УДК 532.536

ДВУХСРЕДНЫЙ АВТОМОДЕЛЬНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 02.12.2013

В статье устанавливаются условия существования автомодельного пограничного слоя при движении двух несмешивающихся сред. Введением новых переменных исходная краевая задача преобразуется в задачу с начальными условиями (задача Коши). Исследовано влияние физических свойств двух сред на напряжение трения на стенке и профиль скорости внутри пограничного слоя.
Ключевые слова: ламинарный пограничный слой, автомодельное течение, задача Коши.

Для управления течением в пограничном слое используют различные методы. В одном из таких методов применяют подвод на обтекаемую поверхность жидкость или газ с другими физическими свойствами, чем физические свойства набегающего потока. Так, К.К. Федяевский [1, 2], видимо, был первым, кто предложил создавать слой воздуха на днище судов. Л.Г. Лойцянский [3] выполнил расчёт приближённым методом коэффициента сопротивления трения при обтекании плоской пластины такой двухсредной системой. При этом учитывалось взаимопроникновение этих сред друг в друга. В [4] и [5] рассмотрен двухсредный пограничный слой, когда эти две среды не перемешиваются. Считается, что подводящая через обтекаемую поверхность среда заключена в тонкую область, где распределение продольной скорости можно считать линейным. В результате расчёт течения во внешней области такого пограничного слоя сводится к решению обычных уравнений пограничного слоя с изменённым граничным условием прилипания на условие скольжения. В [4] используется метод интегральных соотношений для случая обтекания плоской пластины, тогда как в [5] развит метод конечных разностей для произвольного тела.

Ниже приводятся результаты расчётов характеристик двухсредного пограничного слоя на плоской пластине, когда задача приводится к автомодельной. Результирующая краевая задача сводится к задаче Коши, что обеспечивает безытерационное численное интегрирование.

Стационарный ламинарный пограничный слой несжимаемой жидкости, набегаемой на плоскую пластину (см. рис.1), описывается уравнениями [6]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu_g \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где x, y – продольная и поперечная декартовы координаты, u, v – соответствующие компоненты скорости, ν_g – кинематическая вязкость набегающего потока (для определённости будем эту среду называть газом – gas). При необходимости в дальнейшем индекс g будет указывать на принадлежность к набегающему потоку, соответственно среду в узкой плёнке на поверхности обтекаемого тела будем называть жидкостью, и её величины будем писать с индексом l (жидкость –liquid).

Система уравнений (1)–(2) должна быть решена при граничных условиях [3]

$$y = 0: \quad u = u_w, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu_l u_w^2}{2\mu_g Q}, \quad (3)$$

$$y \to \infty: \quad u \to u_\infty. \quad (4)$$

Здесь u_∞ – скорость набегающего потока, u_w – скорость потока на границе раздела двух сред (рис. 1), μ_l, μ_g – динамическая вязкость жидкости и газа соответственно, $Q(x)$ – объемный расход жидкости на единицу размаха двухмерного обтекаемого тела, вводимой на твёрдую стенку рассматриваемого сечения x, который зависит от скорости ввода жидкости через пластину $v_w(x)$ (рис. 1) (см. [5])

$$Q(x) = \int_0^x v_w(x)dx. \quad (5)$$

Введением переменных Блазиуса [6]

$$u = u_\infty f'(\eta), \eta = y\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu_g x}},$$

Шахов Валентин Гаврилович, кандидат технических наук, профессор кафедры конструкции и проектирования летательных аппаратов. E-mail: shakhov@ssau.ru

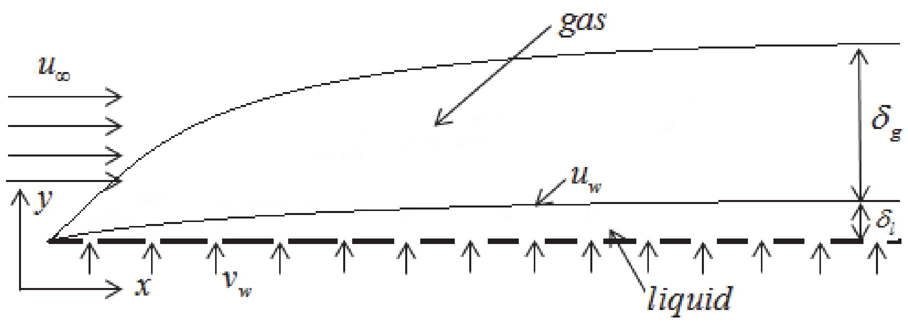

Рис. 1. Схема течения

где $f(\eta)$ – безразмерная функция тока, а $f' = df/d\eta$, система уравнений (1)–(2) сводится к одному нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2f''' + ff'' = 0, \qquad (6)$$

что свидетельствует о существовании автомодельных решений уравнений пограничного слоя.

