

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОЦЕНКИ МИКРОУСКОРЕНИЙ

© 2013 А.В. Седельников

Самарский государственный аэрокосмический университета имени академика С.П. Королева
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 12.04.2013

В работе представлены результаты численного моделирования микроускорений с использованием фрактальной модели. Решены два вида задач: оценка микроускорений на созданном КА и выбор параметров, реализующих заданный уровень микроускорений. Несмотря на приближенность представленных оценок, статистические методы позволяют заложить требуемую точность в проводимых расчётах. Ключевые слова: микроускорения, функция Вейерштрасса-Мандельброта, фрактальная размерность, масштабный параметр, гравитационно-чувствительные процессы.

Для решения задачи оценки микроускорений во внутренней среде КА воспользуемся следующими упрощающими предположениями [1]:

1. КА состоит из центрального тела сферической формы с жёстко прикреплёнными к нему упругими элементами.

2. Упругие элементы представляют собой однородные ортотропные пластины.

3. Модель движения КА – пространственное вращение вокруг центра масс.

4. Модель демпфирования колебаний – вязкое трение.

5. Отсутствует стохастическая зависимость между потенциальной энергией упругой деформации упругого элемента и уровнем создаваемых микроускорений.

Используя фрактальное свойство микроускорений, изложенное в [2] и заключается в определённом масштабировании КА (размеров центрального тела и больших упругих элементов, инерционно-массовых характеристик) с целью реализации фиксированного заранее заданного уровня микроускорений, можно построить фрактальную модель микроускорений, рассмотренную в [3]. Речь идёт о конструктивной составляющей микроускорений [1], порождаемой во внутренней среде КА колебаниями больших упругих элементов. Эти колебания возбуждаются при включении двигателя ориентации и управления движением КА (УРД). Схема расположения УРД показана на рис. 1.

Для численного анализа выберем КА, на которых проводились или планируется проведение гравитационно-чувствительных технологических процессов. Предполагаемые проектные параметры этих КА приведены в табл. 1.

Седейников Андрей Валерьевич, кандидат физико-математических наук, докторант кафедры конструкции и проектирования двигателей летательных аппаратов.
E-mail: axe_backdraft@inbox.ru

Для использования фрактальной модели и оценки с её помощью среднего значения микроускорений как случайного процесса [1]:

$$W(t) = MW + \frac{(M - \bar{M})R\mu}{I^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i} C_i \{ (l + s) [\operatorname{sh} k_i l - \operatorname{sin} k_i l - \alpha (-2 + \operatorname{ch} k_i l + \operatorname{cos} k_i l)] + \frac{1}{k_i} [\operatorname{cos} k_i l - \operatorname{ch} k_i l + \alpha (\operatorname{sh} k_i l + \operatorname{sin} k_i l)] \} \operatorname{cos}(\omega_i t) e^{-\beta t} \quad (1)$$

где MW – математическое ожидание $W(t)$, M_{0i} и \bar{M}_{0i} – соответственно момент, возникающий в заделке упругого элемента в корпус КА от собственных колебаний упругого элемента по i -й собственной форме и его среднее значение, R – радиус-вектор точки расположения технологического оборудования относительно центра масс, I – момент инерции КА, ω_i – собственная круговая частота колебаний i -й формы, а b_i – коэффициент затухания, который определяется формулой:

$$\beta_i = \frac{\delta_i \omega_i}{2\pi} = \delta_i \lambda_i, \quad (2)$$

где δ_i – логарифмический декремент, соответствующий i -й собственной форме.

Необходимо оценить обобщённый параметр z для каждого аппарата, используя формулу [4]:

$$z = \frac{100}{m_0 + \sum_{i=1}^N \mu_i l_i} \sum_{i=1}^N \mu_i l_i, \quad (3)$$

где m_0 – масса КА без учёта упругих элементов, μ_i – погонная масса упругого элементов, l_i – длина упругого элемента, N – число упругих элементов.

