УДК 532.517.2

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В АППАРАТЕ С МЕХАНИЧЕСКОЙ МЕШАЛКОЙ

© 2013 Н.А. Газизуллин

Казанский национальный исследовательский технологический университет

Поступила в редакцию 09.03.2013

С помощью итерационной процедуры на основе алгоритма SIMPLE проведено численное моделирование конвективного теплообмена в аппарате с механической мешалкой. Результаты расчетов представлены в виде линий тока вторичной циркуляции жидкости и изотерм.

Ключевые слова: аппарат, мешалка, перемешивание, жидкость, циркуляция, теплопередача

Аппараты с мешалками широко используются в ряде отраслей промышленности при проведении различных технологических процессов[1-3]. Перемешивание в жидких средах оказывает влияние на теплообменные и массообменные процессы, а также на результаты химических процессов. Исследование теплообмена в аппаратах с мешалками представляет интерес как для выявления теоретических закономерностей, описывающих изменение температурного поля по объему аппарата, так и в связи с широким спектром технологического применения этих аппаратов. В настоящей работе проведено численное моделирование конвективного теплообмена в аппарате с лопастной мешалкой в условиях ламинарного режима течения вязкой жидкости.

Исходными уравнениями, описывающими неизотермическое течение жидкости в аппарате, будут соответственно уравнения Навье-Стокса, энергии и неразрывности в виде [4]:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$$, (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = a \nabla^2 T,$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$
(2)

Течение жидкости будем рассматривать в подвижной цилиндрической системе координат r, ϕ , z, связанной с вращающейся мешалкой. Проекции вектора скорости обозначим соответственно u, v, w. Проекции объемной силы в подвижной системе координат содержат ускорение Кориолиса и центробежное ускорение, а также ускорение силы тяжести и имеют вид:

Газизуллин Назым Абдуллович, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики. E-mail: gnazym@gmail.com

$$F_r = \rho(\omega^2 r + 2\omega v),$$

$$F_{\varphi} = -2\rho\omega u,$$

$$F_{z} = -\rho g,$$

где ω — угловая скорость вращения вала и мешалки.

Свободную поверхность жидкости будем предполагать поверхностью вращения, на которой введем в рассмотрение локальный базис из вектора нормали

$$\vec{n} = \left\{ -\frac{\partial h}{\partial r}; 0; 1 \right\}$$

и двух векторов в касательной плоскости

$$\vec{\tau}_1 = \left\{1; 0; \frac{\partial h}{\partial r}\right\}, \quad \vec{\tau}_2 = \left\{0; 1; 0\right\},$$

где h — высота свободной поверхности жидкости над мешалкой.

Граничные условия на свободной поверхности включают в себя кинематическое и динамическое условия. Кинематическое условие

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -u \frac{\partial h}{\partial r} + w \tag{4}$$

свидетельствует о том, что скорость движения свободной поверхности в направлении нормали должна совпадать с нормальной составляющей скорости движения жидкости [5]. Динамическое условие представляет собой условие баланса сил, действующих на поверхности жидкости [6]. Можно предполагать, что силы поверхностного натяжения незначительны, так как радиус кривизны поверхности жидкости в аппарате достаточно велик. Тогда динамическое условие будет иметь вид

$$\vec{n} \cdot P = -p_0 \vec{n} \cdot E, \tag{5}$$

где P – тензор напряжений; E – единичный тензор; p_0 – атмосферное давление.

Проекции динамического условия (5) на направления базисных векторов представляют соотношения

$$p_{zz} + p_0 - 2p_{rz} \frac{\partial h}{\partial r} + (p_{rr} + p_0) \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)^2 = 0,$$

$$(p_{zz} - p_{rr}) \frac{\partial h}{\partial r} + \left[1 - \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)^2\right] p_{rz} = 0,$$

$$p_{\varphi z} - p_{r\varphi} \frac{\partial h}{\partial r} = 0,$$
(8)

где $p_{rr}, p_{zz}, p_{rz}, p_{\varphi z}, p_{r\varphi}$ – компоненты тензора напряжений.

Граничные условия для составляющих скорости на твердых стенках заключаются в отсутствии относительного движения жидкости и твердой поверхности. Тогда на дне и боковой стенке аппарата

$$u=0$$
, $v=-\omega r$, $w=0$,

а на поверхности вала и мешалки соответственно

$$u = 0$$
, $v = 0$, $w = 0$.

На оси вращения потока под мешалкой примем

$$u = 0$$
, $v = 0$, $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$.

Будем предполагать процесс теплообмена в аппарате установившимся. Пусть цилиндрическая стенка аппарата оборудована наружными нагревательными элементами, поддерживающими постоянную температуру T_1 . Тогда на боковой стенке аппарата будет справедливо граничное условие $T=T_1$. На свободной поверхности жидкости примем $T=T_0$, где T_0 — температура окружающей среды. На поверхности вала и мешалки, а также на дне аппарата примем адиабатическое условие $\partial T/\partial n=0$.

