УДК 519.63:53.072

О СМЕШАННОМ ВАРИАЦИОННО-СЕТОЧНОМ МЕТОДЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

© 2013 В.Л. Леонтьев

Ульяновский государственный университет

Поступила в редакцию 21.06.2013

В статье используется операторная постановка задачи теории пластичности. Формулируется смешанный вариационный принцип теории пластичности. На основе этого вариационного принципа строится алгоритм вариационно-сеточного метода. Первой особенностью метода является то, что приближенные решения для скоростей изменения напряжений, деформаций и перемещений являются независимыми друг от друга. Эта особенность определяется применением смешанного вариационного принципа. Вторая особенность метода связана с использованием ортогональных финитных сеточных базисных функций для аппроксимации точных решений. Ортогональные финитные функции дают возможность исключить узловые значения деформаций и напряжений из системы сеточных уравнений до решения системы уравнений на компьютере. Алгоритм такого исключения показан в статье. Вычислительные затраты реализации на компьютере алгоритма метода не превышают вычислительные затраты классического вариационно-сеточного метода (ВСМЛ), основанного на вариационном принципе Лагранжа. Точность и гладкость приближенных решений этого метода являются более высокими, чем в ВСМЛ.

Ключевые слова: теория пластичности, смешанный вариационный принцип, вариационный принцип Лагранжа, ортогональные финитные функции, вариационно-сеточный метод.

Дается описание алгоритма смешанного численного метода, основанного на применении вариационного принципа типа Ху-Васидзу и ортогональных функций [1] с компактными носителями в физически нелинейной задаче теории пластичности. Данная работа посвящена развитию смешанных вариационно-сеточных методов, связанных с использованием смешанных вариационных принципов и ортогональных финитных функций. Первая работа этого научного направления [2] была опубликована в 1993 году. Затем появились статьи [3,4,5,6,7 и др.], содержащие алгоритмы подобных численных методов, предназначенных для решения статических и динамических, линейных и нелинейных задач теории стержней, статических и динамических задач линейной теории пластин и оболочек, трехмерной теории упругости. Развитие данного направления не ограничивается только рамками механики деформируемого твердого тела. Ряд существенных научных результатов, которые приводятся в работах [8,9], связан с использованием ортогональных финитных функций, во-первых, в новом интегральном преобразовании, которое не уступает по эффективности интегральным вейвлет-преобразованиям в задачах спектрального анализа, и, во-вторых, с их использованием в математическом моделировании потенциалов межатомного взаимодействия и с созданием на основе этих потенциалов высокоэффективных комплексов программ расчета и проектирования наносистем. Ряд выполненных научных работ, результаты которых отражены, например, в [10], посвящены теоретическому обоснованию сходимости названных методов.

В постановке задачи теории пластичности в операторной форме используются уравнения пластического течения упруго-пластического тела с упрочнением [11].

Для построения численного метода здесь формируется новый смешанный функционал типа Ху-Васидзу

$$HW(\dot{\underline{\underline{\sigma}}},\dot{\underline{u}},\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}})=\{\int_{\Omega}[(-div\dot{\underline{\underline{\sigma}}}+2\dot{\underline{f}})\bullet\dot{\underline{u}}+\dot{\underline{\underline{\sigma}}}\bullet\bullet(def\dot{\underline{u}}-\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}})-(\dot{\underline{\underline{\sigma}}}-A\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}})\bullet\bullet\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}]d\Omega+$$

$$+\int_{\Gamma_1}(\dot{\underline{X}}-2\dot{\underline{F}})\bullet\dot{\underline{U}}\,d\Gamma-\int_{\Gamma_2}\dot{\underline{X}}\bullet(\dot{\underline{U}}-2\dot{\underline{E}})d\Gamma\}/2,$$

