

УДК 626.81:517.977.57(004.021)

## МЕТОДЫ МНОГОМЕРНОГО ОБОБЩЕНИЯ ПОИСКА ОПТИМУМА ФИБОНАЧЧИ В ЗАДАЧАХ С ВОДНЫМИ РЕСУРСАМИ

© 2013 Л.К. Левит-Гуревич

Институт водных проблем РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 12.05.2013

Рассматриваются оптимизационные задачи, связанные с водными ресурсами: выбор гидромодуля, калибровка гидравлической модели реки, рациональное управление водными ресурсами реки на примере Волжско-Камского каскада и дельты Волги, выбор рационального варианта технических мероприятий на водохозяйственном участке. Задачи обладают общими свойствами по искомым параметрам и могут быть решены только прямыми методами оптимизации, основанными на вычислительных экспериментах. Большая трудоемкость экспериментов заставляет искать методы решений с минимумом экспериментов. К таким методам относится многомерное обобщение поиска оптимума Фибоначчи - одномерный вариант его известен. Даны положения метода, алгоритм, доказательства, сравнение с симплексным методом Нелдера-Мида.

Ключевые слова: гидромодуль, гидравлическая модель, река, калибровка, управление, водные ресурсы, оптимум Фибоначчи, вычислительный эксперимент, методы прямой оптимизации

Превалирующее число задач в планировании водного хозяйства, проектировании водохозяйственных мероприятий и сооружений, управлении водными ресурсами представляют собой задачи оптимизации. Существуют задачи моделирования технических мероприятий и сооружений, связывающие параметры объектов и показатели их функционирования. И поскольку в основе режима водных ресурсов лежат вероятностные гидрологические характеристики водного стока, значительную долю составляют задачи имитационного моделирования. Триада методов оптимизации, имитации, моделирования полностью покрывает область математического обоснования принятия решений при планировании водного хозяйства, проектировании, управлении водными ресурсами. С развитием водохозяйственной деятельности увеличивается сложность решаемых задач, требуется большая детальность результатов. В соответствии с системными положениями использования математических методов решение больших проблем использует комплекс методов, причем в практической постановке задача, обычно, структурируется на подзадачи, уровни и т.д., они могут находиться в сложных отношениях иерархии, итераций, разделения на основные параметры и второстепенные, и зачастую поиск некоторого числа главных параметров требует трудоемких расчетов по другим параметрам.

В настоящей статье рассматриваются несколько известных в водном хозяйстве и управлении водными ресурсами оптимизационных задач, объединенных необходимостью использовать лишь прямые методы оптимизации, т.е. действовать при решении только на основании результатов

вычислительных экспериментов, представляющих собой решения задачи при заданных значениях некоторых главных переменных. Требуется найти значения этих главных переменных, соответствующие оптимальному решению задачи, путем проведения последовательности вычислительных экспериментов. Поскольку трудоемкость выполнения каждого вычислительного эксперимента, в результате которого определяются неосновные параметры задачи, значительна, ставится проблема не только найти решение задачи, но и найти его с минимумом числа экспериментов. Такая постановка наводит на мысль обобщить на многомерное пространство идеи поиска оптимума Фибоначчи. В статье обосновывается такое многомерное обобщение Фибоначчи и указаны решения представленных водных задач. Изложенная теория выходит за рамки водохозяйственных задач, имея самостоятельное значение. Метод многомерного обобщения поиска оптимума Фибоначчи сравнивается с известным прямым методом оптимизации - с симплексным методом Нелдера-Мида. В изложении содержания водохозяйственных и водоресурсных задач, подробно показана только часть решения каждой задачи, относящаяся к поиску оптимума Фибоначчи.

### Постановка водохозяйственных и водоресурсных задач.

#### Укомплектование графика гидромодуля.

Крупная оросительная система обслуживает большое число полей  $p$  севооборота, для каждого поля известны сроки и продолжительность поливов  $\Delta p$ , поливные расходы  $Q_p$ , вычисленные по гидромодулю  $h_p$  в л/с/га культуры и площади поля, - все эти величины оптимальные по биологическим условиям растениеводства. Пусть  $p$  - индексация поливов относительно к полям (для каждой культуры обычно планируют несколько поливов за сезон). Головная насосная станция (НС) оросительной

Левит-Гуревич Леонид Константинович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник. E-mail: Lev-Gur@Yandex.ru

системы обеспечить оптимальные поливы и выдержать лучшие их характеристики не может, поскольку не рассчитана на пик поливной активности - её расход  $Q_{НС}$  принимается с учетом работы в продолжение всего поливного сезона с полной нагрузкой. Ставится задача укомплектования графика поливов с выбором расходов  $q_p$  реальных поливов, дат их начала и конца  $t_p^o, t_p^*$ ,  $p = \overline{1, P}$ ;  $q_p \times (t_p^* - t_p^o) \leq \Delta_p \times Q_p$ , т.е. искомые переменные задачи - расходы  $q_p$  поливов и их даты  $t_p^o, t_p^*$ . Поливы, отличные от оптимальных, влекут за собой ущербы, функция цели есть сумма ущербов по выбираемым поливам плюс приведенные годовые затраты насосной станции  $F = \sum_p \alpha_p \times f_p(q_p, t_p^o) + \beta \times f(Q_{НС})$ . Каждая  $f_p$  описывает ущерб от невыполнения условий наилучшего  $p$ -го полива,  $f(Q_{НС})$  описывает затраты на эксплуатацию насосной станции,  $\alpha$  и  $\beta$  - экспертные коэффициенты предпочтения. Часть  $F$  - сумма ущербов по поливам, аддитивная функция по группам поливов, но каждая  $f_p$  и функция  $f$  расхода насосной станции зависят от своих аргументов сложным образом. Можно утверждать, что при увеличении  $Q_{НС}$  ущербы от невыполнения условий лучших поливов, т.е.  $f_p$  только уменьшаются, а затраты насосной станции  $f$  растут.

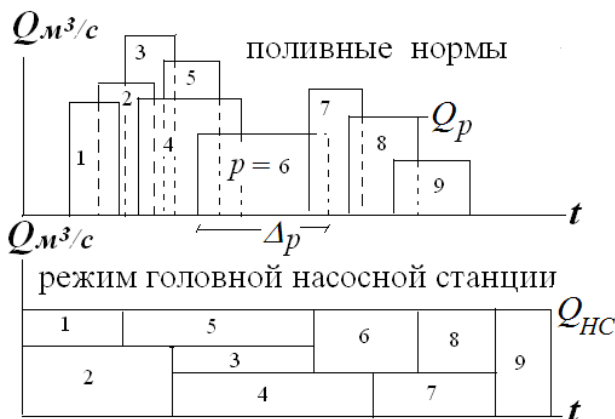


Рис. 1. К задаче укомплектования графика

Для решения задачи укомплектования графика гидромодуля при каждом заданном  $Q_{НС}$  применимы разные методы оптимизации, можно использовать линейное или динамическое программирование [1, 4, 21]. Важно, что решение этой задачи достаточно трудоемко, поскольку при этом проводятся самостоятельные расчеты, учитывается технология работ в поливной сезон и ряд неформальных условий. Указанная процедура есть вычислительный эксперимент в отношении решения всей проблемы выбора показателей функционирования оросительной системы. Решение проблемы должно быть найдено на этапе проектирования оросительной системы с выбором расчетных обеспеченностей оросительных норм по осадкам и по стоку реки, поскольку оросительная норма зависит от осадков. Решение может ежегодно

корректироваться и при эксплуатации на основе прогноза стока реки за вегетационный период и прогноза метеоусловий по осадкам.

**Калибровка цифровой модели реки для гидравлических расчетов** (Постановка задачи калибровки разработана совместно с Д.А. Никифоровым, здесь использовано [16]). Методы многомерной прямой оптимизации могут быть применены для калибровки гидравлических моделей рек [8, 16]. Цифровая гидравлическая модель реки для компьютерных расчетов неустановившегося, установившегося движения воды состоит из базовых данных геометрии реки и пойм и гидрологических данных притока, граничных и начальных условий по уровням и расходам. Участок реки для гидравлических расчетов представляет собой, как правило, регулируемое водохранилище и реку с притоками в виде графа-дерева на плане (рис. 2). На крупной реке водохранилища обычно русловые проточной гидравлики; на гидрографической сети участка могут встретиться озера, пруды статического типа, нерегулируемые водохранилища. Для гидравлических расчетов используется одна базовая модель геометрии, меняются лишь гидрологические данные. В настоящее время распространены программные комплексы расчетов гидравлики рек и водохранилищ: MIKE (DHI Water & Environment, Denmark), HEC-RAS (US Army Corps of Engineers), SOBEK (Delft Hydraulics Software). Программы прекрасно показывают себя в эксплуатации, но подготовка базовой модели участка реки достаточно трудоемка.

В базовой геометрической модели створы  $i$  идут против течения по каждому притоку  $r$ . Расстояния между ними  $L_{i-1,i}, L_{i,i+1}$ . Сечения по створу описываются точками  $j$  земли с отметками  $z_j$  последовательно по левой пойме, руслу, правой пойме и расстояниями  $l_j$  от крайней левой точки, даются точки левой и правой бровок русла  $z_{brow}^{left}$  и  $z_{brow}^{right}$ . Коэффициенты шероховатости (Маннинг, Павловский)  $n^{left}, n^{cham}, n^{right}$  даются на створах по поймам и по руслу.

