

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПОПЕРЕЧНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СТРУКТУР В ШИРОКОАПЕРТУРНЫХ ЛАЗЕРАХ

© 2013 Д.А. Анчиков<sup>1,2</sup>, А.А. Кренц<sup>1,2</sup>, А.В. Пахомов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН

<sup>2</sup>Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва  
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 15.01.2013

Работа посвящена численному и аналитическому исследованию структур оптического поля, возникающих в поперечном профиле излучения широкоапертурных лазеров. На основе численного моделирования уравнений Максвелла-Блоха рассмотрена пространственно-временная динамика при отрицательной и положительной частотных отстройках излучения.

Ключевые слова: широкоапертурный лазер, оптическая структура, устойчивость, линейный анализ, численное моделирование.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из причин возрастания интереса к поперечным структурам оптического поля является расширение области применения широкоапертурных лазеров, прежде всего миниатюрных твердотельных, а также полупроводниковых лазеров. Эти лазеры являются основным активным элементом в современных оптических каналах связи. В частности, конструкция полупроводниковых лазеров с вертикальным резонатором способствует генерации единственной продольной моды и очень большого числа поперечных. Нелинейное взаимодействие между последними приводит к формированию сложной поперечной структуры оптического поля, например, к решёткам оптических вихрей и спиральным волнам. Природа таких явлений недостаточно изучена, но в последнее десятилетие ведутся активные работы по моделированию поведения широкоапертурного лазера с целью получения знаний о физических механизмах, влияющих на лазерную генерацию. Это даст возможность целенаправленно управлять пространственно-временной структурой профиля интенсивности и позволит разработчикам лазерной техники решить задачи управления качеством пучка и генерировать излучение с требуемыми выходными характеристиками.

Целью данной работы было определение области устойчивости основных стационарных структур, возникающих в поперечном профиле оптического поля широкоапертурных лазеров,

для двух принципиально различных случаев отрицательной и положительной отстройкой частоты генерации.

### 2. МОДЕЛЬ ЛАЗЕРА. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ

Лазер, работающий на одной продольной моде плоскопараллельного резонатора и имеющий однородно уширенную линию, описывается полуклассической системой уравнений Максвелла-Блоха [1]:

$$\begin{cases} \partial_t E = ia\Delta_{\perp} E + \sigma(P - E), \\ \partial_t P = -(1 + i\delta)P + DE, \\ \partial_t D = -\gamma \left[ D - r + \frac{1}{2}(E^* P + EP^*) \right]. \end{cases} \quad (1)$$

$E, P, D$  – безразмерные огибающие электрического поля, поляризуемости и инверсии населенности соответственно.  $\gamma = \gamma_{II} / \gamma_{\perp}$  и  $\sigma = \kappa / \gamma_{\perp}$ , где  $\gamma_{\perp}, \gamma_{II}$  и  $\kappa$  – скорости релаксации поляризуемости, инверсии населенности и оптического поля соответственно.  $\delta = (\omega_{21} - \omega) / \gamma_{\perp}$  – отстройка между центром линии усиления и частотой генерации, безразмерная на ширину линии.  $\Delta_{\perp}$  – двумерный оператор Лапласа,  $a$  – дифракционный параметр, где  $d$  – ширина апертуры,  $r$  – накачка, нормированная на пороговое значение.

В [2] дана простая качественная интерпретация причин различия в поведении системы при разных знаках отстройки. Дело в том, что при отрицательной отстройке для лазерной системы

Анчиков Дмитрий Александрович, аспирант, инженер-исследователь. E-mail: swadimaz@mail.ru

Кренц Антон Анатольевич, ассистент, инженер.

E-mail: krenz86@mail.ru

Пахомов Антон Владимирович, студент, инженер.

E-mail: pahomov\_91@mail.ru

характерно излучение параллельно оси резонатора, однако при этом из-за рассогласования частоты генерации и частоты продольной моды резонатора уровень накачки порога генерации повышается. При положительной отстройке для достижения резонанса в лазерной системе наиболее выгодным является режим внеосевого излучения, или так называемых наклонных волн. В обоих случаях, но при разных условиях в системе может проявляться сложная нерегулярная динамика.