Тогда с помощью приближённых эмпирических зависимостей [4]:

$$b \approx 0,1 z, \quad (4)$$

$$D \approx 1,924567 + 0,0075432 M \quad (5)$$

можно оценить параметры действительной части фрактальной функции Вейерштрасса-Мандельброта (ФВМ), с помощью которой предлага-

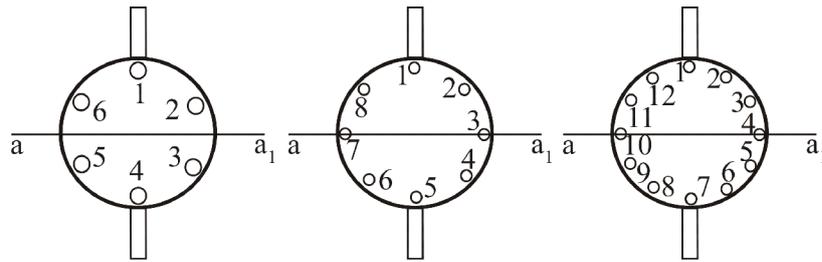


Рис. 1. Схема расположения УРД для моделирования

Таблица 1. Предполагаемые проектные параметры КА

Параметр	«Тяньгун-1»	«Фотон-М4»	«Макос-Т»	«Возврат-МКА»
Диаметр, м	3,35	2,6	2,5	1,5
Длина, м	10	3	5	2
Длина ПСБ, м	7,5	4	5	2
Масса, кг	8506	6535	7000-7400	500
Погонная масса ПСБ, кг/м	15	15	30	10
Момент УРД, Н·м	9-10	6	7	1
Максимальный осевой момент инерции, кг·м ²	70000	30000	32000	1500

ется аппроксимировать математическое ожидание микроускорений как случайного процесса [5]:

$$\text{Re } W(t) = C(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1 - \cos(b^n t)}{b^{(2-D)n}}$$

Для указанных в таб. 1 предполагаемых проектных параметров по формулам (3-5) были рассчитаны параметры фрактальной модели, которые представлены в табл. 2.

Теперь аппроксимация среднего значения микроускорений (первое слагаемое разложения (1)) с помощью ФВМ выглядит следующим образом [2]:

$$\bar{w} = 0,52723 + 0,08835 \cdot \bar{C}, \quad (6)$$

где \bar{w} – среднее конечного ансамбля реализаций микроускорений как случайного процесса, а \bar{C} – среднее ФВМ для фиксированного значения масштабного параметра b и фрактальной размерности D при изменении параметра t в диапазоне от 0 до 1. Так для космической станции типа «Тяньгун-1» эта аппроксимация показана на рис. 2а без учёта демпфирования в безразмерном времени, для которого $t = 0$ соответствует моменту выключения УРД, а $t = 1$ – моменту следующего включения УРД. На рис. 2б приведены первые 300 с среднего \bar{w} с

учётом демпфирования в виде модели вязкого трения. Речь идёт о точках, отстоящих от центра масс станции на расстоянии 1 м и максимальному значению момента М, соответствующему включению двигателя №1 на рис. 1.

Оценка первой собственной частоты колебаний по формуле для балки Эйлера-Бернулли:

$$\lambda = \frac{\eta^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad (7)$$

где L , μ и EI – соответственно длина, погонная масса и жёсткость упругого элемента; η – n -й корень уравнения: $\cos \eta \operatorname{ch} \eta + 1 = 0$; n – номер тона колебаний.

По формуле для однородной пластины:

$$\lambda_1 = \frac{3,52}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{D}{\gamma h}}, \quad (8)$$

где a , γ и h – соответственно длина, объёмная плотность и толщина пластины, а D – цилиндрическая жёсткость на изгиб:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)},$$

Таблица 2. Расчетные параметры фрактальной модели

Параметр	«Тяньгун-1»	«Фотон-М4»	«Макос-Т»	«Возврат-МКА»
z	2,65	1,84	4,11	7,41
Момент УРД, Н·м	9	6	7	2
Масштабный параметр b	0,265	0,184	0,411	0,741
Фрактальная размерность	1,992	1,970	1,977	1,940