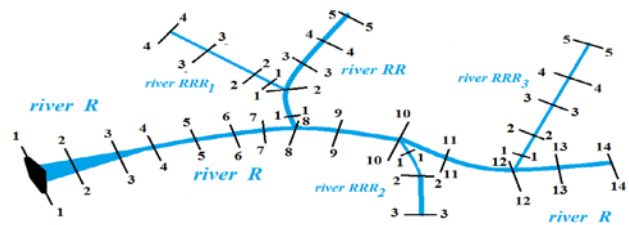


Рис. 2. Схема расчетного гидравлического участка с нумерацией створов

На профилях сечений по заданным высотным отметкам земли прослеживается общее строение каждой поймы и русла (рис. 3). Сечение поймы состоит из двух частей: условно горизонтальной и наклонной, русло может быть трапециевидной, параболической или иной формы, на левой и правой стороне русла форма его может быть различной. По анализу общей формы пойм и русла

определяются пределы соотношений геометрических величин, характеризующих гидравлические показатели потока: ширина, глубина, площадь живого сечения и др. На рис. 3. показаны используемые

обозначения пропуска расхода:  $H$  – глубина в русле, на левой, правой пойме,  $b$  – ширина потока,  $z$  – отметки дна,  $B$  - ширина реки.

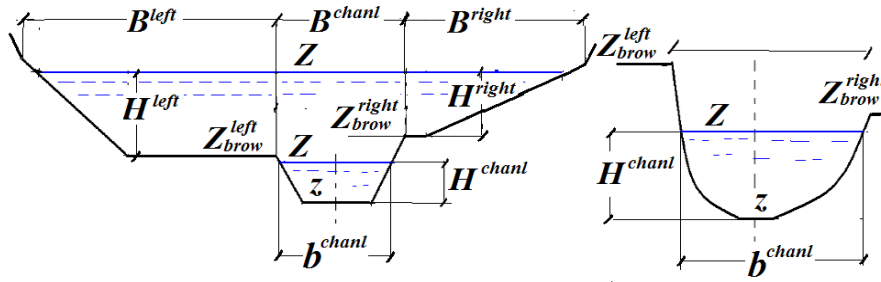


Рис. 3. Схема поперечного сечений русла и пойм, левой и правой

Для водохранилища, входящего в состав рассматриваемого участка реки, задаются отметка нормативных уровней: нормальный подпорный  $Z^{norm}$  (НПУ), уровень мертвого объема  $Z^{dead}$  (УМО), форсированный  $Z^{force}$  (ФПУ), и данные выверенных объемов водохранилища: полный  $V^{norm\_fact}$  и мертвый  $V^{dead\_fact}$  объемы, полезный как их разница. Участок реки разбивается на условно «однородные» отрезки по гидрографии, плановому строению, топографии, устанавливаются отрезки равномерного расширения или сужения реки. В локальных местах устанавливаются отдельные створы. Таким образом, визуальнo по карте выделяются отдельные створы и группы створов по указанным отрезкам реки.

На рассматриваемом расчетном участке реки существуют пункты наблюдений  $i^*$  за уровнями реки – множество  $I^*$  пунктов. Уровни, наблюдаемые на постах наблюдений,  $Z_{i^*}^{fact}$ ,  $i^* \in I^*$  определены по тем же временным интервалам, с каким проводится и гидравлический расчет. Базовая модель является в значительной степени идеализацией описания параметров реки - программными комплексами гидравлических расчетов не учитываются в полной мере меандрирование, мелкие рукава, притоки, заливы, острова, разнообразие форм и неправильность сечений, разные направления русла и поймы, вариации шероховатости. Обычно результаты гидравлического расчета не совпадают с уровнями, наблюдаемыми при тех же условиях гидрологии. Для обеспечения адекватных результатов гидравлических расчетов и достижения приемлемой точности предусматривается калибровка базовой модели путем допустимых изменений её параметров.

Калибровкой базовой геометрической модели реки для гидравлических расчетов называется подбор параметров модели с целью максимально точного приближения полученных по расчетам уровней к фактическим уровням на створах - постах наблюдений  $i^*$  в соответствующих гидрологических условиях, а также максимального приближения рассчитанных объемов водохранилищ к фактическим выверенным объемам [16]. Желательно сохранить свойства створов по отрезкам:

однородные отрезки остаются однородными, и т.д. Калибровка гидравлической модели реки рассматривается как оптимизационная задача минимизации отклонений уровней и объемов водохранилищ, полученных в результате гидравлического расчета, от фактических уровней на створах наблюдений и объемов. Вводятся функции оценок отклонений уровней  $F_Z$ , объемов  $F_V$ :

$$F_Z = \sum_{i^*} \left[ \frac{(Z_{i^*}^{fact} - Z_{i^*})}{U_{i^*}} \right]^2, \quad i^* \in I^*, U_{i^*} = (z_{i^*,brows}^{left} + z_{i^*,brows}^{right})/2 - z_{i^*,min}^{river} \quad (1)$$

$$F_V = \sum_v \left\{ \left[ \frac{(V_v^{dead\_fact} - V_v^{dead})}{V_v^{dead\_fact}} \right]^2 + \left[ \frac{(V_v^{norm\_fact} - V_v^{norm})}{V_v^{norm\_fact}} \right]^2 + \left[ \frac{(V_v^{force\_fact} - V_v^{force})}{V_v^{force\_fact}} \right]^2 \right\} \quad (2)$$

где  $v$  – нумерация водохранилищ, если их несколько. Оценка качества калибровки цифровой гидравлической модели реки запишется, как  $F = p_Z \times F_Z + p_V \times F_V \Rightarrow \min, p_Z + p_V = 1$ .

Параметры калибровки показаны на рис. 3 - это высотные отметки поверхности, ширина русла и пойм, а также коэффициенты шероховатости, которые принимаются одинаковыми на всех створах выделенных по отрезкам групп створов, расстояния между створами. При калибровке корректируются параметры каждого створа в соответствии с группировкой створов по отрезкам: относительные изменения параметров одинаковы в каждой группе створов. Этот принцип позволяют резко сократить число параметров калибровки, при этом сохраняется соответствие элементов реки и пойм фактическому водному объекту в общих своих чертах, т.е. достигается адекватность модели. Следует отметить монотонность изменения уровней на створах в результате гидравлического расчета при монотонном изменении каждого калибровочного параметра: сужение русла или увеличение коэффициента шероховатости могут только

повысить уровни и наоборот. Калибровка представляет собой поиск точки минимума в координатах калибровочных переменных  $F_{min}(X)$ ; единственная возможность поиска - «прямые» методы оптимизации, основанные на вычислительных экспериментах, т.е. расчетах гидравлики.

**Рациональное оперативное управление водными ресурсами реки.** Река с зарегулированным стоком представляет собой каскад водохранилищ в верховьях и средней части реки и низовья в естественном состоянии. Низовья крупной реки обычно представляют собой дельту, в пределах которой развито использование стока, но управление стоком затруднено. Для верхней части реки актуальна задача оперативного управления водохранилищами, для нижней части – задача рационального водораспределения по водотокам дельты. Хорошей иллюстрацией названных задач является пример управления водными ресурсами Волги. Поиск совместного рационального решения дан ниже для Волги. Задачей оперативного управления водохранилищами в периоды половодий и паводков является недопущение затоплений верхних и нижних бьефов плотин, что регулируется ограничениями текущих уровней форсированными уровнями  $Z_v \leq Z_v^{force}$  водохранилищ и допустимыми сбросными расходами  $Q_v \leq Q_v^{max}$ . В период межени водохранилища работают в компенсационном режиме, обеспечивая максимально возможное удовлетворение условий водопотребления и водопользования: водоснабжение, орошение, рыбное хозяйство, энергетика. Оперативное управление осуществляется путем задания среднесуточных сбросных расходов. Принципы работы водохранилищ, постановка и решение задач оперативного управления с примерами расчетов по Волжско-Камскому каскаду водохранилищ (ВКК) изложены в [9, 10].

Задачей управления водными ресурсами в регионе Нижней Волги является рациональное распределение воды по водотокам, что должно обеспечить наполнение озер и ильменей и поддержание этого наполнения для сохранения жизни водоемов, создать условия для рыбного нереста на заливных площадях, обеспечить режим расходов, необходимый для промышленного и коммунального водоснабжения, водного транспорта. В высокое половодье и полноводную межень вододеление не актуально. В периоды низкого половодья и межени рациональное управление вододелением необходимо в интересах хозяйственных отраслей и сохранения экологического благополучия. Инструментами регулирования водных ресурсов на Нижней Волге являются гидротехнические сооружения: шлюзы, насосные станции, водозаборы на водотоках, обеспечивающие поступления воды к озерам и ильменям, вододелитель. Основное вододеление проводится между Западной и Восточной частями дельты. Постановка и решение задачи рационального вододеления на Нижней Волге с примерами расчетов изложены в [11, 12].