### 3. ДИНАМИКА ПРИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОТСТРОЙКЕ

При отрицательной отстройке у системы (1) есть два состояния равновесия: при  $r < R_{th}$  тривиальное решение, соответствующее отсутствию генерации, и при  $r > R_{th}$  однородное по пространству и времени решение (рис. 1), соответствующее приосевой генерации излучения:

$$I_{st} = |E_{st}|^2 = r - D_{st}, \quad D_{st} = 1 + \left(\frac{\delta}{1 + \sigma}\right)^2, \\ P_{st} = E_{st} \left(1 + i \frac{\Omega}{\sigma}\right), \quad \Omega = -\frac{\sigma\delta}{1 + \sigma}. \quad (2)$$

Однако существуют области параметров, при которых это решение теряет устойчивость. В таких случаях в однородном профиле излучения могут возникать сложные несимметричные структуры такие, как, например, оптические вихри.

Был проведен анализ устойчивости однородного решения по отношению к модулированным по пространству возмущениям в виде:

$$E = E_{st} + e_1(t) \exp(i(qx + \omega t)) + e_2(t) \exp(-i(qx - \omega t)), \\ P = P_{st} + p_1(t) \exp(i(qx + \omega t)) + p_2(t) \exp(-i(qx - \omega t)), \quad (3) \\ D = D_{st} + d(t) \exp(iqx) + d(t)^* \exp(-iqx),$$

где  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$ ,  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $d(t)$  – амплитуды малых отклонений,  $q$  – волновое число возмущения,  $x$  – пространственная координата.

После подстановки (3) в (1) и оставляя толь-

ко линейные члены в уравнениях, была получена линейная система для амплитуд возмущений:

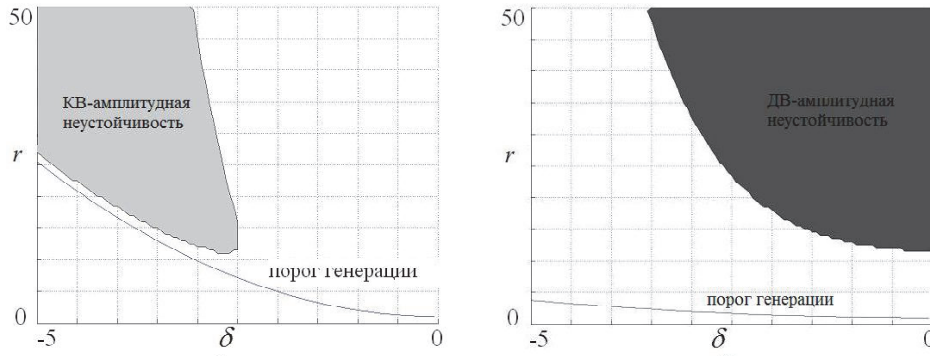
$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \frac{i\delta\sigma}{1 + \sigma} e_1 - iaq^2 e_1 + \sigma(p_1 - e_1) \\ \dot{e}_2 = \frac{i\delta\sigma}{1 + \sigma} e_2 - iaq^2 e_2 + \sigma(p_2 - e_2) \\ \dot{p}_1 = \frac{i\delta\sigma}{1 + \sigma} p_1 - (1 + i\delta)p_1 + e_1 D_{st} + E_{st} d \\ \dot{p}_2 = \frac{i\delta\sigma}{1 + \sigma} p_2 - (1 + i\delta)p_2 + e_2 D_{st} + E_{st} d^* \\ \dot{d} = -\gamma \left[ d + 0.5(E_{st}^* p_1 + E_{st} p_2^* + P_{st} e_2^* + P_{st}^* e_1) \right] \end{cases} \quad (4)$$

Анализ устойчивости полученной системы показал, что существуют области параметров, при которых реализуется амплитудная неустойчивость двух типов. Известно, что, если наибольшие собственные числа системы при возмущениях с  $q=0$  имеют нулевую реальную часть, то это фазовая неустойчивость, если ненулевую – амплитудная. Неустойчивость, при которой наибольшие собственные числа системы имеют строго отрицательную или положительную реальную часть при  $q=0$ , в данной статье называется коротковолновой (КВ) или длинноволновой (ДВ) амплитудной неустойчивостью, соответственно. Были построены диаграммы неустойчивости однородного решения в плоскости отстройка/накачка  $\{\delta; r\}$ , на которых выделены области амплитудной неустойчивостей обоих типов (рис. 2). Фазовых неустойчивостей обнаружено не было, и это согласуется с анализом из [3].