условие стационарности

$$\delta HW(\dot{\underline{\underline{\sigma}}},\dot{\underline{u}},\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}})=\int_{\Omega}[(-div\dot{\underline{\underline{\sigma}}}+\dot{\underline{f}})\bullet\delta\dot{\underline{u}}+\delta\dot{\underline{\underline{\sigma}}}\bullet\bullet(def\dot{\underline{u}}-\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}})-(\dot{\underline{\underline{\sigma}}}-A\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}})\bullet\bullet\delta\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}]d\Omega+$$

$$+\int_{\Gamma_1}(\dot{\underline{X}}-\dot{\underline{F}})\bullet\delta\dot{\underline{U}}\,d\Gamma-\int_{\Gamma_2}\delta\dot{\underline{X}}\bullet(\dot{\underline{U}}-\dot{\underline{E}})d\Gamma=0, \quad (1)$$

которого равносильно уравнениям [11]

$$div\dot{\underline{\underline{\sigma}}}-\dot{\underline{f}}=0, \qquad def\dot{\underline{u}}-\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}=0, \qquad \dot{\underline{\underline{\sigma}}}-A\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}=0$$

и краевым условиям [11]

Леонтьев Виктор Леонтьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования технических систем.
E-mail: LeontievVL@ulsu.ru

$$\dot{\underline{X}} - \dot{\underline{F}} = 0 \text{ на } \tilde{A}_1, \quad \dot{\underline{U}} - \dot{\underline{E}} = 0 \text{ на } \tilde{A}_2,$$

записанным в операторной форме. Здесь $\underline{\underline{\varepsilon}}$ – тензор деформаций; $\underline{\underline{\sigma}}$ – тензор напряжений, $\underline{u}$ – вектор перемещений, $\underline{f}$ – вектор объемной силы; A - оператор, обратным по отношению к которому является оператор $B(\underline{\underline{\sigma}})$:

$$B(\underline{\underline{\sigma}})\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \{ B_0 \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + F(T)\dot{T}\underline{\underline{\xi}}$$

при $\dot{T} > 0$ (нагружение),

$B_0 \dot{\underline{\underline{\sigma}}}$ при $\dot{T} \le 0$ (разгрузка)},

B_0 – оператор упругих констант,

$\underline{\underline{\xi}} = dev \underline{\underline{\sigma}}$,

$T^2 = (\underline{\underline{\xi}} \cdot\cdot\, \underline{\underline{\xi}})/2$ – интенсивность напряжений сдвига, $F(T)$ – функция, характеризующая упруго-пластические свойства тела; $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ – граница области Ω; $\underline{X}$ – силовые факторы на Γ; $\underline{U}$ – перемещения точек границы Γ; $\underline{F}$, $\underline{E}$ – соответственно заданные значения $\underline{X}$, $\underline{U}$ на Γ. Численный метод основан на использовании взаимонезависимых аппроксимаций $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}, \dot{\underline{u}}, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$:

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}}(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{\underline{\underline{a}}}_k(t)\varphi_k(x,y,z),$$

$$\dot{\underline{u}}(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{\underline{b}}_k(t)\varphi_k(x,y,z), \qquad (2)$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{\underline{\underline{c}}}_k(t)\varphi_k(x,y,z),$$

где $\varphi_k(x,y,z)$ – известные ортогональные финитные функции [1,3,4,5]; $\dot{\underline{\underline{a}}}_k(t)$, $\dot{\underline{\underline{c}}}_k(t)$ – неизвестные тензорные функции времени, а $\dot{\underline{b}}_k(t)$ – неизвестные векторные функции времени, компоненты которых после их нахождения определяют на основе (2) приближенные решения для скоростей изменения напряжений, перемещений и деформаций соответственно. Суммы (2) после их подстановки в условие (1) с учетом предположения о выполнении граничных условий до варьирования функционала дают уравнение