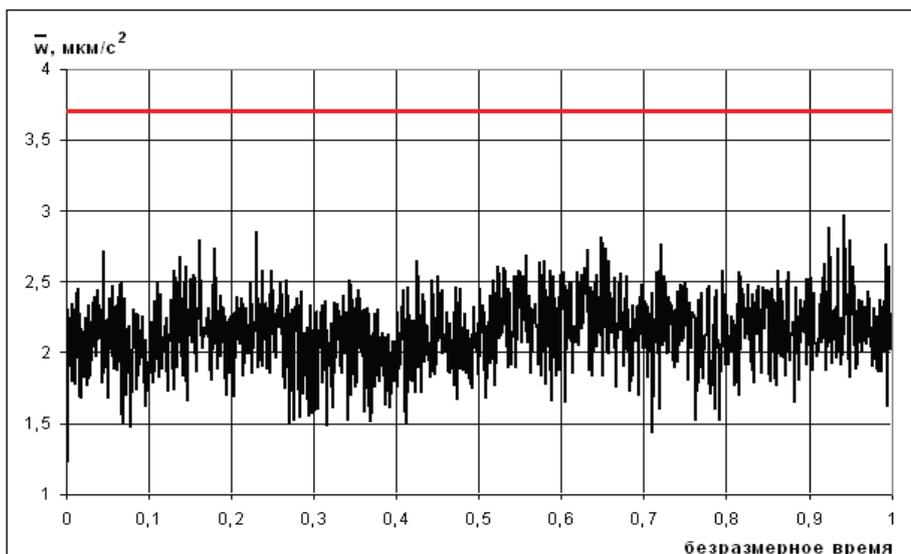


Рис. 2 а. Среднее значение микроускорений без учёта демпфирования для космической станции типа “Тяньгун-1”

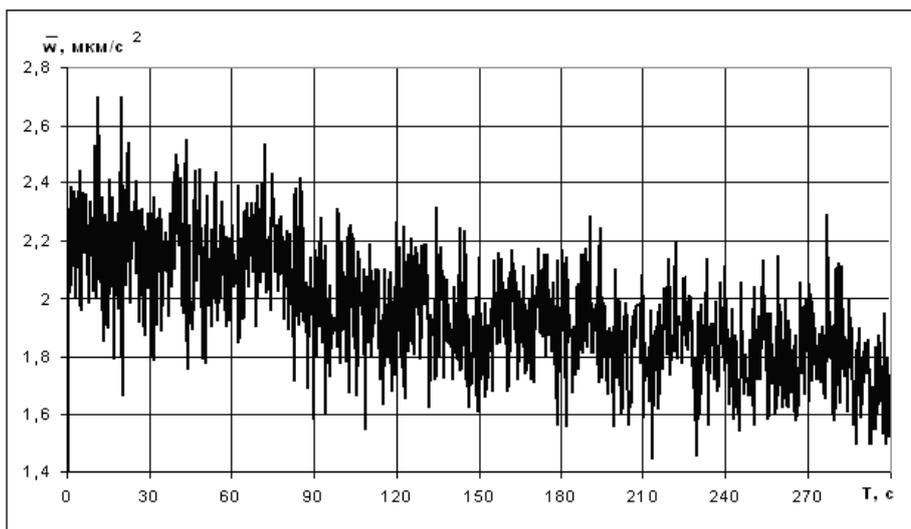


Рис. 2 б. Среднее значение микроускорений с учётом демпфирования для космической станции типа “Тяньгун-1”

где E – модуль Юнга, а σ – коэффициент Пуассона; в результате для материала МА2 значения собственных частот следующие: $\lambda_1 \approx 0,00642$ Гц и $\lambda_1 \approx 0,00762$ Гц соответственно. Тогда по формуле:

$$\beta_i = \frac{\delta_i \omega_i}{2\pi} = \delta_i \lambda_i, \quad (9)$$

где δ_i – логарифмический декремент, соответствующий i -й собственной форме. Легко оценить коэффициент затухания, считая $\delta_1 = 0,1$ [1]: $\beta_1 \approx 0,001$.

При справедливости гипотезы о нормальности закона распределения микроускорений в данной реализации, используя правило “трёх сигм”, можно утверждать, что с вероятностью 99,7% текущие значения микроускорений не превысят приблизительно 3,71 мкм/с². Это значение отмечено горизонтальной прямой на рис. 2 а.