Граничные условия (3) и (4) переходят в следующие:

$$\eta = 0: \quad f(0) = 0, \quad [f'(0)]^2 = \frac{2\mu_g Q}{\mu_l\sqrt{\nu_g x u_\infty}} f''(0), \qquad (7)$$

$$\eta \to \infty: \quad f'(\infty) \to 1. \qquad (8)$$

Для полной автомодельности задачи необходимо выполнение условия

$$\Lambda = \frac{2\mu_g Q}{\mu_l\sqrt{\nu_g x u_\infty}} = const. \qquad (9)$$

В общем случае, когда $\Lambda = \Lambda(x)$, имеет место квазиавтомодельности. Полученные ниже результаты в предположении $\Lambda = const$ могут быть использованы и при приближённом решении аналогичной задачи квазиавтомодельного течения в пограничном слое.

Из (5) и (9) следует, что подвод жидкости через поверхность пластины для обеспечения автомодельности задачи должен происходить с нормальной скоростью вдува v_w (см. рис. 1), изменяющейся с координатой x по закону

$$v_w(x) = \Lambda \frac{\mu_l}{\mu_g}\sqrt{\frac{\nu_g u_\infty}{x}}.$$

Второе граничное условие в (7) запишется как

$$\eta = 0: \quad [f'(0)]^2 = \Lambda f''(0). \qquad (10)$$

Краевая задача (6)–(8) и (10) может быть сведена к задаче с начальными условиями. Процедура такого преобразования для уравнения Блазиуса описана в [7], использована в работах автора (первая краткая публикация [8], полное изложение которой появилось лишь в [9]). Систематическое изложение такого преобразования можно найти в [10].

Введение новых переменных

$$f(\eta) = AF(\zeta), \quad \zeta = A\eta \qquad (11)$$

приводит уравнение (6) к тождественной форме

$$2\dddot{F} + F\ddot{F} = 0, \qquad (12)$$

где $\dot{F} = dF/d\zeta$, а постоянная A будет определена позже. Граничные условия (7), (8) и (10) примут вид

$$\zeta = 0: \; F(0) = 0, \; [\dot{F}(0)]^2 = \lambda\ddot{F}(0) \; (\lambda = \Lambda/A), \qquad (13)$$

$$\zeta \to \infty: \quad \dot{F}(\infty) \to 1/A^2. \qquad (14)$$

Из граничного условия (8), формул преобразования (11) и преобразованного граничного условия (14) следует, что постоянная A должна удовлетворять условию

$$A = 1/\sqrt{\dot{F}(\infty)}. \qquad (15)$$

начальные граничные условия можно выбрать равными

$$\zeta = 0: \quad F(0) = 0, \quad \dot{F}(0) = \sqrt{\lambda}, \quad \ddot{F}(0) = 1. \qquad (16)$$

Таким образом, задача решается в следующей последовательности.

Для произвольно выбранного λ определяются все условия (16) и выполняется численное интегрирование дифференциального уравнения (12). Оно производится до тех значений ζ, при которых $\dot{F}(\zeta)$ перестаёт изменяться. Это значение $\dot{F}(\zeta)$ принимается равным $\dot{F}(\infty)$. Таким образом, устанавливается значение постоянной A по формуле (15).

После этого с помощью (10) и (13) определяются величины

$$f'(\eta) = \dot{F}(\zeta)/\dot{F}(\infty), \quad \eta = \zeta/A = \sqrt{\dot{F}(\infty)}\zeta,$$

$$f'(0) = \frac{\dot{F}(0)}{\dot{F}(\infty)}, \; f''(0) = \frac{1}{[\dot{F}(\infty)]^{3/2}}, \; \Lambda = \frac{[f'(0)]^2}{f''(0)}.$$

Если необходимо получить функции $f(\eta)$, $f'(\eta)$, $f''(\eta)$, то они вычисляются ещё одним интегрированием уже уравнения (6) с известными начальными условиями $f(0)$, $f'(0)$ и $f''(0)$.

На рис. 2 – 4 приводятся результаты расчетов $\dot{F}(\infty)$ для ряда значений λ.

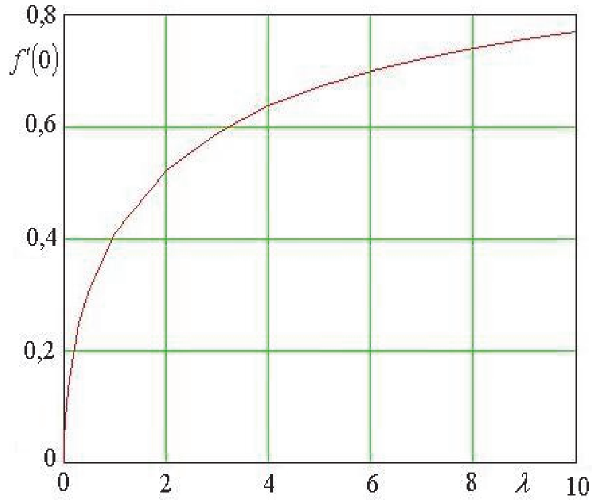

Рис. 2. Зависимость безразмерной скорости газа на границе раздела сред от параметра λ