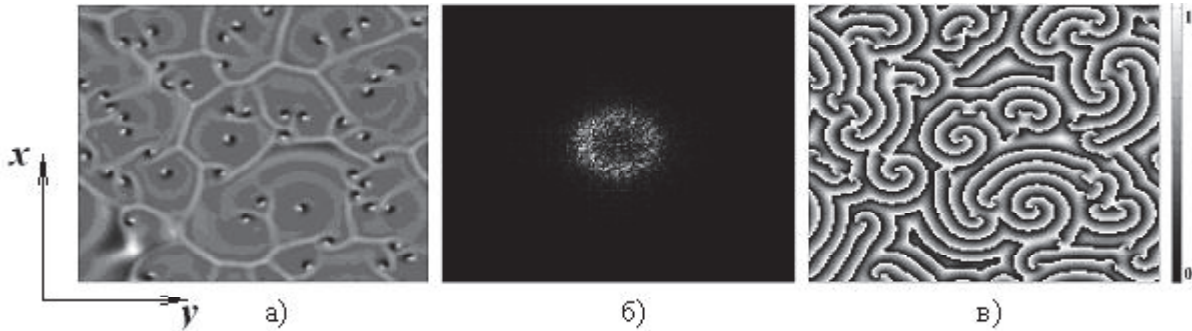
На рис. 3а изображены многочисленные устойчивые оптические вихри, возникающие на лазерной апертуре в ближней зоне. Они возникают в виде нерегулярных образований в случайных областях и ведут себя как броуновские частицы, хаотично двигаясь на апертуре. В дальней зоне – кольцевая форма излучения (рис. 3б). На рис. 3в изображены



Рис. 1. Однородная генерация при  $\delta = -3$ ,  $r = 20$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $a=0.005$ : профили интенсивности в ближней (а), дальней зоне (б) и распределение фазы (в)



**Рис. 2.** Диаграммы устойчивости/неустойчивости однородного решения:  
 а –  $\sigma = 0.01, \gamma = 0.2, a = 0.05$ ; б –  $\sigma = 2, \gamma = 0.1, a = 0.05$



**Рис. 3.** Одиночные оптические вихри и спиральные волны.

Слева направо: профиль интенсивности в ближней, дальней зоне и фазы

спиральные волны фазы, порождаемые оптически-ми вихрями. Параметры взяты из области ДВ-амплитудной неустойчивости.

#### 4. ДИНАМИКА ПРИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОТСТРОЙКЕ

Для проведения наиболее полного двумерного анализа решений системы (1) при положительной отстройке переменные необходимо представить в виде сумм комплексных гармоник по двум возможным на плоскости парам ортогональных направлений:

$$E(t, r) = \sum_{j=1}^4 E_j(t) \exp(i(\vec{k}_j \vec{r} + \Omega t)), \quad P(t, r) = \sum_{j=1}^4 P_j(t) \exp(i(\vec{k}_j \vec{r} + \Omega t))$$

$$D(t, r) = D_0 + \sum_{j=1}^4 d_{j,j}(t) \exp(2i\vec{k}_j \vec{r}) + \sum_{j=1}^4 d_{j,j+1}(t) \exp(i(\vec{k}_j + \vec{k}_{j+1}) \vec{r}), \quad (5)$$

где  $|\vec{k}_j| = k_{\perp} = \sqrt{\delta/a}$ ,  $\Omega = -\delta, \delta > 0, j = 1, 2, 3, 4, 1, 2, \dots$

Здесь  $d_{jj}$  и  $d_{jj+1}$  – комплексные амплитуды стационарных возмущений инверсии населенностей  $D$ , индексирование ведется по соответствующим волновым векторам (рис. 4). Причем имеют место соотношения

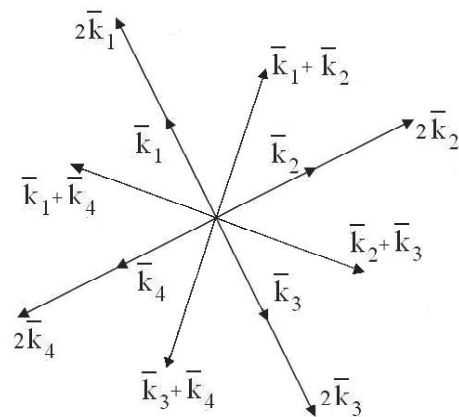
$$d_{jj} = d_{j+2, j+2}^*, \quad d_{j, j+1} = d_{j+2, j+3}^*, \quad (6)$$

т.к. инверсия  $D$  должна быть вещественной.