Учтём случайность включения УРД, показанных на рис. 1. При включении разных двигателей проекция момента, участвующая в возбуждении колебаний упругих элементов, будет различной. Так при включении двигателя №1 она будет максимальной, а при включении двигателей №3 и 7 на средней схеме рис. 1 и двигателей №4 и 10 на правой схеме рис. 1 она будет нулевой. Следует также отметить, что среднее значение момента зависит и от расположения двигателей по ободу. Сместим линию, проходящую через двигатели №1 и 4 на левой схеме, двигатели №1 и 5 на средней схеме рис. 1 и двигатели №1 и 7 на правой схеме, на угол α от вертикали. Тогда зависимости средних значений проекции момента УРД, участвующей в возбуждении колебаний упругих элементов, и его дисперсии от угла α для представленных на рис. 1 схем расположения УРД показаны на рис. 3 и 4. Это явление

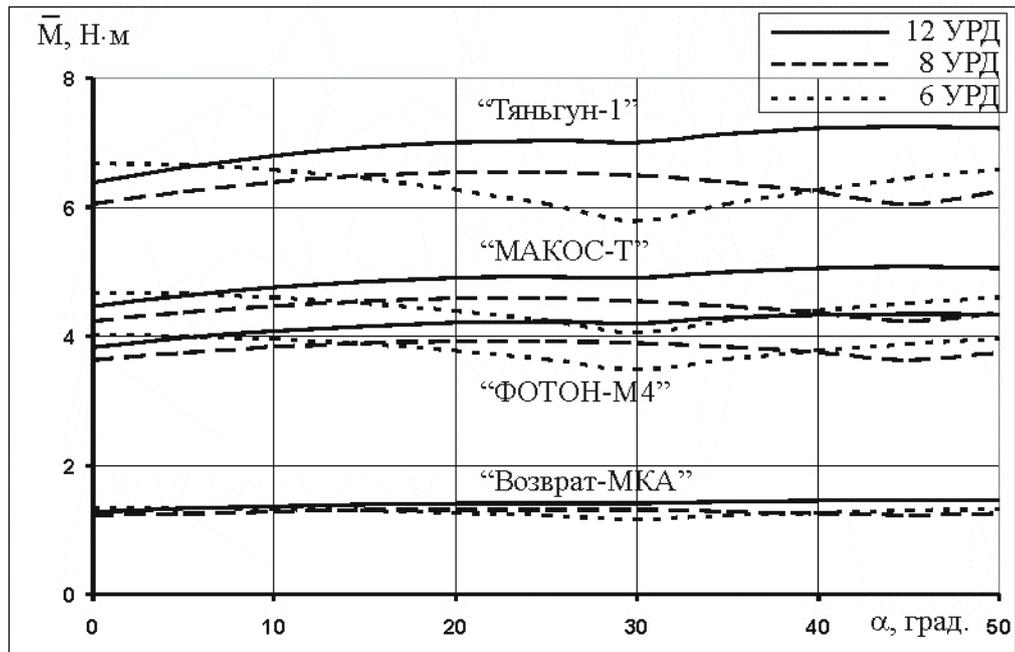


Рис. 3. Зависимость среднего значения проекции момента УРД, возбуждающей колебания ПСБ, от расположения двигателей