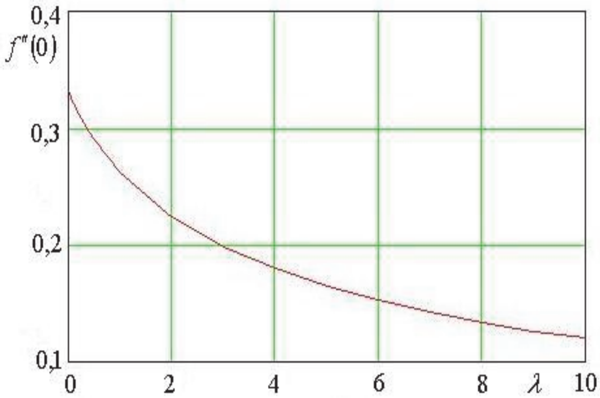

Рис. 3. Безразмерное трение на поверхности пластины в зависимости от параметра λ

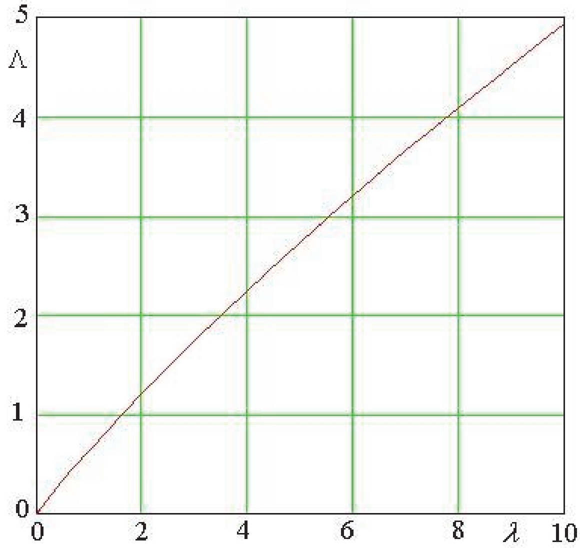

Рис. 4. Связь между параметрами λ и Λ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Федяевский К.К.* Поверхностное трение в турбулентном пограничном слое сжимаемого газа // Труды ЦАГИ. 1940. Вып. 516.
2. *Федяевский К.К.* Уменьшение сопротивления трения путем изменения физических констант жидкости у стенки // Известия АН СССР, сер. ОТН, 1943, №9-10; (см. также: Федяевский К.К. Избранные труды. Л.: Судостроение, 1975. С. 71-80.
3. *Лойцянский Л.Г.* Об изменении сопротивления тел путем заполнения пограничного слоя жидкостями с другими физическими константами // ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 1. С. 94-100.
4. *Shakhov V.G., Wang Binbin, Ji Simei.* Calculation of laminar boundary layer by integral method for two-fluids upon flat plate / Самолетостр. России. Пробл. и перспективы. Тезисы симп. с междунар. Участием. Самара: СГАУ, 2012. С. 428-430.
5. *Shakhov V.G., Xie Wei, Ji Simei.* Two-fluids boundary layers/ Управление движением и навигация летательных аппаратов // Сб. науч. тр. XVI Всеросс. н.-т. Семинара. Ч.1. Самара: СГАУ, 2013. С. 238 – 241.
6. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука. 712 с.
7. *На Ц.* Метод начальных значений для решения класса нелинейных уравнений в механике жидкостей // Теор. основы инж. расчётов. Сер. Д. 1970. №3. С. 87.
8. *Шахов В.Г.* Об автомодельных решениях уравнений сжимаемого ламинарного пограничного слоя с нулевым трением на стенке и вдувом // III Всесоюзн. научн.-техн. конф. по прикл. аэродин. Тезисы докл. Киев. 1973. С.179-180.
9. *Цыганов М.В., Шахов В.Г.* Ламинарный пограничный слой на пластине с движущейся поверхностью // Деп. в ВИНИТИ. 1987. №1379-В87. 14 с.
10. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982. 296 с.

TWO MEDIUM SELF-SIMILAR BOUNDARY LAYER ON A FLAT PLATE

Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolyov
(National Research University)

Conditions for the existence of self-similar boundary layer for the motion of two immiscible fluids were obtained. The introduction of new variables, initial boundary value problem is transformed into a problem with the initial conditions (Cauchy problem). The influence of the physical properties of the two media on the wall shear stress and velocity profile inside the boundary layer was studied.

Keywords: laminar boundary layer, the self similar flow, Cauchy problem.

Valentin Shakhov, Candidate of Technics, Professor at the Aircraft Construction and Design Department.
E-mail: shakhov@ssau.ru