакета Maple уравнения движения построенной управляемой механической системы при следующих значениях параметров:

$$l_1=1.5,\ l_2(t)=0.5+0.2\sin\left(\frac{t}{2}\right),\ I_1=1000,\ m_2=100,$$

$$c_{11}=c_{22}=25,\ c_{12}=c_{21}=0,\ d_{11}=d_{22}=75,\ d_{12}=d_{21}=0.$$

Программное движение было выбрано следующее:

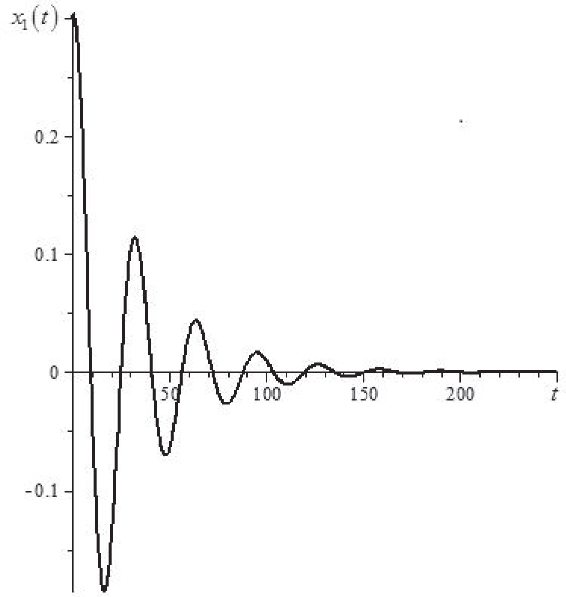

Рис. 2. Отклонение $x_1(t)$

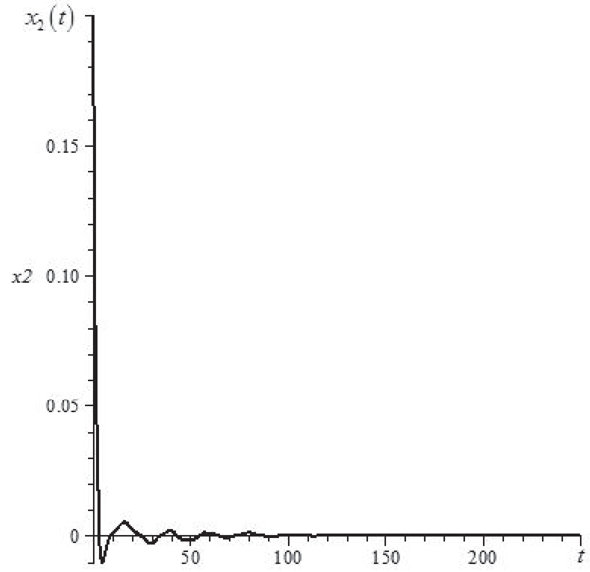

Рис. 3. Отклонение $x_2(t)$

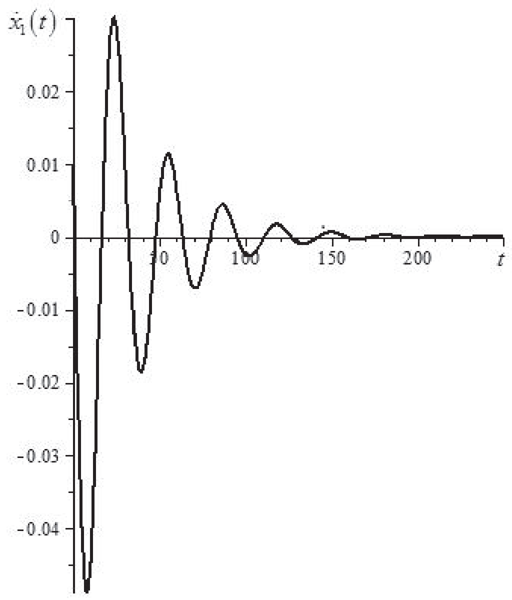

Рис. 4. Скорости отклонения $\dot{x}_1(t)$

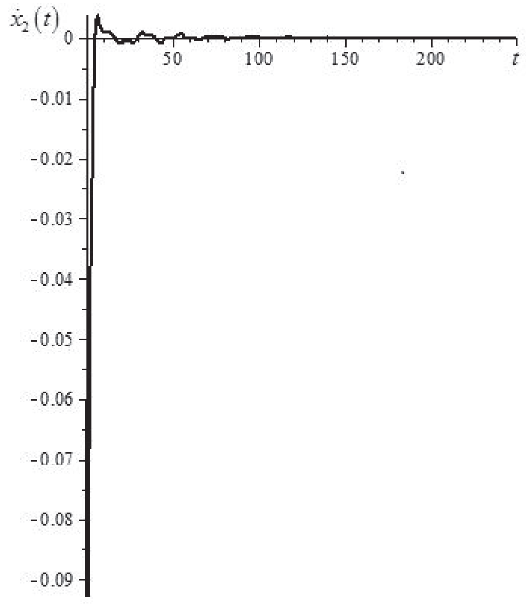

Рис. 5. Скорости отклонения $\dot{x}_2(t)$

$$\begin{cases} \varphi^* = \dfrac{\pi}{2} + 0.5\sin\left(\dfrac{t}{10}\right), \\ \psi^* = 0. \end{cases}$$

Начальные условия были взяты:

$$x_{01} = 0.3,\ \dot{x}_{01} = 0.01,$$

$$x_{02} = 0.2,\ \dot{x}_{02} = -0.06.$$

На рис. 2-3 показаны изменения отклонений от программного движения, на рисунках 4-5 представлены соответственно изменения скоростей отклонений с течением времени для уравнений возмущенного движения двойного маятника. Приведённые графики иллюстрируют асимптотическую сходимость отклонений.

Результаты работы развивают и обобщают соответствующие результаты из [5, 6, 11] и могут быть использованы при моделировании робототехнических систем, в приборостроении и технике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989. 447 с.
2. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 359 с.
3. *Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д.* Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971. 352 с.
4. *Зубов В.И.* Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Судостроение, 1980. 375 с.

5. *Смирнов Е.Я., Павликов В.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В.* Управление движением механических систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 316 с.