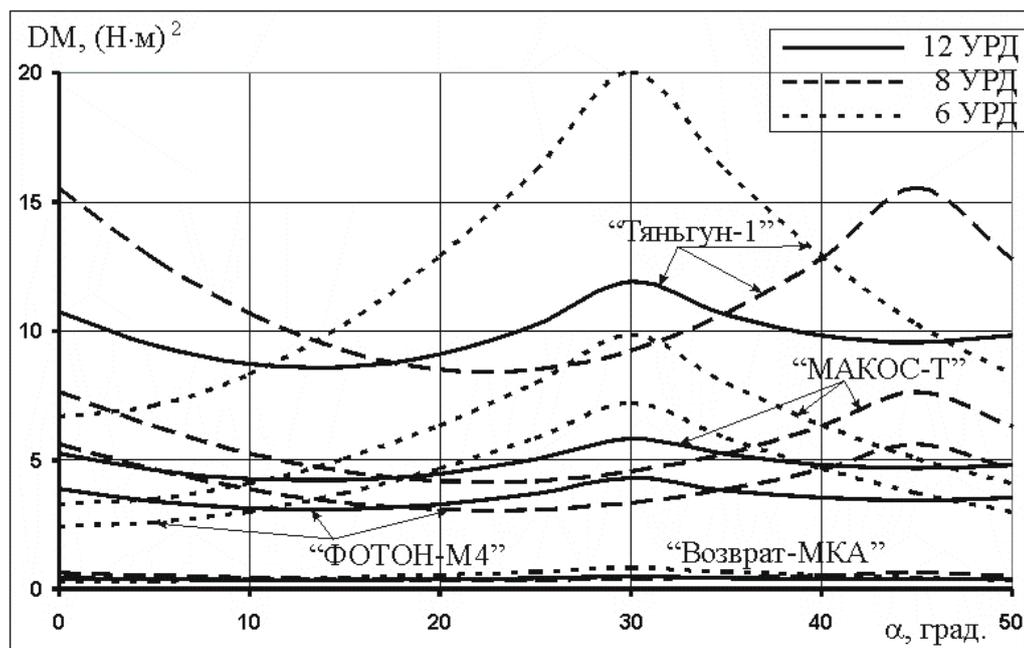


Рис. 4. Зависимость дисперсии проекции момента УРД, возбуждающей колебания ПСБ, от расположения двигателей

ние приводит и к разбросу фрактальной размерности (5) модели. Этот разброс представлен на рис. 5. Поскольку изменение расположения двигателей не повлияет на обобщённый параметр z , то масштабный параметр модели при этом останется неизменным. Это явление приводит к изменению максимального и среднего значений микроускорений внутри реализации (рис. 6). Несмотря на то, что, как видно из рис. 3 и 4, максимальная дисперсия проекции момента УРД, участвующей в возбуждении колебаний упругих элементов, соответствует минимальному среднему значению этой проекции.

Таким образом, можно сделать вывод о влиянии компоновки УРД на микроускорения в реализации. С помощью изменения расположения двигателей можно добиться минимально возможного среднего и максимального значений микроускорений, выполняя при этом задачу ориентации КА.

Для численного моделирования были использованы четыре различных космических проекта, часть исследовательской программы которых посвящено технологическим экспериментам. Проекты были выбраны таким образом, чтобы охватить все виды КА от космических станций ("Тянь-

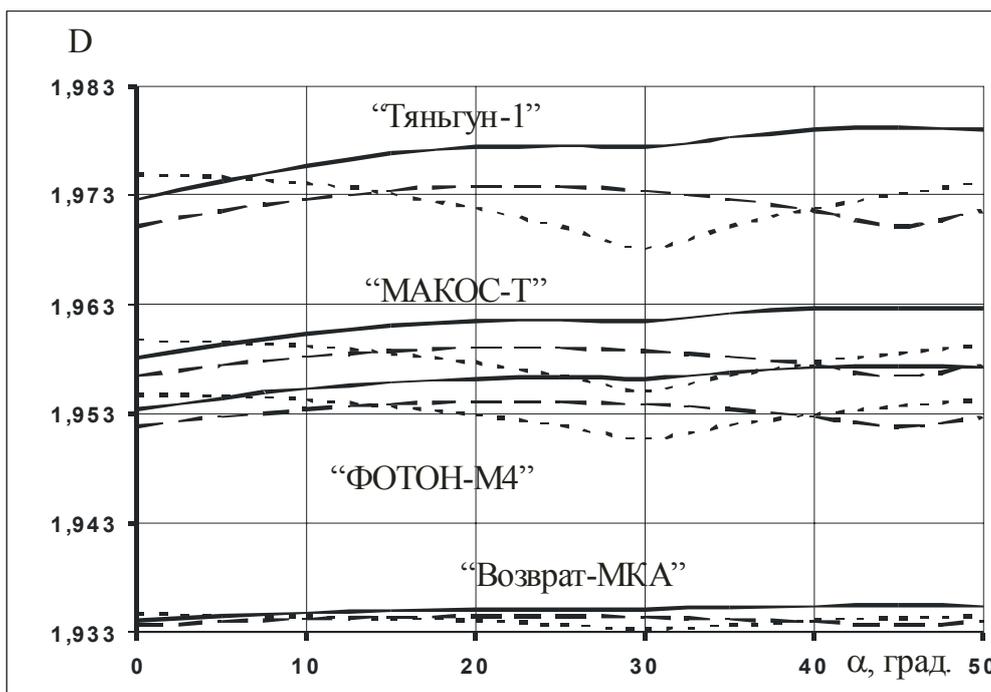


Рис. 5. Разброс фрактальной размерности D , связанный с разбросом параметров момента УРД как случайной величины