Формализация задач рационального управления водохранилищами и водораспределения по

водотокам основаны на оценках качества водного режима  $E$  на водохранилищах ВКК, на участках реки, ильменях и водотоках Нижней Волги. Оценки определяются в виде отношений текущих уровней водохранилищ к нормально подпорным уровням  $Z_v^{norm}$ , и наполнений ильменей и расходов водотоков к наилучшим их значениям,  $E \leq 1$ . Относительные оценки качества косвенно отражают ущерб от невыполнения рационального водного режима: ущербы примерно обратно пропорциональны оценкам водного режима  $Y \approx 1/E$ . Использование оценок качества позволяет уйти от поиска абсолютных ущербов, расчет ущербов является чрезвычайно сложной в информационном плане задачей. Система взвешенных оценок определяет шкалу качества водного режима для отдельного водного объекта в целом, для отрасли, по отдельному интервалу времени или по всему периоду ( $E=1$  – обеспечены водные условия,  $E < 1$  – рациональный водный режим не обеспечен). Оценки выполнения условий для  $v$ -го водохранилища  $e_{v\tau}$  ( $e_{v\tau}$   $r$ -го ильменя, водотока) в период  $\tau$ . Обратные им величины интерпретируются как «условные ущербы»  $y_{v\tau} = 1/e_{v\tau}$ ,  $y_{r\tau} = 1/e_{r\tau}$  (в общем виде  $Y = 1/E$ ). Общий условный ущерб всего ВКК или низовий Волги найдется по взвешенной сумме обратных величин оценок  $e$  -  $Y = \sum_{v\tau} [p_{v\tau} \times (1/e_{v\tau})]$ ,  $Y = \sum_{r\tau} [p_{r\tau} \times (1/e_{r\tau})]$ ,  $\sum_{v\tau} p_{v\tau} = \sum_{r\tau} p_{r\tau} = 1$ . В задачах управления водохранилищами и водораспределения по водотокам ищется  $Y \Rightarrow \min$ .

Обе рассматриваемые задачи решаются для определенного прогноза стока реки, заданы гидрографы бокового притока  $q_v(t)$  к каждому  $v$ -му водохранилищу. Для решения задач используется метод динамического программирования в модификациях. Для решения задачи оперативного управления водохранилищами может быть использована модификация с двухмерной индексацией шагов [13], которая состоит в рассмотрении водохранилищ каскада сверху вниз, от истоков реки до замыкающего Волгоградского водохранилища и построении вариантов среднесуточного сбросного расхода водохранилищ  $Q_{v,\tau}$  и уровня у плотин  $Z_{v,\tau}$  на начало суток  $\tau$ . Проверяются условия работы водохранилищ (строгие, желаемые), вычисляются ущербы от нарушения желаемых условий, варианты с нарушением строгих условий отбрасываются сразу. Среди вариантов замыкающего водохранилища берется вариант с  $\min Y_{Up}$  ущерба, затем восстанавливаются все параметры лучшего варианта управления по каждому водохранилищу.

Для решения задачи рационального вододеления по водотокам дельты Волги используется модификация динамического программирования на сети [14], задача решается для периодов постоянного сбросного расхода Волгоградского гидроузла. Таких периодов в половодье два: «сельскохозяйственная полка» расхода и «рыбная полка», - затем одна - две полки меженных расходов. Определяется сумма ущербов для Нижней Волги по этим периодам  $Y_{Low}$ . Заметим, что результат задачи для Нижней Волги зависит полностью от сбросного расхода Волгоградского гидроузла. На



иллюстрации на рис. 4 решения задачи поиска рационального управления водными ресурсами совместно Верхней и Нижней Волги условно одной величиной  $W$  сброшенного от Волгограда объема воды, но реально рассматриваются три или четыре величины –  $W_\mu$ ,  $\mu = \overline{1,4}$ , – по порядку периодов «полок» сбросных расходов.

Обоснование режима регулирования стока Волги с учетом интересов Нижней Волги заключается в достижении верных соответствий экономических и социальных выгод или минимума ущерба для всего Поволжья при управлении работой ВКК. При обозначенных объемах  $W_\mu$  сбросного гидрографа Волгоградского гидроузла суммарный «условный ущерб»  $Y_V = p_{Up} Y_{Up} + p_{Low} Y_{Low}$ , где экспертные коэффициенты важности частей реки  $p_{Up} + p_{Low} = 1$ .

Каждый вариант сбросных объемов Волгоградского гидроузла связан с трудоемкими расчетами управления водохранилищами ВКК и рационального водораспределения по водотокам Нижней Волги. Последовательность этих вычислительных экспериментов должна сходиться к глобальному оптимуму рационального управления водными ресурсами Волги в рассматриваемый год. При этом число экспериментов минимизируется.

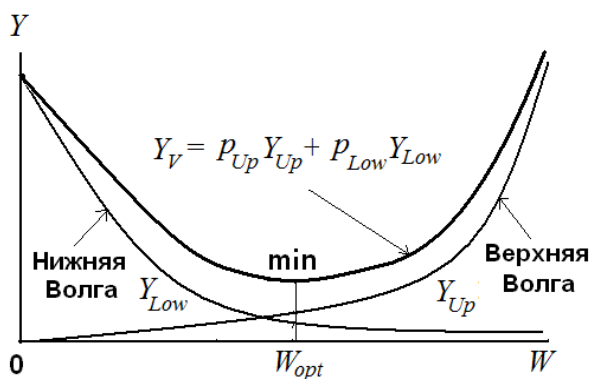


Рис. 4. Схема принятия решений по выбору лучшего режима регулирования водными ресурсами Волги:  $W$  – объемная характеристика сбросного гидрографа Волгоградского гидроузла,  $Y$  – условные «ущербы», объяснения в тексте

**Рациональный вариант технических мероприятий и сооружений.** Задача выбора рационального варианта развития технических мероприятий и сооружений на водохозяйственном участке реки должна определить состав и основные параметры этих сооружений, обеспечивающие заданные требования к водному хозяйству в отношении водообеспечения, водопользования, защиты от наводнений, защиты водных объектов от загрязнений. При этом объемы водоснабжения, в частности, орошения, зависящие от объемов производств, размера орошаемых площадей, а также показатели водопользования (рыбное хозяйство, водный транспорт, гидроэнергетика) также не определены или определены частично, и должны быть уточнены в результате решения. Задача относится к планированию развития водного хозяйства и связана

также с выбором расчетных обеспеченностей предприятий водопотребления и водопользования. При этом, как правило, по известному положению на плане местности водоемких производств, в том числе площадей орошения, нетрудно наметить положения необходимых водных систем: оросительных систем, водоводов, обвалований, мест водоочистки, – назовем их системами инфраструктуры водного хозяйства. Основные параметры этих систем (размеры, мощности, объемы и др.) подлежат определению. Рациональный вариант предполагает удовлетворение некоторому заданному критерию оптимизации или выбору среди нескольких критериев. Можно показать, что главной процедурой для выбора рационального варианта развития водного хозяйства рассматриваемого участка реки является выбор водохранилищ как технического мероприятия регулирования стока реки. Как только выбраны водохранилища с их показателями водоотдачи, системы инфраструктуры водного хозяйства выбираются однозначно. Можно указать итерационный метод определения основных параметров этих водных систем с выбором расчетных обеспеченностей [6].

Каждое водохранилище заданного местоположения на реке характеризуется коэффициентом зарегулированности стока и обеспеченностью водоотдачи [17]. По этим величинам определяется объем водохранилища и, следовательно, его стоимость [5]. Удобных мест для водохранилищ на реке по топографическим и другим условиям немного. Обеспеченность водоотдачи зависит от вероятностных характеристик стока и меняется незначительно. Коэффициенты зарегулированности стока водохранилищами в соответствии с опытом проектирования не превышают 0,8 и не менее 0,3-0,4, поэтому число разумных вариантов регулирования стока ограничено. Однонаправленное увеличение указанных характеристик водохранилища только увеличивает водоотдачу и наоборот. При этом расчет по итерациям основных параметров водных систем с выбором обеспеченностей трудоемок.

**Квазивыпуклость целевых функций задач.** Главным свойством оптимизируемой многомерной функции  $F$  в каждой из представленных водохозяйственных и водоресурсных задач является квазивыпуклость. Функция квазивыпукла, если для любого рассматриваемого допустимого её значения область аргумента, соответствующая меньшим значениям функции при минимизации, выпукла [18]. То есть,  $F(X)$  квазивыпукла, если множество  $\{X\}: F(X) \leq F^*$  выпукло (ищется минимум  $F$ ). Дополнительно может быть известен минимум  $\delta$  отношения минимального и максимального  $d^*, D^*$  диаметров множеств  $\{X\}: F(X) \leq F^*$ , т.е.  $\forall F^* \delta \leq d^* / D^* \leq 1$ , также максимальный градиент  $G$  в точках по направлениям  $l$ :  $\forall l |\partial F / \partial l| \leq G$ . Но эти свойства функции  $F$  получить из технической проблемы уже сложно. Вывод о квазивыпуклости функций  $F(X)$  основан на свойстве монотонности изменения значений  $F$  при однонаправленном изменении  $X$ , когда каждый параметр только

увеличивается или только уменьшается. Монотонность изменений  $F$  понятна из «физических» соображений в каждой из представленных водных задач. Справедливо:

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.** Если  $F(Z)$  выпуклая функция, а  $Z=Z(X)$  монотонная при однонаправленном изменении  $X$ , то  $F(X)=F(Z(X))$  квазивыпуклая.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из выпуклости  $F(Z)$  имеем  $F(Z_{pq}) \leq pF(Z_p) + qF(Z_q)$  (\*), где  $Z_{pq} = pZ_p + qZ_q$ ,  $\forall p+q=1$ , в частности  $p=q=1/2$ . Пусть  $Z_p = Z(X_p)$ ,  $Z_q = Z(X_q)$ ,  $Z_{PQ} = Z(X_{PQ})$  и  $X_p \leq X_{PQ} \leq X_q$ . Тогда в силу монотонности  $Z$  всегда  $Z_p(X_p) \leq Z_{PQ}(X_{PQ}) \leq Z_q(X_q)$ , и найдутся такие  $P$  и  $Q$ ,  $P+Q=1$ , что  $Z_{PQ}(X_{PQ}) = P \times Z_p(X_p) + Q \times Z_q(X_q)$ . Из (\*) имеем далее  $F(X_{PQ}) = F(Z_{PQ}(X_{PQ})) = F(PZ_p(X_p) + QZ_q(X_q)) \leq PF(Z_p(X_p)) + QF(Z_q(X_q)) = PF(X_p) + QF(X_q)$ , что и есть определение квазивыпуклости. Приняв  $P$  и  $Q$  так, что  $F(X_p) = F(X_q) = F^*$ , получим выражение для квазивыпуклости, приведенное выше в тексте.

