

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ С ГРАНЯМИ КЛИНОВИДНОЙ ПЛАСТИНЫ

© 2013 Х.Б. Толипов

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет), г. Челябинск

Поступила в редакцию 08.10.2012

Рассмотрена теоретическая модель распространения поверхностных волн в остроугольном клине. При этом неизвестные параметры в акустических уравнениях раскрываются на основе приближенного решения уравнений движения и граничных условий. Полученное решение позволяет в рамках акустики выявить новые особенности, характерные при распространении этих волн в клине. Ключевые слова: неоднородная волна, интерференция, клиновидная пластина, волновое поле, теория упругости.

Известно [1], что по своей структуре поверхностная волна Рэлея представляет неоднородную волну, в которой смещения затухают по мере удаления от поверхности, по которой распространяется волна. При этом пространственная структура и параметры волны в процессе движения остаются неизменными.

Распространение этой волны в клиновидной пластине имеет совершенно иной характер. При движении волны Рэлея по поверхности одной грани клина в направлении ребра при углах раствора $\varphi_0 < 90^\circ$ происходит изменение, как амплитуды, так и ее скорости.

Причина этого феномена кроется в том, что при движении волны изменяются условия распространения: смещения частиц вблизи одной грани клина в какой-то момент времени начинают достигать противоположной грани. Взаимодействие с поверхностью второй грани клина обуславливает расщепление движущейся волны на независимые поверхностную и объемную компоненты [2]. Энергия распространяющейся волны начинает уменьшаться, т.к. объемные волны, оттекающие с поверхности вглубь среды, уносят с собой часть энергии.

Также изменяется структура волны: при взаимодействии с поверхностями обеих граней клина происходит расщепление исходной волны Рэлея на независимые симметричную и антисимметричную моды.

Следовательно, при распространении волны Рэлея в клине в некоторой области, прилегающей к ребру, имеет место потеря ее устойчивости (стационарности). При этом возникает особый тип поверхностной волны, сопровождающийся в ходе движения непрерывной перестройкой акустического поля и излучением объемных волн.

*Толипов Хорис Борисович, кандидат технических наук, доцент кафедры общей и экспериментальной физики.
E-mail: thb@susu.ac.ru*

Рассмотрим в рамках плосковолновой модели подход, позволяющий определить изменяющиеся в ходе движения параметры волны.

Малые возмущения, распространяющиеся вдоль поверхности и состоящие из продольных и поперечных компонент, можно найти из стандартных уравнений акустики

$$\Delta U_\ell + k_\ell^2 U_\ell = 0, \Delta U_t + k_t^2 U_t = 0. \quad (1)$$

Введение продольного и поперечного потенциалов, связанных со смещениями продольных U_ℓ и поперечных U_t волн соотношениями $U_\ell = \text{grad } \Phi, U_t = \text{rot } \Psi$ и позволяющее перейти от векторных уравнений к скалярным, преобразует систему (1) к виду:

$$\Delta \Phi + k_\ell^2 \Phi = 0, \Delta \Psi + k_t^2 \Psi = 0. \quad (2)$$

В двумерной геометрии потенциалы зависят только от двух пространственных координат x, z и от времени t и решение (2) ищем в виде:

$$\begin{aligned} \Phi &= A \exp(ik_r x - i\omega t + iq_r z), \\ \Psi &= Ap \exp(ik_r x - i\omega t + is_r z). \end{aligned}$$

В выражениях (3) величины q_r, s_r , имеющие смысл коэффициентов спада амплитуды смещений с удалением от границы, определяются равенствами:

$$q_r = \sqrt{k_r^2 - k_\ell^2}, s_r = \sqrt{k_r^2 - k_t^2},$$

а коэффициент p , выражающий связь между потенциалами, соотношением:

$$p = -i\sqrt{q_r / s_r}.$$

В этих формулах k_t, k_ℓ, k_r - соответственно волновые числа продольных, поперечных и исковых волн, ω - круговая частота.

Амплитуда смещений A задается источником возбуждения и считается величиной известной, а определяемым параметром является волновое число k_r . Для его нахождения дополнительно используются стандартные граничные условия [1].