После подстановки решения (5) в систему (1), пренебрегая высшими гармониками и принимая во внимание (6), была получена линейная система из 13 обыкновенных уравнений для амплитуд комплексных гармоник.

$$\begin{cases} \partial_t E_j = \sigma(P_j - E_j), \\ \partial_t P_j = -P_j + D_0 E_j + E_{j+1} d_{j,j} + E_{j+2} d_{j,j+3} + E_{j+3} d_{j,j+1}, \\ \partial_t D_0 = -\gamma \left[ D_0 - r + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 (E_j^* P_j + E_j P_j^*) \right], \\ \partial_t d_{j,j} = -\gamma \left[ d_{j,j} + \frac{1}{2} (E_j^* P_{j+2} + E_{j+2} P_j^*) \right], \\ \partial_t d_{j,j+1} = -\gamma \left[ d_{j,j+1} + \frac{1}{2} (E_j P_{j+3}^* + E_{j+1} P_{j+2}^* + E_{j+2} P_{j+1}^* + E_{j+3} P_j^*) \right], \end{cases} \quad (7)$$

где  $j = 1, 2, 3, 4, 1, 2, \dots$



**Рис. 4.** Расположение волновых векторов четырех поперечных волн на плоскости и 8-ми возмущений инверсии населенности

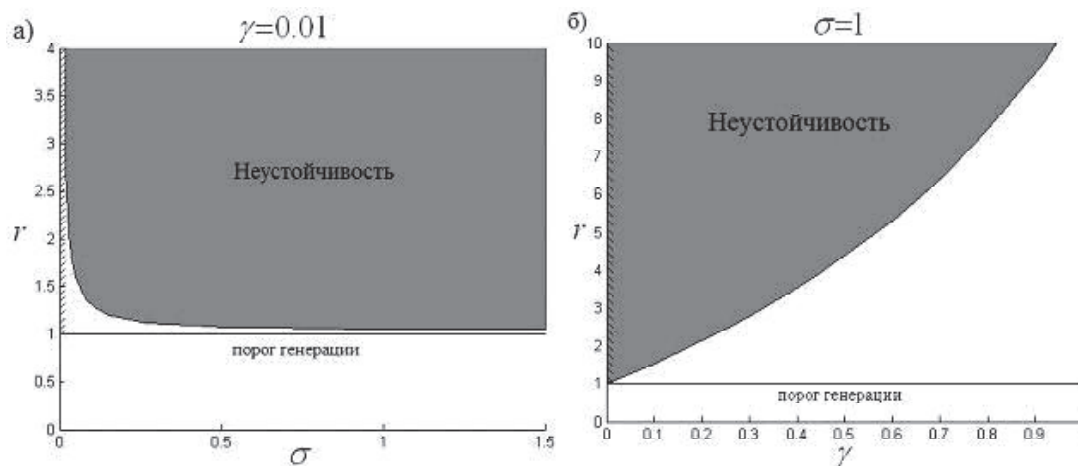


Рис. 5. Диаграммы устойчивости решеток вихрей:

а – на плоскости  $\{\sigma; r\}$  для  $\gamma = 0.01$ ; б – на плоскости  $\{\gamma; r\}$  для  $\sigma = 1$

Эта система имеет несколько особых точек, соответствующих различным состояниям генерации излучения или его отсутствия. Изучалось поведение малых отклонений от частных решений, по характеру которого можно судить об устойчивости особой точки.

Стоячим поперечным волнам (модам пустого резонатора) соответствует следующее решение:

$$|E_j|^2 = |P_j|^2 = \frac{r-1}{9}, D_0 = \frac{5r}{9} + \frac{4}{9},$$

$$d_{j,j} = \frac{1-r}{9} e^{i(\varphi_j - \varphi_{j+2})}, d_{j,j+1} = \frac{2(1-r)}{9} e^{i(\varphi_j - \varphi_{j+3})},$$

где  $j=1, 2, 3, 4, 1, 2, \dots$ . Для этой особой точки выполняется фазовое соотношение  $(\varphi_1 + \varphi_3) - (\varphi_2 + \varphi_4) = 0$ . Согласно проведенному анализу, для резонатора с плоскопараллельными зеркалами эта структура неустойчива при любых параметрах. Действительно, в численном моделировании эти структуры также неустойчивы и имеют место лишь на протяжении конечного периода времени при накачке близкой к порогу генерации. Затем образуется одна из устойчивых структур.