Многомерное обобщение оптимума Фибоначчи работает с квазивыпуклой функцией. Ниже при изложении метода даны рисунки двумерного обобщения.

**Одномерный поиск оптимума Фибоначчи.** Поиск Фибоначчи для одномерного случая хорошо исследован [20]. Одномерная оптимизация унимодальной функции  $F$  на отрезке  $L$  проводится итерациями. На каждой итерации точками *вычислительного эксперимента* рассматриваемый отрезок  $L^n$  делится на два перекрывающиеся подотрезка длиной  $L^{n+1}$  и часть одного из них, где расположение искомой точки оптимума функции  $F$  невозможно, отбрасывается (рис. 5). На оставшимся подотрезке используется один предыдущий эксперимент и добавляется новый. Минимум экспериментов достигается, если точки делят отрезки на подотрезки в соответствии с отношением чисел Фибоначчи:

$$\frac{L^{n+1}}{L^n} = \frac{f_{N-n+2}}{f_{N-n+3}} \quad (3)$$

здесь  $n = \overline{1, N}$  - последовательные номера шагов итерации поиска экстремума,  $N$  - заданное число шагов, где числа Фибоначчи  $f_k = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots, k=0, 1, 2, 3, \dots$  удовлетворяют рекуррентному уравнению  $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$  [3].

Если начальная длина отрезка  $L$  ( $L^0$ ) - необходимое число  $N$  шагов сужения отрезков при выборе отрезка длиной не более  $2\varepsilon$ , гарантированно содержащего точку минимума с точностью не больше  $\pm\varepsilon$  длины отрезка, определится из соотношения  $f_{N+2} \leq L/2\varepsilon \leq f_{N+3}$ . Следует отметить, что поскольку  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{f_{k+1}}{f_k} \right) = \tau$ , где  $\tau = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0,618$  - число «золотого сечения», удовлетворяющее уравнению  $\tau^2 + \tau = 1$ , при больших  $N$  на практике при оптимизации используется отношения длин сужающихся отрезков, равное числу  $\tau$ .

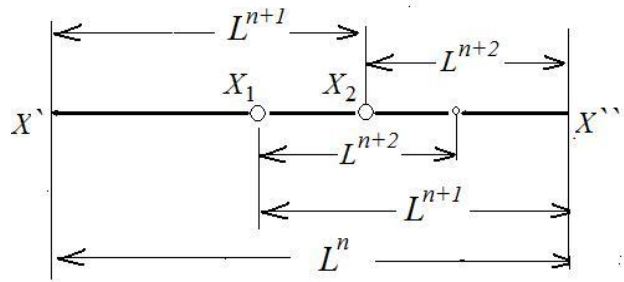


Рис. 5. Одномерный поиск оптимума Фибоначчи

В специальной технической литературе, в частности, в известном издании Fibonacci Quarterly, встречается описание прямого поиска оптимума некоторых многомерных задач в виде многократных расчетов одномерного поиска Фибоначчи на выбираемых по ходу решения одномерных отрезках разных направлений в рассматриваемом многомерном пространстве. Выбор отрезков связывается с другими методами оптимизации, но может быть также связан с поиском Фибоначчи, в этом случае процесс представляется в виде вложенных друг в друга одномерных методов, что, однако, не обеспечивает минимума вычислительных экспериментов в целом.

**Положения многомерного обобщения поиска Фибоначчи.** Сложность перехода от одномерной оптимизации к многомерной заключается в невозможности обеспечить преобразования многомерного пространства на ряд подпространств таким же простым способом, как при одномерном поиске. Геометрическую конфигурацию, в пределах которой располагаются вычислительные эксперименты, назовем *вычислительной структурой*. В одномерном случае вычислительная структура представляет собой отрезок одной координаты  $x$ . В многомерном случае вычислительный эксперимент, соответствующий оптимуму функции  $F$ , можно искать в пределах многомерного куба или симплекса. Форма вычислительной структуры выбирается по особенностям решаемой проблемы, исходя из соображений гарантированного охвата точки оптимума  $F$ . Пусть  $L$  - начальный линейный размер линейного элемента структуры - ребра. В процессе поиска оптимума рассматривается последовательность вычислительных структур, каждая из которых по анализу функции  $F$  в точках экспериментов разбивается на меньшие по размерам структуры той же геометрической формы, уменьшаясь до размера заданной точности  $\varepsilon$  поиска  $\min F$ . Основное положение состоит в том, что при многомерной оптимизации в пространстве размерности  $m$  проводятся операции с последовательностью вычислительных структур, содержащих внутри себя вычислительные эксперименты. Проблема заключается в построении последовательности структур с минимумом числа экспериментов.

1. Под *схемой экспериментов* будем понимать вычислительную структуру с расположенным внутри её набором точек  $X_p$  вычислительных экспериментов, где каждая точка эксперимента описывается набором координат  $X(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Взаимное расположение точек экспериментов внутри структуры регулируется *правилом отношений*. Каждая вычислительная структура имеет свое правило отношений, которое выражается зависимостью от номера шага итерации.

2. Важное положение *симметрии* расположения точек экспериментов в вычислительной структуре основано на том, что заранее неизвестны значения функции  $F$  экспериментов и, значит, последующий выбор меньших структур. Действует соображение равнозначности любых частей структуры - планируя эксперименты с последующим выделением подструктур, мы не знаем заранее, какую из них надо будет выбрать для последующих итераций. Поэтому минимизация экспериментов в общем виде требует симметрии схемы экспериментов, отсюда форма вычислительных структур - правильный  $m$ -мерный куб или  $m$ -мерный симплекс; в многомерном пространстве  $m > 4$  других правильных геометрических форм не существует [7, 19].

3. Внутри каждой из образуемых подструктур размерности  $m$  после деления охватывающей их структуры должна находиться хотя бы одна точка вычислительного эксперимента из числа точек охватывающей структуры. Число вершин структуры равно  $2^m$  для многомерных  $m$ -кубов и  $(m+1)$  для  $m$ -симплексов. Число экспериментов, планируемых в многомерной вычислительной структуре, должно быть не меньше числа ее вершин. На рис. 6 показаны схемы экспериментов в структурах  $m$ -кубов и  $m$ -симплексов, для  $m=2$  с минимумом экспериментов внутри каждой структуры. Анализ схем с центральным экспериментом показал, что размеры последовательных структур сужаются быстрее за счет дополнительного эксперимента, но общее их число больше.

4. Разбиение рассматриваемой структуры на подструктуры осуществляются путем отсечения  $(m-1)$ -мерными гиперплоскостями строго по  $m$  точкам проведенных экспериментов параллельно внешним гиперплоскостям основной структуры. Соображения минимизации экспериментов требуют максимального сужения размеров уменьшающихся подструктур - не следует оставлять  $m$  уже выполненных экспериментов внутри выделяемой подструктуры. С другой стороны неопределенность поведения функции внутри выделяемой подструктуры с одним выполненным экспериментом диктует необходимость отсекал эту подструктуру  $(m-1)$ -гиперплоскостями строго по  $m$  выполненным экспериментам:  $m$ -куб с  $2^m$  точками эксперимента разбивается на подструктуры  $2^m$  правильными гиперплоскостями,  $m$ -симплекс с  $(m+1)$ -й экспериментами разбивается  $(m+1)$ -й правильными гиперплоскостями.

5. При одномерной оптимизации *неперспективный* отрезок и *отбрасываемый* в процессе поиска - это один и тот же отрезок. При анализе многомерной

структуры и выделении из неё подструктур они могут быть неперспективны в разной степени, что видно на примере рис. 5, где при большом отношении  $D/d$ , т.е. вытянутости множеств  $\{X\}:F(X) \leq F^*$  точка минимума может оказаться вне подструктуры с минимальным проведенным экспериментом. Неперспективная область есть *запрещенная* область только тогда, когда это доказывается. Запрещенная область отсекается.