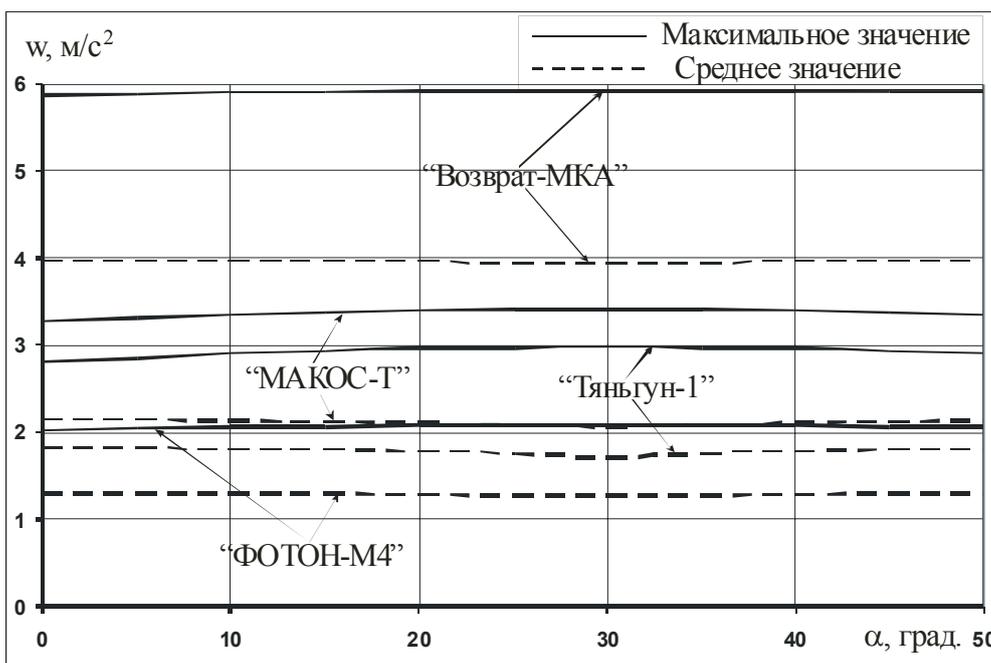


Рис. 6. Изменение среднего и максимального значений микроускорений, связанное с разбросом параметров момента УРД как случайной величины

гун-1”) до малых космических аппаратов (“Возврат-МКА”). Это определило большую разницу в массах и моменте УРД рассмотренных проектов (табл. 1). Следует заметить, что предложенная фрактальная оценка может быть использована для моментов УРД, не превышающих значение 10 Н м. В противном случае при $M > 10 \text{ Н}$ линейное упрощение (5) будет давать значения фрактальной размерности $D > 2$, что недопустимо для ФВМ, фрактальная размерность которой опре-

делена границами: $1 < D < 2$. В этом случае следует попытаться найти нелинейную оценку D через M вместо (5) [1]. Однако данное замечание не является существенным недостатком предложенной фрактальной оценки, поскольку значения $M > 10 \text{ Н}$ могут быть характерны для больших обитаемых космических станций, а не для специализированных автономных беспилотных космических лабораторий, для которых и предусмотрена эта оценка.

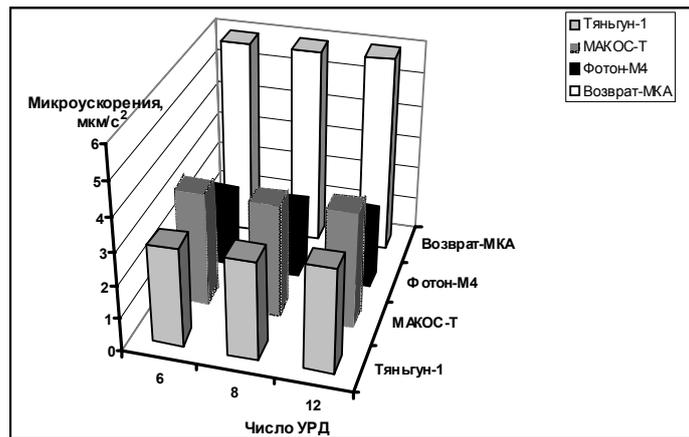


Рис. 7. Динамика предельного значения микроускорений для различных космических проектов