$$\delta HW(\dot{\underline{\underline{\sigma}}},\dot{\underline{u}},\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}) = \int_{\Omega} [(-div\sum_{k=1}^{n}\dot{\underline{\underline{a}}}_k(t)\varphi_k + \dot{\underline{f}})\cdot\sum_{i=1}^{n}(\delta\dot{\underline{b}}_i(t))\varphi_i +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(\delta\dot{\underline{\underline{a}}}_i(t))\varphi_i \cdot\cdot (def(\sum_{k=1}^{n}\dot{\underline{b}}_k(t)\varphi_k) - \sum_{k=1}^{n}\dot{\underline{\underline{c}}}_k(t)\varphi_k) -$$

$$-(\sum_{k=1}^{n}\dot{\underline{\underline{a}}}_k(t)\varphi_k - A\sum_{k=1}^{n}\dot{\underline{\underline{c}}}_k(t)\varphi_k)\cdot\cdot\sum_{i=1}^{n}(\delta\dot{\underline{\underline{c}}}_i(t))\varphi_i]d\Omega = 0,$$

из которого в силу произвольности и взаимной независимости вариаций $\delta\dot{\underline{\underline{a}}}_i(t), \delta\dot{\underline{\underline{c}}}_i(t)$, $\delta\dot{\underline{b}}_i(t)$ следует система сеточных уравнений

$$\int_{\Omega}(-div\sum_{k=1}^{n}\dot{\underline{\underline{a}}}_k(t)\varphi_k + \dot{\underline{f}})\varphi_i d\Omega = \underline{0},$$

$$\int_{\Omega}\varphi_i(def(\sum_{k=1}^{n}\dot{\underline{b}}_k(t)\varphi_k) - \sum_{k=1}^{n}\dot{\underline{\underline{c}}}_k(t)\varphi_k)d\Omega = 0,$$

$$\int_{\Omega}(\sum_{k=1}^{n}\dot{\underline{\underline{a}}}_k(t)\varphi_k - A\sum_{k=1}^{n}\dot{\underline{\underline{c}}}_k(t)\varphi_k)\varphi_i d\Omega = 0$$

$$(i=1,2,...,n), \qquad (3)$$

вторая и третья подсистемы уравнений которой с учетом свойства ортонормированности координатных базисных функций переписываются в виде

$$\dot{\underline{\underline{c}}}_i(t) = \int_{\Omega}\varphi_i(def(\sum_{k=1}^{n}\dot{\underline{b}}_k(t)\varphi_k)d\Omega,$$

$$\dot{\underline{\underline{a}}}_i(t) = \int_{\Omega} A(\sum_{k=1}^{n}\dot{\underline{\underline{c}}}_k(t)\varphi_k)\varphi_i d\Omega \quad (i = 1,2,..., n). \quad (4)$$

Из (4) после исключения $\dot{\underline{\underline{c}}}_i(t)$ имеем

$$\dot{\underline{\underline{a}}}_i(t) = \int_{\Omega} A(\sum_{k=1}^{n}\int_{\Omega}\varphi_k(def(\sum_{j=1}^{n}\dot{\underline{b}}_j(t)\varphi_j)d\Omega\varphi_k)\varphi_i d\Omega \quad (i=1,2,...,n),$$

что после подстановки в первую подсистему уравнений (3) приводит к системе уравнений “в перемещениях”

$$\int_{\Omega}(-div\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} A(\sum_{k=1}^{n}\int_{\Omega}\varphi_k(def(\sum_{j=1}^{n}\dot{\underline{b}}_j(t)\varphi_j)d\Omega\varphi_k)\varphi_i d\Omega\varphi_i + \dot{\underline{f}})\varphi_m d\Omega = \underline{0} \quad (m=1,2,...n).$$

После присоединения начальных условий к последней системе ОДУ возникает задача Коши для скоростей изменения компонент вектора перемещений. Предлагаемый численно-аналитический смешанный вариационно-сеточный метод является развитием численных методов [2,4,5,6,7] и, во-первых, позволяет находить приближенные решения для скоростей напряжений $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}$, перемещений $\dot{\underline{u}}$, деформаций $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$, обладающие одинаковой гладкостью и точностью одного порядка. Во-вторых, вычислительная стоимость получения таких решений близка к вычислительной стоимости приближенных решений, получаемых с помощью численного метода “в перемещениях”, основанного на вариационном принципе Лагранжа. Объясняется это тем, что после проведенной дискретизации интегральной постановки задачи на основе условия стационарности смешанного функционала типа Ху-Васидзу с использованием ортогональных базисных функций с компактными носителями выполняется исключение узловых значений $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}$, $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$, изменяющихся во времени, из глобальной системы сеточных уравнений до начала ее решения на ЭВМ.