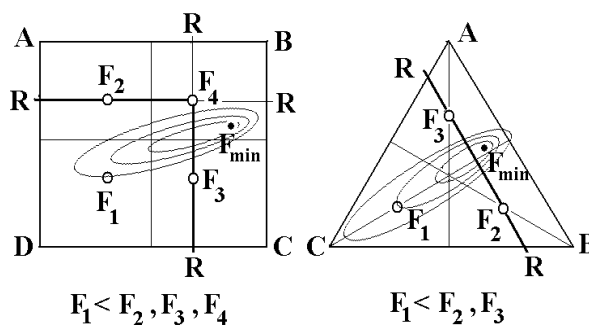


Рис. 6. Примеры минимума функции вне подструктуры с минимальным экспериментом

6. **УТВЕРЖДЕНИЕ 2.** Если среди точек  $X_1, X_2, \dots, X_{m+1}$ , не расположенных в  $(m-1)$ -мерной гиперплоскости,  $F_1 = F(X_1) > F_2, \dots, F_{m+1}$ , то конус вершины  $X_1$  и направляющими  $v_{12} = X_1 - X_2, v_{13} = X_1 - X_3, \dots, v_{1,m+1} = X_1 - X_{m+1}, \dots$  векторами является запрещенной областью (см. Приложение 1).

В рассматриваемой  $m$ -мерной структуре среди внутренних экспериментов  $X_p$  найдется  $X_{max}$ , такой, что с точностью вычислений  $F(X_{max}) \geq F(X_p), \forall X_p \neq X_{max}$  (для  $min F$ ). Существуют и  $m$  точек  $X_q, q=1, 2, \dots, m$  проведенных экспериментов, которые лежат на  $m$  правильных  $(m-1)$ -мерных гиперплоскостях, пересекающихся в точке  $X_{max}$ . Гиперплоскости образуют конус с вершиной в  $X_{max}$  вне расположения точек остальных экспериментов структуры (рис. 7 приложения 1), конус является запрещенной областью и подлежит отсечению. Заметим, что в  $m$ -симплексе запрещенная область единственная, в  $m$ -кубе запрещенных областей может быть несколько, но не более  $2^{m-1}$ .

7. Правилами отношений определяется координаты точек экспериментов в структуре  $r$ -го ранга. Ранг структуры есть число шагов  $n$  итераций последовательных сужений размеров структур, приводящих к рассматриваемой структуре. Ранг исходной структуры  $r = 0$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ 3.** При прямой оптимизации с минимумом числа экспериментов линейные размеры структур вычислительных экспериментов последовательных рангов должны сокращаться в отношении последовательных чисел Фибоначчи для многомерных кубов и последовательных натуральных чисел для симплексов (см. приложения 1 и 2). Для вычислительных структур  $m$ -кубов и  $m$ -симплексов справедливо:

$$\frac{L^{n+1}}{L^n} = \frac{f_{K-1}}{f_K}; \quad K = N - n + 3 \quad (4)$$

$$\frac{L^{n+1}}{L^n} = \frac{N - n + m + 1}{N - n + m + 2} \quad (5)$$

Здесь  $L$  – линейные размеры структур последовательных  $n$ -го и  $(n+1)$ -го шагов,  $N$  – заданное число шагов.

8. Заданное число шагов достижения точки минимума с заданной точностью  $\pm \varepsilon$  определится из соотношений (для  $m$ -куба и  $m$ -симплекса):

$$f_{N+2} \leq \frac{L^0}{2\varepsilon} \leq f_{N+3} \quad (6)$$

$$(N + m + 1) / \sqrt{2m(m+1)} \leq \frac{L^0}{2\varepsilon} \leq (N + m + 2) / \sqrt{2m(m+1)} \quad (7)$$

(6) и (7) получены выкладками: для  $m$ -кубов

$$\frac{L^N}{L^{N-1}} \times \frac{L^{N-1}}{L^{N-2}} \times \dots \times \frac{L^2}{L^1} \times \frac{L^1}{L^0} = \frac{f_2}{f_3} \times \frac{f_3}{f_4} \times \dots \times \frac{f_{N+1}}{f_{N+2}} \times \frac{f_{N+2}}{f_{N+3}},$$

$$\text{т.е. } \frac{L^N}{L^0} = \frac{f_2}{f_{N-3}}, \quad f_2 = 1, \quad L^N \leq 2\varepsilon;$$

для  $m$ -симплексов

$$\frac{L^N}{L^{N-1}} \times \frac{L^{N-1}}{L^{N-2}} \times \dots \times \frac{L^2}{L^1} \times \frac{L^1}{L^0} = \frac{m+1}{m+2} \times \frac{m+2}{m+3} \times \dots \times \frac{N+m}{N+m+1} \times \frac{N+m+1}{N+m+2}$$

$$\text{т.е. } \frac{L^N}{L^0} = \frac{m+1}{N+m+2}, \quad L^N \leq \sqrt{\frac{2(m+1)}{m}} \times \varepsilon$$

(см. лемма 2, приложение 2).

9. Основываясь на приведенных выше положениях, организуется итеративный процесс поиска точки минимума исследуемой функции путем сужения размера вычислительных структур. Однако в отличие от одномерного поиска, при котором сужаемый отрезок, перспективный для поиска в нем точки минимума, единственный, при многомерном поиске на каждом шаге итерации при разбиении некоторой вычислительной структуры на подструктуры и отсекаания запрещенных областей остается несколько подструктур. Все оставшиеся подструктуры необходимо исследовать при дальнейших итерациях. Алгоритмически удобно при вычислениях использовать списки точек  $P$ , структур  $S$  и отсекаемых областей  $Q$ . Элементы списка точек  $P$  содержит координаты точек  $X_p = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ,  $p=1, 2, \dots$ , отметку, является ли точка точкой эксперимента или лишь образующей структуру точкой (вершины многомерного куба или симплекса), значение функции  $F_p = F(X_p)$  для точек вычислительного эксперимента, если он уже проведен. Каждый элемент списка структур  $S$  содержит: ранг  $r_s$  структуры, список образующих структуру точек ее вершин (номера точек по списку  $P$ ),

список внутренних точек структуры при разбиении её на подструктуры в соответствии с правилом отношений: внутренние точки структур являются точками экспериментов. Каждая отсекаемая область  $q$  из списка запрещенных  $Q$  содержит: номер точки - вершины запрещенной области и номера точек, составляющих с вершиной вектора (положение б), образующие конус запрещенной области.

**Алгоритм многомерного поиска оптимума Фибоначчи.** Поиск точки минимума в вычислительной структуре, заведомо содержащей эту точку (вычислительная структура ранга  $r=0$ ), состоит в итерациях деления этой и последующих структур на меньшие по шагам  $n = \overline{1, N}$  с указанием внутри структур точек вычислительных экспериментов; при этом отслеживаются все образуемые структуры и точки в списках  $P$  и  $S$ , а также выявленные запрещенные области в списке  $Q$ . Число точек в  $P$  только увеличивается, число выявленных запрещенных областей в  $Q$  также только увеличивается, число же структур в списке  $S$  сначала увеличивается, затем сокращается до пустого списка, поскольку каждая структура, не достигшая еще ранга  $r=N$  ( $N$  - заданное число итераций), разбивается на подструктуры большего ранга и выбрасывается из списка  $S$ , куда вписываются новые подструктуры, либо структура выбрасывается из списка, если полностью лежит в запрещенной области, либо уже достигла ранга  $N$  и выполнен эксперимент в центральной её точке. Итерации заканчиваются при пустом списке  $S$ , при этом в списке  $P$  соответствующая  $F_{\min}$  точка и есть искомая  $X_{\min}$ .

Формально сказанное выше излагается в следующем алгоритме:

1. Из списка  $P$  точек выбирается точка  $X_p$  с минимальным значением  $F_p$  среди всех ранее выполненных экспериментов; в списке  $S$  выбирается структура  $s$  максимального ранга  $r < N$ , содержащая точку  $X_p$  как внутреннюю; если такой структуры нет, выбирается точка с минимумом среди оставшихся точек  $P$ ; если список  $S$  пуст, переход к пункту 9.

2. В выбранной структуре  $s$  помимо  $X_p$  проводится дополнение внутренними точками по правилу отношений для шага  $n$  до полного набора  $K$  внутренних точек структуры: для  $m$ -симплекса число точек  $K=m+1$ , для  $m$ -куба –  $K=2^m$ .

3. Сокращение списка запрещенных областей - выбрасываются области, покрывающиеся другими запрещенными областями (В компьютерной программе расчетов по методу Фибоначчи наблюдалось переполнение списка запрещенных областей, поэтому этот важный практический пункт включен в алгоритм, не имея особого значения в теории).

4. Для каждой дополнительной точки  $X_k$  проводится проверка: если  $X_k$  находится в одной из запрещенных областей списка  $Q$ , это обстоятельство отмечается, вычислительный эксперимент определения  $F(X_k)$  не проводится.

5. Проводятся вычислительные эксперименты для всех не попавших в запрещенные области намеченных внутренних точек структуры; в итоге, определены все  $F_k = F(X_k)$ ,  $k = \overline{1, K}$ .



6. Если все внутренние точки структуры  $X_k$  находятся в запрещенных областях, вся структура убирается из списка структур  $S$ , переход к пункту 1.

7. По набору внутренних точек  $X_k$  данной структуры  $s$  и значениям  $F(X_k)$  определяются запрещенные области  $q$  структуры и ими пополняется список запрещенных областей  $Q$ .