Поскольку форма свободной поверхности жидкости неизвестна и должна быть найдена в результате расчетов, то перейдем от физической области течения к расчетной области с известными границами. Для этого физическую область поделим на две подобласти, нижнюю и верхнюю, горизонтальным сечением, проведенным через верхнюю поверхность мешалки. Введем безразмерные координаты и функции

$$t^* = \pi nt, \quad r^* = \frac{r}{d}, \quad \varphi^* = \varphi,$$

$$z^* = \begin{cases} \frac{z}{d} & npu \quad z \le H + b \\ \frac{z - H - b}{h} & npu \quad z > H + b \end{cases},$$

$$\vec{v}^* = \frac{\vec{v}^*}{\pi nd}, \quad p^* = \frac{p - p_0}{\rho(\pi nd)^2}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}.$$

где n — число оборотов мешалки в единицу времени; H — высота расположения мешалки над дном аппарата; b — высота лопасти, а в качестве характерной длины и характерной скорости потока выбраны соответственно диаметр мешалки d и окружная скорость конца лопасти πnd . Свободной поверхности жидкости при этом будет соответствовать значение z^* =1.

После преобразования координат уравнение неразрывности (3) сохранит форму

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$
.

в которой проекции вектора скорости в расчетной области U, V, W определяются как

$$U = \gamma u^*, \quad V = \gamma v^*, \quad W = w^* - u^* z^* \frac{\partial \gamma}{\partial r^*},$$

где γ =1 для нижней подобласти и γ = h^* для верхней подобласти; h^* =h/d, а u^* , v^* , w^* – компоненты вектора скорости в безразмерной физической области, определяемой преобразованием

$$r^* = \frac{r}{d}, \quad \varphi^* = \varphi, \quad z^* = \frac{z}{d}.$$

В расчетной области уравнение (1) в проекциях на оси координат может быть записано в виде обобщенного уравнения переноса

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t^*} + \frac{1}{\gamma} div (\vec{V}\Phi) = div (\Gamma grad \Phi) + S, \tag{9}$$

где Γ =1/(π Re) — коэффициент диффузии; Re= $\rho nd^2/\mu$ — центробежное число Рейнольдса; S — член типа источника, соответствующий искомой функции Ф. Уравнение (2) в безразмерной форме также приводится к виду (9), где Γ =1/(π RePr); Pr= μ /(ρa); — число Прандтля; a — коэффициент температуропроводности.

Численное моделирование течения и теплопередачи проведем методом контрольных объемов [7]. Поделим расчетную область на контрольные объемы (ячейки) так, чтобы каждая узловая точка находилась в отдельной ячейке. Размещение всех узловых функций в одних и тех

же точках приводит к рассогласованию полей скорости и давления, поэтому выберем разнесенную шахматную сетку [8], в которой точки, где вычисляются компоненты скорости, смещены на полшага в соответствующих направлениях относительно основных точек, в которых вычисляется давление. Проинтегрируем уравнение (9) по контрольному объему и временному интервалу Δt^* . В результате с учетом уравнения неразрывности получим дискретный разностный аналог, который связывает значения искомой функции Φ в узловой точке P с ее значениями в центрах E, W, N, S, T, B соседних ячеек в форме

$$a_{P}\Phi_{P} = a_{E}\Phi_{E} + a_{W}\Phi_{W} + a_{N}\Phi_{N} + a_{S}\Phi_{S} + a_{T}\Phi_{T} + a_{B}\Phi_{B} + \Delta V \left(S_{P} + \frac{\Phi_{P}^{0}}{\Delta t}\right). \tag{10}$$

Здесь S_P — узловое значение источникового члена; Φ^0 — значение Φ в момент времени t^* ; ΔV — объем ячейки.

Расчет поля течения проводился на основе алгоритма SIMPLE [7], в котором используется дискретизация уравнений по методу контрольных объемов на сетках с расположением узлов в шахматном порядке. Граничные условия на свободной поверхности (7), (8) и (4) использовались соответственно при расчете радиальной, тангенциальной и осевой компонент скорости из уравнений (10). Форма свободной поверхности жидкости, соответствующая рассчитанному полю течения, определялась из условия (6) с использованием кинематического условия (4) в конце каждой итерации. При этом в качестве начальных значений $h_i^{*(0)}$ принималось значение, соответствующее положению невозмущенной поверхности жидкости. Очевидно, что рассчитанные при этом значения $h_i^{**(k)}$ могут не удовлетворять условию постоянства объема жидкости в аппарате. Отметим, что достаточно учитывать объем жидкости над мешалкой. Таким образом, возникает необходимость введения некоторой поправки $\delta h^{(k)}$ к величине $h_i^{**(k)}$. Эта поправка находилась из соотношения

$$V_0 - V^{(k)} = \pi (R^2 - r_s^2) \delta h^{(k)},$$
 (11)

где R — радиус аппарата; r_s — радиус вала; i — индекс нумерации узлов расчетной сетки в радиальном направлении; V_0 — объем жидкости над мешалкой с невозмущенной свободной поверхностью; $V^{(k)}$ — объем жидкости над мешалкой на k-ой итерации, который вычислялся на каждой итерации путем численного интегрирования по значениям $h_i^{**(k)}$. Следует отметить, что в соответствии с формулой (11) поправка $\delta h^{(k)}$ не влияет на форму свободной поверхности, а лишь