В классическом случае скорость волны, определяемой из соотношения $\mathbf{V} = \omega / \mathbf{k}_r$ и начальная амплитуда смещений A являются величинами конечными и неизменными в ходе движения волны.

Для среды клиновидной формы ситуация совершенно другая. В ходе движения волны изменяются скорость и амплитуда смещений, зависимости которых от координат неизвестны, и решить уравнения (2) для функций Φ и Ψ не представляется возможным. Однако при медленном изменении этих величин в пределах локальной длины волны можно воспользоваться приближенными методами. На малых интервалах изменения \mathbf{x} и \mathbf{t} , решения общего вида можно рассматривать как состоящие из элементарных решений, зависимости которых имеют вид:

$$\Phi(x) = A_0 \exp[ik(x)x - i\omega t],$$

$$\Psi(x) = A_0 p \exp[ik(x)x - i\omega t].$$

Волновое число в этих соотношениях выражается в комплексном виде: $k(x) = k_1(x) + ik_2(x)$, где действительная часть этого числа характеризует скорость волны: $V(x) = \omega / k_1(x)$, а мнимая – амплитуду: $A(x) = A_0 \exp[-k_2(x)]$.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

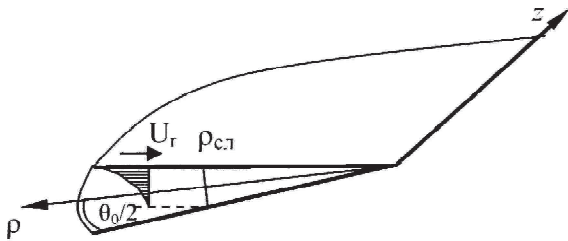


Рис. 1. Система координат (U – падающая волна)

Рассмотрим теоретическую модель распространения волны Рэлея из бесконечности перпендикулярно к ребру клина. Для решения задачи воспользуемся цилиндрической системой координат (Рис.1), которая приводит уравнения (2) к виду:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + k_r^2 \Phi = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + k_r^2 \Psi = 0, \quad (4)$$

и дополним стандартными граничными условиями, выражающими отсутствие напряжений на поверхностях клина:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\rho\theta} = 0, \text{ при } \theta = \pm \theta_0. \quad (5)$$

Решения (4) целесообразно искать в виде комбинаций функции Ханкеля первого рода:

$$\Phi = [A_0 H_{v_1}^{(1)}(k_r \rho) \cos(v_1 \theta) + C_0 H_{v_1}^{(1)}(k_r \rho) \sin(v_1 \theta)],$$

$$\Psi = [A_1 H_{v_2}^{(1)}(k_r \rho) \sin(v_2 \theta) + C_1 H_{v_2}^{(1)}(k_r \rho) \cos(v_2 \theta)], \quad (6)$$

поскольку эти функции удовлетворяют условию погашения, т.е. обращаются в нуль при бесконечном значении комплексного аргумента.

В этих формулах v_1, v_2 – угловые волновые числа, которые предполагаем медленно изменяющимися на локальной длине волны.

Как известно [3], компоненты тензора напряжений в криволинейной системе координат имеют вид:

$$\sigma_{\rho\theta} = \mu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} - \frac{U_\rho}{\rho} \right),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \left(\frac{U_\rho}{\rho} + \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + 2\mu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_\rho}{\rho} \right).$$

Если использовать связь смещений с потенциалами:

$$U_\rho = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad U_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \rho},$$

то соотношение (7) в терминах волновых потенциалов можно переписать в виде:

$$\sigma_{\rho\theta} = \mu \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \theta^2} \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu \left[-\frac{k_r^2}{2} \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} \right) \right].$$

Подстановка выражений (6) в граничные условия (5) приводит к системе однородных алгебраических уравнений. С учетом соотношений для цилиндрических функций [4]:

$2vZ'_v(z) = zZ_{v-1}(z) - zZ_{v+1}(z), \quad 2Z'_v(z) = -Z_{v-1}(z) - Z_{v+1}(z)$, определители полученной системы уравнений принимают компактный вид:

$$\frac{H_{v_1}^+ - 2 \left(\frac{k_r^2}{k_r^2} - 1 \right) H_{v_1}(k_r \rho)}{H_{v_1}^- H_{v_2}^-} H_{v_2}^+ - \left[\frac{th v_2 \theta}{th v_1 \theta} \right]^m = 0, \quad (10)$$

$$H_{v_j}^\pm(x_j) = H_{v_j-2}^{(1)}(x_j) \pm H_{v_j+2}^{(1)}(x_j), \quad j = 1, 2, \\ x_1 = k_r \rho, \quad x_2 = k_r \rho, \quad m = \pm 1,$$

и имеют смысл дисперсионных соотношений для симметричной ($m = 1$) и антисимметричной ($m = -1$) мод поверхностной волны. Штрихами в этих формулах помечены производные цилиндрических функций по координате.

Для вычисления полученных комплексных дисперсионных уравнений для функций Ханкеля применим асимптотические выражения Лангера [4], которые для произвольного $n \gg 1$ дают в интервале $0 < z < \infty$ равномерные представления:

$$H_v^{(1)}(z) \approx \sqrt{\lambda} e^{-i\frac{2\pi}{3}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(i\nu\omega\lambda),$$

$$\omega = \sqrt{1 - \frac{z^2}{\nu^2}}; \quad \lambda = \frac{1}{\omega} \operatorname{Artn}(\omega) - 1, \quad (11)$$

и далее используя (11) и известную асимптотику Ханкеля [4]:

$$H_v^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[-i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

окончательно получим:

$$H_{\nu_1}^{(1)}(k, \rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k \rho}} \exp\left[-ik\rho - i\nu_1 \operatorname{Artn}\left(\frac{\nu_1}{k\rho}\right)\right],$$

$$H_{\nu_2}^{(1)}(k, \rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k \rho}} \exp\left[-ik\rho - i\nu_2 \operatorname{Artn}\left(\frac{\nu_2}{k\rho}\right)\right], \quad (12)$$

где связи волновых величин k, η, ν между собой выглядят следующим образом

$$kr = \sqrt{\nu^2 - k_t^2 r^2} = \sqrt{\eta^2 - k_t^2 r^2}.$$

Расчет показал, что решение этой задачи существует только при комплексных значениях вектора k . Следовательно, для удовлетворения условия отсутствия напряжений на поверхностях граней клина, волновой вектор k должен принимать комплексные значения, что соответствует физическим представлениям. В предельном случае $\rho \rightarrow \infty$ получается асимптотическое решение Рэлея, согласующееся с экспериментальными наблюдениями.

Кривые дисперсии фазовой скорости, рассчитанные по формуле (10), представлены на рис. 2. Отметим особый характер пространственных зависимостей скоростей этих мод. С приближением к ребру до точки $\rho_{ст}$ имеем устойчивое стационар-

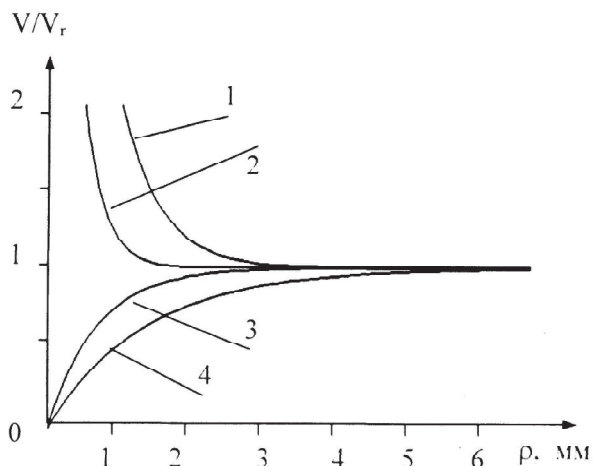


Рис. 2. Зависимость относительной скорости волны от расстояния до ребра для симметричных (1 и 2) и антисимметричных (3 и 4) углов клина: 1 и 3 – для $\theta_0 = 3^\circ$; 2 и 4 – для $\theta_0 = 5^\circ$