8. Структуры  $s$  разбиваются на подструктуры следующего ранга  $r=n+1$  по правилу отношений; при  $r < N$  ими пополняется список структур  $S$ , обработанную же структуру выбрасываем из списка  $S$ ; переход к пункту 1. Заметим, что подструктура, содержащая запрещенную область данной структуры  $s$ , найденной в пункте 7, не записывается в  $S$ . Действительно, все подструктуры структуры  $s$  перекрывают друг друга, за исключением запрещенных областей, и если некоторая подструктура содержит запрещенную область, рассматривать такую подструктуру нет смысла, все перспективные её части входят в другие подструктуры и учитываются алгоритмом.

9. Точка  $X_p$  в списке точек с минимальным значением функции  $F_p$  и есть решение задачи.

**Решение водных задач методом Фибоначчи.** Задача выбора эксплуатационного расхода  $Q_{НС}$  головной насосной станции крупной оросительной системы, обслуживающей большое число полей севооборота, решается с помощью одномерного поиска оптимума Фибоначчи. При каждом назначаемом значении головного расхода для определения значения целевой функции проводится вычислительный эксперимент, заключающийся в решении задачи укомплектования графика гидромодуля. Возможны условия, когда эксплуатация оросительной системы требуют двух – трех периодов в вегетационный сезон с разными значениями головного расхода. В этом случае для решения задачи используется двух-трехмерное обобщение поиска оптимума Фибоначчи. Задача калибровки гидравлической модели реки может быть решена методом Фибоначчи [15] при условии сравнительно небольшого числа калибруемых переменных, многие из которых являются обобщенными переменными, т.е. относятся к группам створов (Д.А. Никифоров предложил другое решение задачи – метод условного градиента, дал технологию калибровки).

Увязку сбросных объемов оперативного управления водохранилищами верхней части реки с возможностями рационального их использования в низовьях очень удобно проводить методом Фибоначчи в трех или четырехмерном пространстве этих переменных, тем более, что практика всегда дает максимальные и минимальные их значения. Единственная трудность заключается здесь в том, что не всегда можно подобрать режим работы водохранилищ верхней части реки строго по заданным сбросным объемам. В этих случаях следует принимать приближенные решения, которые будут уточняться при сужении вариантов поиска. Решение задачи выбора рационального варианта технических мероприятий и сооружений удачно вписывается в метод поиска Фибоначчи. Решение

ведется по вариантам водохранилищ и коэффициенту зарегулированности стока. Таких вариантов в реальной задаче немного.

В процессе поиска решений задач методом Фибоначчи целесообразно использовать любые эвристические соображения относительно получаемых значений в результате экспериментов. Метод Фибоначчи является сравнительным методом: направление дальнейшего поиска и новые эксперименты намечаются по данному методу путем сравнительной оценки выполненных экспериментов, зачастую, нет необходимости знать точные их значения. Лишь по мере сужения поиска и приближения к окончательному результату надо выполнять эксперименты полностью.

**Гарантированное число экспериментов.** Минимальное число вычислительных экспериментов, гарантирующих в  $m$ -мерном пространстве выбор точки оптимума за  $N$  шагов при условии рассмотрения на каждом шаге лишь полностью перспективной области, содержащей точку текущего минимума среди всех проведенных уже вычислительных экспериментов, и отсечения всех других областей возможно перспективных и запрещенных, равно для  $m$ -кубов  $K_{\Pi} = (2^m - 1)N_{\Pi} + 1$ , для  $m$ -симплексов  $K_{\Delta} = mN_{\Delta} + 1$ . Однако эта оценка есть крайняя нижняя граница оценок, поскольку при сколько-нибудь вытянутых множествах  $\{X\}$ :  $F(X) \leq F^*$  квазивыпуклой функции  $F$  в процессе разбиения вычислительных структур на меньшие необходимо рассматривать все незапрещенные области. При условии рассмотрения всех полностью перспективных и частично перспективных областей, при одной запрещенной в каждой рассматриваемой вычислительной структуре, общее число экспериментов можно оценивать для  $m$ -кубов  $K_{\Pi} = (2^m - 1)N_{\Pi} + 1$ , для  $m$ -симплексов  $K_{\Delta} = mN_{\Delta} + 1$ . Эта грубая оценка числа экспериментов не учитывает выбрасывание структур, попадающих в запрещенные области, это верхняя граница оценок. Реальное число экспериментов ближе к данной выше нижней границе оценок.

Указать точно гарантированное необходимое число экспериментов в общем виде многомерной задачи невозможно в отличие от одномерной оптимизации. Число экспериментов и выбор  $m$ -кубов или  $m$ -симплексов для решения задачи зависит от свойств функции  $F$ . При оценке числа вычислительных экспериментов и выборе вида структур для оптимизации следует учитывать, что при примерно равных начальных размерах  $L_{\Pi} \approx L_{\Delta}$  требуемое число шагов  $N_{\Pi} < N_{\Delta}$ , но число экспериментов при сужении структуры  $m$ -куба больше, чем при сужении  $m$ -симплекса.

**Метод Фибоначчи и симплексный метод Нелдера-Мида.** Метод многомерного поиска Фибоначчи сравнивался с симплексным методом прямой оптимизации Нелдера-Мида [2]. Известны исследования этого метода с использованием специальных функций Розенброка и Химмельблау [см. Википедия]. Для изучения метода Фибоначчи здесь предлагается функция  $F(x,y)$  в неявном виде (для двухмерного случая):

$$[ab \times F(x - \chi, y - \gamma)]^2 = b^2 \left[ \begin{aligned} & a^2 \left[ (x - \chi) \sqrt{1 - \lambda^2} - (y - \gamma) \lambda \right]^2 + \\ & \left[ (x - \chi) \lambda + (y - \gamma) \sqrt{1 - \lambda^2} \right]^2 - \\ & \left[ (x_0 - \chi) \lambda + (y_0 - \gamma) \sqrt{1 - \lambda^2} \right] \times (1 - F(x - \chi, y - \gamma)) \end{aligned} \right]^2 \quad (8)$$

Функция  $F(x,y)$  легко изобразить изолиниями равных значений  $F^*$ , что представляют собой систему вложенных друг в друга эллипсов. Минимум функции  $F(x_0,y_0)=0$ . Систему эллипсов функции  $F(x,y)=F^*$  можно представить изначально лежащую «на боку» по горизонтальной и вертикальной осям  $Ox'', Oy''$ . На рис. 7 показаны полуоси для эллипса  $F^*=1$ . Вся эта система в координатах  $Ox'', Oy''$  поворачивается на некоторый угол  $\alpha$  против часовой стрелки в новых координатах  $Ox', Oy'$ . Если обозначить  $-1 \leq \lambda = \cos \alpha \leq 1$ , то  $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \lambda^2}$  и  $\text{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda}$ . Пусть точка  $x_0, y_0$  помещена в первый квадрант, тогда  $0 \leq \lambda \leq 1$  и  $+\sqrt{1 - \lambda^2} \geq 0$ . Наконец, центр эллипсов переносится в точку  $\chi, \gamma$  первого квадранта в системе  $Ox, Oy$ . Давая параметрам  $a, b, \lambda, x_0, y_0, \chi, \gamma$  разные значения можно вытягивать, поворачивать систему эллипсов, помещать координаты минимума функции от середины эллипсов к концу, сдвигать все в  $Ox, Oy$ . Функция  $F(x,y)$  квазивыпуклая.

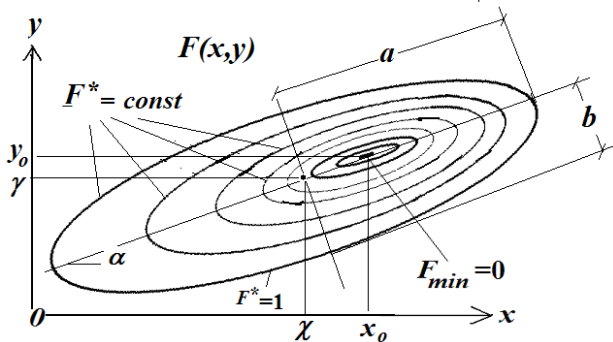


Рис. 7. Система эллипсов равных значений минимизируемой функции

Сравнительные исследования поиска минимума  $F(x,y)$  проводились с помощью программных вычислений. Программы (Turbo Pascal-7) обслуживали вычисления по методам Фибоначчи для 2-кубов и 2-симплексов и двухмерным симплексом Нелдера-Мида. Не погружаясь в детальный рассказ

о сравнительном анализе, сформулируем результаты. Однозначно ответить на вопрос о предпочтении того или иного метода сложно. При заданной точности решения число вычислительных экспериментов в методе Нелдера-Мида сильно зависит от положения начальных экспериментов и свойств функции  $F(x,y)$ . Для методов Фибоначчи такая зависимость меньше. В ряде примеров метод Нелдера-Мида давал меньшее число экспериментов, в других примерах наоборот. Оказалось, что метод Фибоначчи по симплексам обеспечивает меньшее число экспериментов, если требуемая относительная точность расчета небольшая, т.е. при малом числе экспериментов, наоборот, при большом их числе лучше использовать метод по кубам. Метод Фибоначчи существенно использует свойство квазивыпуклости функции  $F(x,y)$  и может быть развит на основе дополнительных знаний о функции в отношении выявления запрещенных областей. Метод Нелдера-Мида не требует квазивыпуклости и применим к функциям более широкого вида, но его эффективность необходимо обосновывать.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