корректирует ее по высоте. Окончательно с учетом поправки $\delta h^{(k)}$ скорректированные значения формы свободной поверхности могут быть найдены как

$$h_i^{*(k)} = h_i^{**(k)} + \delta h^{(k)}.$$

Дискретные уравнения (10) решались методом прогонки в радиальном направлении. В качестве критерия сходимости рассматривалась сумма модулей невязок по всем ячейкам для уравнений (10). Расчеты проводились с точностью до 10-6. В расчетах принималось

$$H_0 = D;$$
 $d/D = 0.5;$ $d_s/D = 0.05;$
 $b/d = 0.2;$ $H/H_0 = 0.3;$

где D — диаметр аппарата; H_0 — высота невозмущенной поверхности жидкости над дном аппарата; d_s — диаметр вала.

На рис. 1 представлены результаты расчетов в меридиональной плоскости аппарата линий тока радиально-осевой циркуляции. Мешалка создает потоки жидкости, которые вызывают циркуляцию жидкости по объему аппарата. Окружная циркуляция, называемая также первичной, связана с вращением массы жидкости вокруг оси вращения мешалки. Существенную роль в перемешивании играет вторичная радиально-осевая циркуляция, которая накладывается на основную окружную циркуляцию и связана с насосным действием мешалки. Наблюдается два потока радиально-осевой циркуляции, способствующих перемешиванию жидкости и расположенных соответственно сверху и снизу от мешалки.

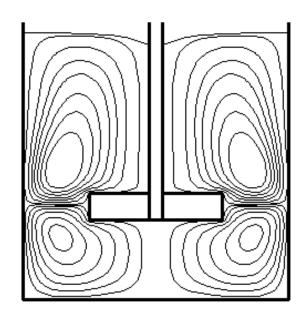


Рис. 1. Радиально-осевая циркуляция в аппарате при Re=150; Pr=2

На рис. 2-3 представлены результаты расчетов изотерм θ =const в горизонтальном сечении аппарата над мешалкой на расстоянии 0,15 H_0 . При относительно небольших значениях числа Рейнольдса конвективный перенос теплоты в направлении от боковой стенки в центральную часть аппарата незначителен и формирование температурного поля определяется в основном теплопроводностью (рис. 2).

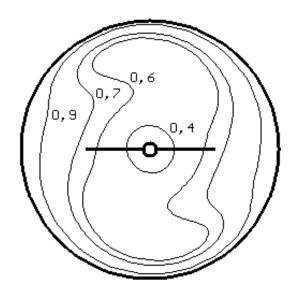


Рис. 2. Картина изотерм в аппарате при Re=50; Pr=2

Увеличение числа Рейнольдса сопровождается интенсификацией радиально-тангенциальных потоков. Роль конвекции в переносе теплоты возрастает. Особенно заметна тенденция к усилению конвективного переноса теплоты в тангенциальном направлении. Нагретые массы жидкости увлекаются быстро движущимися потоками, способствуя перемешиванию и постепенному выравниванию температур (рис. 3).

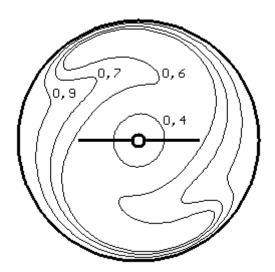


Рис. 3. Картина изотерм в аппарате при Re=200; Pr=2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

- 1. *Стренк*, Ф. Перемешивание и аппараты с мешалками. – Л.: Химия, 1975. 384 с.
- 2. *Брагинский, Л.Н.* Перемешивание в жидких средах / *Л.Н Брагинский, В.И. Бегачев, В.М. Барабаш.* Л.: Химия, 1984. 336 с.
- Манусов, Е.Б. Расчет реакторов объемного типа / Е.Б. Манусов, Е.А. Буянов. – М.: Машиностроение, 1978. 112 с.
- Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
- Лаврентьев М.А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1977. 408 с.
- 6. *Ландау Л.Д.* Гидродинамика / *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифииц.* М.: Физматлит, 2003. 732 с.
- 7. *Патанкар, С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
- 8. *Harlow, F.N.* Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface / *F.N. Harlow, J.E. Welch* // Phys. Fluids. 1965. V. 8, No. 12. P. 2182-2189.

RESEARCH OF THE CONVECTIVE HEAT TRANSFER IN THE DEVICE WITH MECHANICAL MIXER

© 2013 N.A. Gazizullin

Kazan National Research Technological University

By means of iterative procedure on the basis of SIMPLE algorithm the numerical modeling of convective heat exchange in the device with a mechanical mixer is carried out. Results of calculations are presented in the form of current of secondary circulation of liquid and isotherms lines.

Key words: device, mixer, mixing, liquid, circulation, heat transfer

Nazym Gazizullin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Higher Mathematics Department. E-mail: gnazym@gmail.com