6. *Bezglasnyi S.P.* The stabilization of program motions of controlled nonlinear mechanical system // Korean J. Comput. Appl. Math. 2004. V. 14, № 1-2. P. 251-266.
7. *Руш Н., Абетс П., Лаула М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 301 с.
8. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary equations // J.Differ. Equat. 1977. V. 23. P.216-223
9. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ 1984. Т. 48. Вып.2. С. 225-232.
10. *Маркеев А.П.* Теоритическая механика: учеб. для вузов. Издание второе, дополненное. М.: ЧеРо, 1999. 572 с.
11. *Безгласный С.П., Худякова М.А.* Стабилизация программных движений уравновешенного гиростата // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып 4. С. 31-38.

CONSTRUCTION OF THE PROGRAMMED MOTION OF DOUBLE PENDULUM OF VARIABLE LENGTH WITH FIXED POINT OF SUSPENSION

© 2012 S.P. Bezglasnyi, S.V. Zharenkov

Samara State Aerospace University

In this article the problem of constructing asymptotically stability arbitrarily given program motions of the double pendulum of variable length with a moving point of suspension is solved. The solution is obtained by synthesis of the active program control applied to the system of bodies, and the stabilizing control on the principle of feedback. Control is done in the form of an exact analytical solution in the class of continuous functions. The problem is solved by direct method of Lyapunov stability theory with Lyapunov's functions with constant sign of the derivatives.

Key words: Lagrange's equations of the second kind, program motion, Lyapunov's direct method, stabilization of motion, asymptotic stability.

Sergey Bezglasnyi, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor. E-mail: bezglasnsp@rambler.ru
Sergey Zharenkov, Student.
E-mail: sergey.zharenkov@gmail.com