**Доказательство утверждения 1.** Предположим, что именно внутри запрещенной области, как она определена в утверждении (см. рис. 8), лежит точка минимума функции  $F_{\min}=F(X_{\min})$ . Проведем прямую из точки  $X_{\min}$  через  $X_1$  до пересечения в некоторой точке  $X'$  с  $(m-1)$ -мерной гиперплоскостью, проведенной по точкам  $X_2, \dots, X_{m+1}$ . Такая точка пересечения найдется, поскольку вектор  $\frac{X_2 - X_{\min}}{X_2 - X_1, X_3 - X_1, \dots, X_{m+1} - X_1}$  находится внутри векторов  $\frac{X_2 - X_{\min}}{X_2 - X_1, X_3 - X_1, \dots, X_{m+1} - X_1}$ , пересекающихся с гиперплоскостью  $\{X_2, \dots, X_{m+1}\}$  именно в этих точках (точнее внутри выпуклой оболочки  $(m-1)$ -гиперплоскостей на указанных векторах). На основании леммы 1 (см. ниже)  $F(X') \leq \max\{F(X_2), \dots, F(X_{m+1})\} < F(X_1)$ . Но тогда на отрезке  $X' - X_1 - X_{\min}$  имеем  $F(X') < F(X_1) > F(X_{\min}) = F_{\min}$ , что противоречит свойству квазивыпуклости  $F$ , так как на любом отрезке  $X'' - X - X'''$  справедливо:  $F(X) \leq \max\{F(X''), F(X''')\}$ .

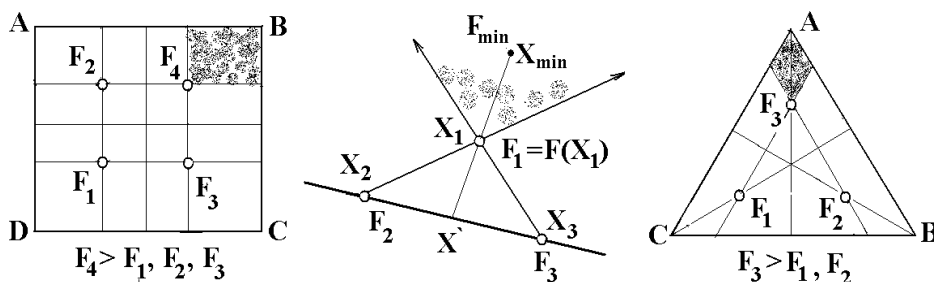


Рис. 8. К доказательству невозможности точки минимума в запрещенной области

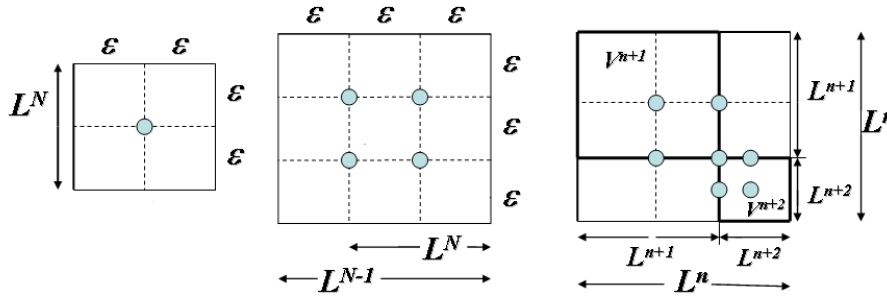
**Лемма 1.** На  $k$ -гиперплоскости в  $m$ -мерном пространстве,  $k < m$ , даны точки  $X_p \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ,  $p = \overline{1, k+1}$ , никакие группы точек  $X_l$ ,  $l = \overline{3, k+1}$ , не лежат в  $(l-2)$ -гиперплоскости. Даны значения  $F_p = F_p(X_p)$  квазивыпуклой функции (при допустимых  $F^*$  множество  $X: F(X) \leq F^*$  выпукло). Для любой точки  $X$  на  $k$ -гиперплоскости внутри выпуклой оболочки точек  $X_p$ , т.е.  $(k-1)$ -гиперплоскости, образованные  $(k+1)$ -ми группами по  $k$  точек, справедливо:  $F(X) \leq \max\{F_p\}$ .

**Доказательство.** Если точка  $X$  лежит на одномерном отрезке между некоторыми точками  $X_1$  и  $X_2$ , то по квазивыпуклости  $F$  имеем  $F(X) \leq \max[F(X_1), F(X_2)]$ . Пусть теперь точка  $X$  лежит внутри треугольника  $X_1, X_2, X_3$ . Проведем из вершины  $X_1$  через  $X$  прямую, что пересекает основание  $X_2-X_3$  в точке  $X'$ . По предыдущему  $F(X) \leq \max[F(X_2), F(X_3)]$ , на отрезке же  $X_1-X'$  будет  $F(X) \leq \max[F(X_1), F(X')] \leq \max[F(X_1), F(X_2), F(X_3)]$ . Пусть уже свойство доказано для областей точек  $X_p$

$p = \overline{1, n}$  на всякой  $(n-1)$ -й гиперплоскости. Если точка  $X$  лежит внутри  $n$ -й гиперплоскости,  $X_p$ ,  $p = \overline{1, n+1}$ , то проведем из любой вершины, например  $X_1$ , прямую через  $X$  до пересечения с  $(n-1)$ -гиперплоскостью точек  $X_p$ ,  $p = \overline{2, n+1}$ , в  $X'$ . По предположению  $F(X') \leq \max[F(X_p), p = \overline{2, n+1}]$ . На отрезке  $X_1-X'$  имеем  $F(X) \leq \max[F(X_1), F(X')]$ , тогда  $F(X) \leq \max[F(X_p), p = \overline{1, n+1}]$ . Лемма доказана.

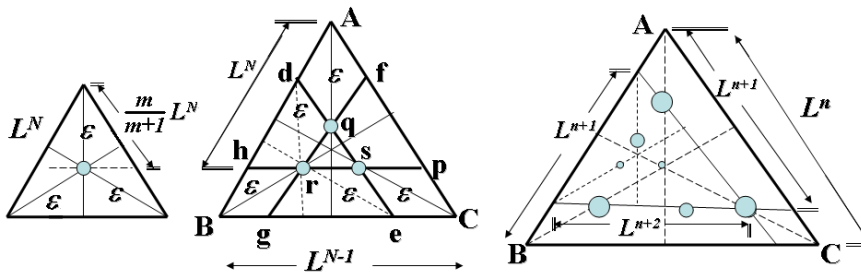
**ПРИЛОЖЕНИЕ 2.**

**Доказательство утверждения 2.** Будем вести рассуждения от конца процесса оптимизации. На последнем шаге единственная точка оптимума должна находиться в центре структуры размером, соответствующим точности выбора  $\pm \varepsilon$ . Назовем это структурой  $N$ -ого уровня выбора. Для  $m$ -мерного куба размер ребра структуры  $N$ -ого уровня равен  $L_m^N = 2\varepsilon$  по всем координатам независимо от  $m$  (рис. 9).



**Рис. 9.** Обоснование метода поиска оптимума Фибоначчи для  $m$ -мерных кубов

Для  $m$ -мерного симплекса размер ребра равен  $L_m^N = \sqrt{\frac{2(m+1)}{m}} \times \varepsilon$  (см. лемма 2). На рис. 10 на  $N$ -м уровне эксперимент предполагается в центре структуры в точке  $O$  и  $OA = OB = OC = \varepsilon$ .



**Рис. 10.** Обоснование метода поиска оптимума Фибоначчи для  $m$ -мерных симплексов

По соображениям многомерной геометрии для многомерного куба  $H_m = L_m$ , где  $H_m$  и  $L_m$  - высота и ребро куба, высота в центре куба делится пополам независимо от размерности. Для  $m$ -мерного,  $m > 1$ , симплекса  $H_m = \sqrt{\frac{(m+1)}{2m}} \times L_m$ ,  $H_m$  и  $L_m$  - высота и ребро симплекса, центр делит высоту в отношении  $m/(m+1)$  и  $1/(m+1)$  от вершины (лемма 2).

Поскольку известно, что при разбиении структуры  $(N-1)$ -го уровня на структуры  $N$ -го уровня, с которых мы начали рассуждения, граница разбиения проходит по точкам экспериментов (последний эксперимент в структуре  $N$ -го уровня это центр структуры), высота структуры  $(N-1)$ -го уровня равна полной высоте структуры  $N$ -го уровня плюс  $1/2$  часть от высоты для куба и  $1/(m+1)$  часть для симплекса. Всё это приводит к

размерам  $L_m^{N-1}=3\varepsilon$  ребра куба  $(N-1)$ -го уровня размерности  $m \geq 1$  (отрезок рассматривается как куб размерности  $m=1$ ). Размер высоты симплекса  $H_m^{N-1}=H_m^N \times (m+2)/(m+1)=\varepsilon(m+2)/m$ , так как  $H_m^N=\varepsilon(m+1)/m$  (рис. 9), размер ребра  $L_m^{N-1}=\sqrt{2\varepsilon} \times (m+2)/\sqrt{m(m+1)}$ . Отсюда отношение между линейными размерами  $L_m^N$   $N$ -й структуры и  $L_m^{N-1}$   $(N-1)$ -й структуры в  $m$ -мерном пространстве равно  $C_m^{N/N-1}=2/3$  для кубов и  $S_m^{N/N-1}=(m+1)/(m+2)$  для симплексов.