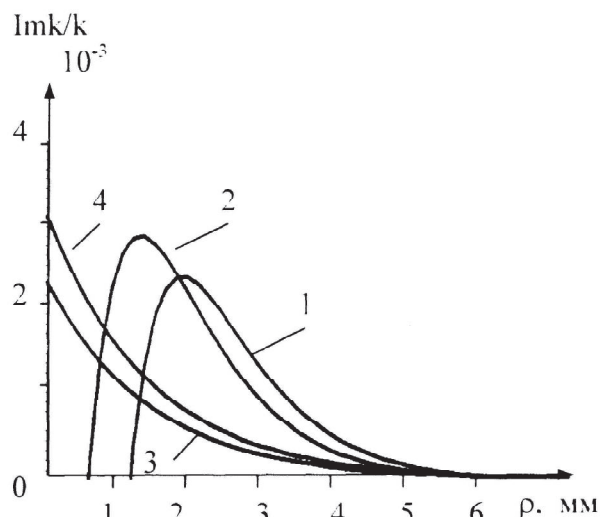


Рис. 3. Зависимость коэффициента затухания волны от расстояния до ребра для тех же углов клина

ное распространение поверхностной волны, а после этой точки происходит потеря устойчивости, сопровождающаяся возникновением двух мод. При этом оказывается, что скорости распространения этих мод при приближении к ребру будут изменяться различным образом. Скорость симметричной моды стремится к скорости продольной волны, а антисимметричной – к нулю. Схожая картина наблюдается в плоскопараллельной пластине при монотонно уменьшающейся толщине [1]. Волновой вектор выражается в комплексном виде, состоящий из двух слагаемых: $k = k_1 + ik_2$. Множитель $\exp(-k_2 \rho)$ в соотношении (12) определяет затухание волн, монотонно возрастающее с приближением к ребру (рис. 3).

Рассмотренные особенности возникают в области, протяженность которой очень резко зависит угла раствора клина (рис. 4). Так, например, при изменении угла от 5° до 25° эта область сокращается в 10 раз.

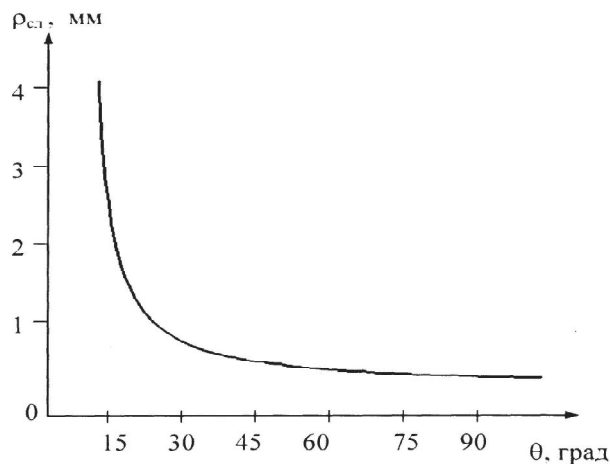


Рис. 4. Зависимость протяженности области “неустойчивого распространения” волны от угла клина

Таким образом, анализ акустических характеристик поверхностной волны в клине, проведенной в рамках классического подхода, приводит к выводу о том, что исследования выявили особый тип поверхностных волн, сопровождающийся в ходе движения непрерывной перестройкой акустического поля. Отметим также, что представленная модель позволяет понять физические процессы, происходящие при распространении поверхностной волны в остроугольном клине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Викторов И.А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука. 1966. 165 с.
2. *Гуревич С.Ю., Толитов Х.Б.* Особенности дифракции поверхностных волн на ребре клине // ПМТФ. 2003. №. 5. С.161–168.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.
4. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. С. 225.

SOME FEATURES OF THE NONLINEAR INTERACTION OF SURFACE WAVES WITH A WEDGE-SHAPED EDGES OF THE PLATE

© 2013 Kh.B. Tolipov

South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk

A theoretical model of propagation of a surface wave in an acute-angled wedge is considered. Thus unknown parameters in the acoustic equations are revealed on the basis of approximate solution of equations of motion and boundary conditions. The received solution allows revealing in the framework of acoustics new features, characterizing propagation of these waves.

Keywords: nonlinear wave, interference, wedge-shaped plate, the wave field, the theory of elasticity.