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев В.Л.* Ортогональные финитные функции и численные методы. Ульяновск: Изд-во Ульяновского гос. ун-та, 2003. 178 с.
2. *Леонтьев В.Л.* Методы конечных элементов, основанные на использовании обобщенных функций Куранта в теории упругих колебаний // Проблемы динамики и прочности электро- и энерго-машин: тезисы докл. Всерос. научного семинара (С.-Петербург, 18-20 мая 1993 г.). С.-Петербург: изд-во Института проблем машиноведения РАН. 1993. С. 21-22.
3. *Леонтьев В.Л., Лукашанец Н.Ч.* Сеточные базисы ортогональных финитных функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1999. Т.39. №7. С. 1158–1168.
4. *Леонтьев В.Л.* Об ортогональных финитных функциях и о численных методах, связанных с их применением // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2002. Т.9. Вып.3. С. 497–504.
5. *Леонтьев В.Л.* Ортогональные сплайны и вариационно-сеточный метод // Математическое моделирование. 2002. Т.14. №3. С. 117–127.
6. *Леонтьев В.Л., Мелентьев А.Ю.* Сеточные методы расчета криволинейных стержней // Математическое моделирование. 2003. Т.15. n10. С. 95–104.
7. *Красильников А.Р., Леонтьев В.Л.* О вариационно-сеточном методе теории пластин // Математическое моделирование. 2005. Т.17. n3. С. 23–34.
8. *Леонтьев В.Л., Риков Е.А.* Интегральные преобразования, связанные с ортогональными финитными функциями, в задачах спектрального анализа математических моделей сигналов // Математическое моделирование. 2006. Т.18. №7. С. 93–100.
9. *Михайлов И.С., Леонтьев В.Л.* О построении потенциала взаимодействия атомов, основанном на ортогональных финитных функциях // Нано- и микросистемная техника. 2011. №9. С. 48–50.
10. *Леонтьев В.Л.* О сходимости смешанного вариационно-сеточного метода // Сибирский журнал вычислительной математики. 2002. Т.5. №1. С. 25–34
11. *Загородная Г.А., Фридман В.М.* Модификация метода Канторовича в теории пластического течения // Известия Академии наук Армянской ССР. 1977. Т. XXX. №1. С. 53–62.

ABOUT MIXED VARIATIONAL GRID METHOD OF PLASTICITY

© 2013 V.L. Leontiev

Ulyanovsk State University

The operator formulation of plasticity is used in the article. The mixed variational principle of plasticity is formulated. The algorithm of variational grid method is constructed on the base of this variational principle. The first particularity of this method is independence of approximations for velocities of stresses, deformations and displacements. This particularity is defined by application of mixed variational principle. The second particularity of this method is connected with use the orthogonal finite functions for approximation of exact solutions. Orthogonal finite functions give the possibility to exclude node deformations and stresses from the system of grid equations before solution the system on computer. The algorithm of such exclusion is shown in the article. The volume of arithmetical operations of algorithm of this method do not exceed the volume of arithmetical operations of algorithm of the classical variational grid method (VGML) connected with Lagrange variational principle. The accuracy and smoothness of approximate solutions of this method are more high that for VGML.

Keywords: plasticity, mixed variational principle, Lagrange variational principle, orthogonal finite functions, variational grid method.

Victor Leontiev, Doctor of Technics, Professor at the Mathematical Modeling of Technical Systems Department.
E-mail: LeontievVL@ulsu.ru