

**ОБ ОПТИМАЛЬНОМ МНОГОМАРШРУТНОМ СКАНИРОВАНИИ
ДЛЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ**

© 2013 Ю.Н. Горелов¹, В.Е. Юрин^{2,3}

¹Институт проблем управления сложными системами РАН, г. Самара

²Самарский государственный университет

³ФГУП ГНП РКЦ «ЦСКБ-Прогресс», г. Самара

Поступила в редакцию 18.11.2013

Рассматривается задача оптимального многомаршрутного сканирования района зондирования для оптико-электронных космических аппаратов дистанционного зондирования Земли. Кратко изложены элементы теории оптимальных покрытий и в рамках ее математической модели рассмотрен вариант постановки задачи оптимального покрытия полосами двумерных областей с произвольными границами. Приведена полная математическая модель одиночного маршрута съёмки в режиме “push broom” («заметания»). Дана постановка новой прикладной задачи многомаршрутного сканирования района зондирования на основе математической модели теории оптимальных покрытий. Ключевые слова: космический аппарат, дистанционное зондирование, маршрут съёмки, математическая модель, полоса сканирования, оптимальное покрытие, радиус покрытия, система покрывающих «центров».

**ВВЕДЕНИЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ
ОПТИМАЛЬНЫХ ПОКРЫТИЙ**

Значительное число прикладных технических задач может быть сведено к постановке в терминах теории оптимальных покрытий [1, 2] и многие из них охватываются следующей математической моделью. Пусть заданы два замкнутых и ограниченных множества X и Y , а также определена функция $\rho(x, y) \forall x \in X$ и $\forall y \in Y$, которая непрерывна, неотрицательна и выпукла на X при любых $y \in Y$. Выделим в Y некоторую конечную систему его элементов – точек (или «центров» [2]) $y_k \in Y, k = 1, 2, \dots, n$, или $\{y_k\}_n \in Y$. Каждому «центру» $y_k \in Y$ и заданному числу $c > 0$ в X можно поставить в соответствие некоторое подмножество $E_c(y_k) = \{x \in X : \rho(x, y_k) \leq c\}$.

По определению [1, 2], система $\{y_k\}_n \in Y$ «покрывает» множество X с радиусом $c > 0$, если имеет место:

$$X \subset \bigcup_{k=1}^n E_c(y_k), \quad (1)$$

то есть для каждого $x \in X$ выполняется условие

$$\min_{k=1,2,\dots,n} \rho(x, y_k) \leq c. \quad (2)$$

Если при этом функцию $\rho(x, y)$ интерпретировать как некоторое условное расстояние от точки $x \in X$ до «центра» $y \in Y$, то (2) будет означать, что «расстояние» от точки $x \in X$ до ближайшего «центра» не будет превосходить значения $c > 0$. Число c в (1) и (2) – радиус покрытия (множества X системой «центров» $\{y_k\}_n \in Y (n \geq 1)$).

Для каждого «центра» $y_p \in \{y_k\}_n \in Y (1 \leq p \leq n)$ в X можно выделить подмножество $D(y_p) = \{x \in X : \rho(x, y_p) \leq \rho(x, y_k), \forall k = 1, 2, \dots, n, k \neq p\}$, которое называют областью Дирихле (или областью «влияния» соответствующего «центра» [2]). Размеры области Дирихле для p -го «центра» определяются следующим образом:

$$A_p = A_p(y_p) = \max_{x \in D(y_p)} \rho(x, y_p),$$

и, соответственно, «центр» $y_p \in \{y_k\}_n \in Y$ называется наилучшим, если не существует сколь угодно близкого к нему «центра» $\tilde{y}_p \in Y$ [2] (то есть $\|\tilde{y}_p - y_p\| \rightarrow 0$, где $\|(\cdot)\|$ – некоторая норма в Y), такого, что при замене им «центра» $y_p \in Y$ размеры области Дирихле убывают, то есть $A_p(\tilde{y}_p) < A_p(y_p)$. Если указанный «центр» $\tilde{y}_p \in Y$ существует, то $y_p \in Y$ является улучшаемым «центром», а процедура его замены на $\tilde{y}_p \in Y$ тогда называется улучшением «центра» $y_p \in Y$. В [1] доказано, что каждый улучшаемый «центр» с помощью некоторой процедуры (не-

Горелов Юрий Николаевич, доктор технических наук, профессор, заместитель директора по научной работе. E-mail: yungor07@mail.ru

Юрин Виталий Евгеньевич, аспирант, первый заместитель начальника отдела. E-mail: csdb@samtel.ru

прерывного) улучшения можно заменить на не-улучшаемый «центр». Соответственно, любая система «центров» $\{y_k\}_n \in Y$ ($n > 1$), которая содержит хотя бы один улучшаемый «центр» $y_q \in \{y_k\}_n \in Y$, может быть заменена, начиная, например, с y_q , некоторой системой неулучшаемых «центров» $\{\hat{y}_k\}_n \in Y$ с помощью какой-либо процедуры улучшения для каждого «центра» $y_p \in \{y_k\}_n \in Y$ ($1 \leq p \leq n$).