Особая точка, соответствующая стационарной решетке вихрей, имеет вид:

$$|E_j|^2 = |P_j|^2 = \frac{r-1}{5}, D_0 = \frac{r}{5} + \frac{4}{5}, d_{j,j} = \frac{1-r}{5} e^{i(\varphi_j - \varphi_{j+2})}, d_{j,j+1} = 0$$

где  $j=1, 2, 3, 4, 1, 2, \dots$ . Фазовое соотношение для решетки вихрей  $(\varphi_1 + \varphi_3) - (\varphi_2 + \varphi_4) = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ . Устойчивость этой особой точки зависит от параметров лазера  $\gamma, \sigma$  и  $r$ . Но в общем случае это решение устойчиво при небольших превышениях уровня накачки относительно порога генерации, затем в результате бифуркации Андронова-Хопфа решетка вихрей становится неустойчивой.

На основе линейного анализа решения системы (7) были построены диаграммы устойчивости/неустойчивости по отношению к малым возмущениям в двух плоскостях  $\{\sigma; r\}$  и  $\{\gamma; r\}$

(рис. 5а и 5б). Результаты, полученные в [4, 5] для уравнения Свифта-Хохенберга, подтверждаются анализом для полной системы (1): в лазерах класса А решетки вихрей устойчивы при любых параметрах накачки. Напротив, для лазеров класса В решение в виде решетки вихрей всегда неустойчиво. Это в свою очередь согласуется с результатами, полученными в [6].

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитически рассмотрена динамика лазера при положительной и отрицательной отстройке, описываемая полной системой уравнений Максвелла-Блоха в частных производных.

Показано, что для случая положительной отстройки поперечная мода плоскопараллельного резонатора является неустойчивой структурой. Решетки вихрей устойчивы в конечном интервале значений накачки выше порога. Были построены диаграммы устойчивости решеток вихрей при различных параметрах лазерной системы. Установлено, что выводы, сделанные для полной системы Максвелла-Блоха, согласуются и в предельных случаях лазеров класса А и В могут быть сведены к ранее полученным результатам для упрощенных моделей лазеров с адиабатическим исключением переменных.

При отрицательной отстройке была изучена устойчивость однородного решения системы уравнений в частных производных по отношению к модулированным по пространству возмущениям. Аналитически построены бифуркационные диаграммы для стационарного решения. Получена качественная и количественная согласованность численных результатов с аналитическими.

*Работа была частично поддержана ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 гг." (контракты №№*

14.740.11.1140, 14.740.11.0999, 14.132.21.1423), контрактном № 2.560.2011 Минобрнауки РФ и НИИ ГР 01201156352.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Scheuer J.* Optical Vortices Crystals: Spontaneous Generation in Nonlinear Semiconductor Microcavities // *Science* 285, 230 (1999).
2. *Schulz-Ruhtenberg M.A.* Experimental analysis of spatial states in broad-area vertical-cavity surface-emitting lasers / Thesis (2008).
3. *Заикин А.П., Молевич Н.Е.* Влияние скорости кросс-релаксации на поперечную динамику излучения // *Квантовая электроника*. 2004. Т.34. №8.
4. *Staliunas K., Sanchez-Morsillo V.J.* Transverse patterns in nonlinear optical resonators // *STMP* 183, 2003.
5. *Анчиков Д.А., Крентц А.А.* Решетки вихрей в широко-апертурных лазерах // *Известия Самарского научного центра РАН*, 2012. Т.14. №4. С.201-205.
6. *Staliunas K., Weiss C.O.* Nonstationary vortex lattices in large-aperture class B lasers // *J. Opt. Soc. Am. B*, 1995, V. 12, № 6.

### STABILITY OF TRANSVERSE OPTICAL PATTERNS IN WIDE-APERTURE LASERS

© 2013 D.A. Anchikov<sup>1,2</sup>, A.A. Krents<sup>1,2</sup>, A.V. Pahomov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Samara Branch of P.N. Lebedev's Physical institute of RAS

<sup>2</sup>Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov  
(National Research University)

The work deals with numerical and analytical research of optical field patterns in transverse light profile of wide-aperture lasers. On the basis of numerical simulation of Maxwell-Bloch's system of equations spatiotemporal dynamic has been observed at positive and negative frequency detuning.

Key words: wide-aperture laser, optical pattern, stability, linear analysis, numerical simulation.

---

*Dmitriy Anchikov, Graduate Student, Research Engineer.*

*E-mail: swadimaz@mail.ru*

*Anton Krents, Assistant Lecturer, Engineer.*

*E-mail: krenz86@mail.ru*

*Anton Pahomov, student, engineer.*

*E-mail: pahomov\_91@mail.ru*