Численное моделирование показало, что не только традиционные конструктивные приёмы, такие как минимизация числа и размера больших упругих элементов, построение такой ККС, в которой реализовано размещение контейнеров с оборудованием как можно ближе к центру масс КА, установка демпфирующих устройств как на узлы крепления ПСБ к корпусу КА, так и технологического оборудования (микрогравитационная платформа) и др., способны снизить уровень микроускорений внутренней среды. В некоторых случаях оптимальное размещение УРД также является эффективным конструктивным приёмом. На рис. 7 показана динамика предельного значения микроускорений, выше которого в случае справедливости нормального закона распределения с вероятностью 99,7% не выйдет текущее значение микроускорений для рассмотренных проектов КА. Если для “Тяньгун-1” можно добиться снижения уровня микроускорений оптимизацией расположения УРД более, чем на 6% при абсолютном значении предельного уровня примерно 3 мкм/с², то для “Возврат-МКА” – менее, чем на 1% при абсолютном значении предельного уровня примерно 6 мкм/с².

На основании проведённых исследований можно сформулировать метод оценки микроускорений и динамики космической лаборатории технологического назначения с упругими элементами конструкции в следующем виде:

1. По заданным проектным значениям массы КА, погонной массы и длины ПСБ вычислить обобщённый параметр z с помощью (3).

2. По вычисленному значению обобщённого параметра z оценить значение масштабного параметра ФВМ b , используя приближённую зависимость (4).

3. По заданному проектному значению момента УРД M оценить фрактальную размерность ФВМ D с помощью приближённой зависимости (5).

4. На основе оценённых значений параметров ФВМ построить функцию как оценку среднего значения микроускорений без учёта демпфирования (рис. 2).

5. По заданным проектным параметрам ПСБ оценить собственные частоты колебаний всех учитываемых форм с помощью (7) для балочной схемы, (8) для однородной пластины или конечно-элементной модели.

6. С помощью справочных или экспериментальных данных для заданного материала каркаса ПСБ оценить логарифмический декремент по каждой учитываемой форме колебаний.

7. По рассчитанным значениям логарифмических декрементов вычислить коэффициенты затухания по каждой учитываемой форме колебаний с помощью (9).

8. С помощью зависимости (6) оценить математическое ожидание микроускорений как случайного процесса, используя также проектные параметры и ранее вычисленные величины.

Построенный метод может быть использован для оценки микроускорений на спроектированном КА. В случае несоответствия оценённого уровня микроускорений требуемому, необходимо оптимизировать параметры КА, влияющие на динамику вращательного движения КА вокруг центра масс, с целью снижения микроускорений. Оптимизацию следует проводить с учётом требований к ориентации КА, а также его энерговооружённости.

Таким образом, в работе показано применение фрактальной модели оценки среднего значения микроускорений для четырёх космических проектов, выявлено влияние расположения двигателей УРД относительно больших упругих элементов на среднее значение создаваемых микроускорений, а также построен метод оценки среднего значения с помощью фрактальной модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седельников А.В.* Микроускорения: от осознания до фрактальной модели. М.: РАН. Избранные труды Российской школы по проблемам науки и технологий, 2010. 106 с.
2. *Sedelnikov A.V.* Fractal quality of microaccelerations // *Microgravity Sciences and Technology*. 2012. V. 24. № 5. Pp. 345-350.
3. *Седельников А.В., Серпухова А.А.* Фрактальная модель микроускорений: физический аспект // *Известия Самарского научного центра РАН*. 2009. Т. 11. №5. С. 185-191.
4. *Седельников А.В.* К вопросу выбора обобщённого параметра упругих конструкций космического аппарата для построения фрактальной модели микроускорений // *Изв. Вузов Авиационная техника*. 2008. №1 С. 63-65.
5. *Sedelnikov A.V.* Modelling of microaccelerations with using of Weierstass-Mandelbrot function // *Actual problems of aviation and aerospace systems*. 2008. № 1(26). Ph. 107-110.

USING FRACTAL MODELS TO ASSESS THE ACCELERATIONS

© 2013 A.V. Sedelnikov

Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolyov
(National Research University)

The results of numerical modeling of microgravity using a fractal pattern. Solved two types of tasks: evaluation on a set of spacecraft accelerations and choices that implement a given level of micro-accelerations. Despite the proximity of submitted estimates, statistical methods can lay the required precision in the calculations carried out.

Keywords: microaccelerations, Weierstrass-Mandelbrot fractal dimension, scale parameter, graivtatsionno-sensitive processes.