Далее, пусть проведена  $n$ -я итерация, рассмотрим разбиение  $n$ -й структуры на структуры  $(n+1)$ -го уровня. Для кубов справедливо:  $L_m^{(n)}=L_m^{(n+1)}+L_m^{(n+2)}$  (рис. 8), откуда  $C_m^{(n+1)/n}=1/[1+C_m^{((n+2)/(n+1))}]$ , что соответствует отношению последовательных чисел Фибоначчи,  $f_k=0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots, k=0, 1, 2, \dots$ , начиная от третьего и четвертого члена ряда. Действительно:  $C_m^{(N)/(N-1)}=2/3$ ,  $C_m^{(N-1)/(N-2)}=3/5$ ,  $C_m^{(N-2)/(N-3)}=5/8, \dots, =8/13, \dots$  т.е.  $C_m^{(n+1)/n}=f_{k-1}/f_k$ ,  $K=N-n+3$ . В пределе отношения равны числу «золотого сечения»  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_m^{((n+1)/n)} = \tau = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0.618$ . Для симплексов справедливо другое соотношение:  $S_m^{(n)}=2S_m^{(n+1)} - S_m^{(n+2)}$  (рис. 9), что приводит к  $S_m^{(n+1)/n}=1/[2 - S_m^{(n+2)/(n+1)}]$ . Отсюда  $S_m^{(N)/(N-1)}=(m+1)/(m+2)$ ,  $S_m^{(N-1)/(N-2)}=(m+2)/(m+3)$  и т.д. В общем виде  $S_m^{(n+1)/n}=(N-n+m+1)/(N-n+m+2)$ , зависит от размерности  $m$  и номера шага  $n$ .

**Лемма 2.** Высота  $H_m$   $m$ -мерного симплекса и длина  $L_m$  его стороны связаны соотношением  $H_m = \sqrt{(m+1)/2m} \times L_m$ . Высота  $m$ -мерного симплекса при пересечении высот в центральной точке делится в отношении  $m/(m+1) : 1/(m+1)$ .

**Доказательство.** Проводится по индукции (рис. 11). Известно, что в треугольнике  $m=2$ , высоты пересекаются в одной точке,  $H_2 = \sqrt{3}/2 \times L_2$  и  $h_2/d_2=1/2$ . Пусть для симплекса  $k$ -й размерности соотношения справедливы:

$H_k = \sqrt{(k+1)/2k} \times L_k$ ,  $h_k/d_k = 1/k$ . При  $m=k+1$  имеем из АВЕ (рис. 10 выполнено условно в трехмерной аксонометрии)  $H_m = \sqrt{L_m^2 - d_m^2}$ . ВCD симплекс  $k$  размерности,  $H_m = \sqrt{L_m^2 - [k/(k+1)]^2 H_k^2}$  и  $H_m = \sqrt{L_m^2 - [k/(k+1)]^2 [(k+1)/(2k)] L_k^2}$ , откуда  $H_m = L_m \sqrt{1 - k/[2(k+1)]} = \sqrt{(m+1)/(2m)} \times L_m$  так как  $L_k=L_m$ . Из ВОЕ, где О – центр пересечения высот симплекса, имеем  $d_k^2 + h_m^2 = d_m^2$ ,  $[H_k - H_m / (1+k)]^2 + h_m^2 = [H_m - h_m]^2$ , откуда, в виду доказанного  $H_m = \sqrt{(m+1)/(2m)} \times L_m$  получим соотношение деления высот в точке пересечения  $m/(m+1) : 1/(m+1)$ . То, что высоты  $m$ -симплекса пересекаются в одной точке центра, доказывается аналогично.

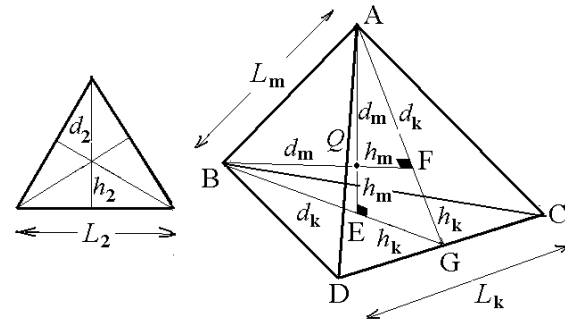


Рис. 11. Соотношение длин высоты и ребра в  $m$ -ом симплексе

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Багров, М.Н. Прогрессивная технология орошения сельскохозяйственных культур / М.Н. Багров, И.П. Кружжлин. – М.: Колос, 1980. 208 с.
2. Банди, Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь, 1988. 128 с.
3. Воробьев, Н.Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1978. 144 с.
4. Галямин, Е.П. Оптимизация оперативного распределения водных ресурсов в орошении. – Л., 1981. 271 с.
5. Гидрологические основы гидроэнергетики // Под ред. А.Ш. Резниковский и др. – М.: Энергоатомиздат, 1989. 263 с.
6. Данилов-Данильян, В.И. Управление водными ресурсами. Согласование стратегий водопользования / В.И. Данилов-Данильян, И.Л. Хранович. – М.: Научный мир, 2010. 232с.
7. Ефимов, Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. – М.: Наука, 1970. 528 с.
8. Кюнж, Ж.А. Численные методы в задачах речной гидравлики. Практическое применение / Ж.А. Кюнж, Ф.М. Холли, А. Вервей. - М.: Энергоатомиздат, 1985. 256 с.
9. Левит-Гуревич, Л.К. Рациональное управление водными ресурсами водохранилищ на примере Волжско-Камского каскада // Известия Самарского научного центра РАН. 2012. Том 14, №1(9). С. 2343-2354.
10. Левит-Гуревич, Л.К. Управление водными ресурсами водохранилищ // Водные ресурсы и качество вод: состояние и проблемы управления, под ред. В.И.Данилов-Данильян, В.Г. Пряжинская. Гл. 8 Управление водохранилищами. – М.: Институт водных проблем РАН, 2010. С. 364-391.
11. Левит-Гуревич, Л.К. Метод динамического программирования для выбора рационального водораспределения в дельте реки // Известия Самарского научного центра РАН. 2011. Том 13, № 1 (6). С. 1449-1456.
12. Левит-Гуревич, Л.К. Выбор перегораживающих сооружений в низовьях и дельтах рек // Сб. Современные проблемы стохастической гидрологии и регулирования стока. Труды Всероссийской научной конференции. – М.: ИВП РАН, 2012. С. 268-279.
13. Левит-Гуревич, Л.К. Схема динамического программирования с многомерной индикацией шагов / Л.К. Левит-Гуревич, Д.М. Ярошевский // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 23-40.

14. Левит-Гуревич, Л.К. Модификации метода динамического программирования для решения водохозяйственных задач // Вода и водные ресурсы: Системо-образующие функции в природе и экономике: сб. научных трудов. – Новочеркасск: ЮРГТУ (НПИ), 2012. С. 440-450.
15. Левит-Гуревич, Л.К. Многомерный поиск оптимума Фибоначчи и задачи калибровки гидравлических моделей рек // Международная конференция «Автоматизация управления и интеллектуальные системы и среды», 2010 г. Том III.– Нальчик: КБНЦ, 2010. С. 107-112.
16. Никифоров, Д.А. Калибровка цифровых компьютерных моделей для гидравлических расчетов рек и водохранилищ // Вода и водные ресурсы: Системо-образующие функции в природе и экономике: сб. научных трудов. – Новочеркасск: ЮРГТУ (НПИ), 2012. С. 454-461.
17. Плешков, Я.Ф. Регулирование речного стока. – Л., Гидрометеиздат, 1975. 560 с.
18. Пишеничный, Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. 313 с.
19. Розенфельд, Б.А. Многомерные пространства. – М.: Наука, 1966. 668 с.
20. Уайльд, Д.Дж. Методы поиска экстремума. - М.: Наука, 1967. 268 с.
21. Циприс, Д.Б. Классификация и сравнение критериев равномерности полива и задачи управления водным режимом поля / Д.Б. Циприс, С.М. Белинский // Водообороты систем в мелиорации и пути повышения эффективности их действия. – Л., 1979. С. 96-108.

## METHODS OF MULTI-DIMENSIONAL SYNTHESIS OF SEARCHING THE FIBONACCI OPTIMUM IN PROBLEMS WITH WATER RESOURCES

© 2013 L.K. Levit-Gurevich

Institute of Water Problems RAS, Moscow

The optimizing problems, connected with water resources: hydromodule choice, calibration of hydraulic model of river, rational water resources management of river on the example of Volga-Kama cascade and Volga delta, choice of rational option of technical actions on a water management area are considered. Problems possess common properties on required parameters and can be solved by only direct methods of optimization based on computing experiments. Large labor input of experiments forces to look for methods of decisions with a minimum of experiments. Multi-dimensional synthesis of searching the Fibonacci optimum belongs to such methods, his one-dimensional option is known. The algorithm, proofs, comparison with a simplex method of Nelder-Mead are given.

Key words: *hydromodule, hydraulic model, river, calibration, management, water resources, Fibonacci optimum, computing experiment, methods of direct optimization*