В рамках приведенной математической модели можно сформулировать следующую задачу, называемую задачей о минимальном радиусе покрытия [1, 2].

Задача 1. Требуется выбрать такую систему n «центров» $\{y_k\}_n \in Y$ ($n \geq 1$), чтобы условие (1) выполнялось для наименьшего радиуса покрытия $c > 0$.

Эта задача рассмотрена в [2], где для ее решения предложен сходящийся алгоритм улучшения системы «центров». Можно также сформулировать взаимную задачу к данной, а именно, задачу о минимальной системе «центров» в Y , покрывающую множество X для заданного радиуса покрытия.

Задача 2. Требуется для заданного радиуса покрытия $c > 0$ выбрать такую систему «центров» $\{y_k\}_n \in Y$, чтобы условие (1) выполнялось для наименьшего числа n .

Указанные задачи 1 и 2 являются основными задачами теории оптимальных покрытий, особенности которых существенно зависят: во-первых, от характера множеств X и Y , а также от вида и свойств функции $\rho(x, y)$, и, во-вторых, от содержания решаемых задач.

К ПОСТАНОВКЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОКРЫТИЙ

Простейшие варианты постановок основных задач теории оптимальных покрытий имеют место в случае, когда множества X и Y суть отрезки прямой, то есть $X, Y \subset R^1$, а $\rho(x, y) = |x - y|$ ($\forall x, y \in [a, b], -\infty < a < b < \infty$). При иных вариантах задания функции $\rho(x, y)$ здесь уже возможны содержательные постановки многих прикладных задач. То же самое имеет место и в тех случаях, когда множества X и Y более сложно устроены. Например, в [2] рассмотрен сходящийся алгоритм решения задачи о минимальном радиусе покрытия, в которой множества X, Y и функция $\rho(x, y)$ задаются так: множество $X \subset V$ – единичный квадрат плоскости $V \in R^2$, система покрывающих «центров» – система точек $\{y_k\}_n \in V$, а функция $\rho(x, y)$ является евклидовой нормой на плоскости V . К этой постановке можно свести ряд важных прикладных задач [2]. В связи с этим представляет интерес

следующее обобщение указанной задачи. Пусть множество X – ограниченная часть поверхности общего земного эллипсоида G , образом которой является однозначно и взаимно непрерывно отображающаяся в X область плоскости $V_X \subset V$, где V – плоскость, представляющая собой, например, одну из основных картографических проекций в виде проекции поверхности G на цилиндрическую поверхность. Соответственно, здесь Y задается в виде множества, совпадающего с X , а функция $\rho(x, y)$ задается длиной геодезической кривой, которая соединяет точки $x, y \in X$. Несмотря на то, что решение основных задач теории оптимальных покрытий в этом случае оказывается значительно более трудоемко, но, тем не менее, это позволяет рассмотреть новые подходы к решению ряда задач высшей геодезии.

Спектр прикладных задач теории оптимальных покрытий существенно обогащается в том случае, когда множества X и Y не только устроены более сложным образом, но их элементами являются объекты различного вида. В связи с этим рассмотрим следующий вариант постановок основных задач теории оптимальных покрытий. Пусть $X \subset V$ – ограниченная область плоскости $V \in R^2$, ее элементы суть точки $x \in V$, а множество Y – множество прямых $P \in V$. Соответственно, функцию $\rho(x, y)$ можно ввести как расстояние от точки $x \in X$ до прямой $L \in P$, проходящей через точку $x_0 \in V$ в направлении единичного орта $l_0 \in V$, то есть здесь $L = L(x_0, l_0)$, а именно:

$$\rho(x, y) = \min_{\theta \in R^1} \rho(x, x_0 + l_0 \theta) = \rho(x, L). \quad (3)$$

С учетом (3) и вида множеств X и Y можно сформулировать следующую задачу, аналогичную задаче о минимальном радиусе покрытия.

Задача 3. Требуется выбрать такую систему n «центров» $\{L_k\}_n \in P$ ($n \geq 1$), чтобы условие типа (1):

$$X \subset \bigcup_{k=1}^n E_h(L_k), \quad (4)$$

выполнялось для наименьшего значения $h > 0$, где $E_h(L_k) = \{x \in X : \rho(x, L_k) \leq h\}$ – полоса покрытия для «центра» $L_k \in P$, $h > 0$ – «радиус покрытия» или, с учетом геометрического характера множеств X и P , полуширина полосы покрытия.

Соответственно, можно сформулировать взаимную задачу к данной задаче.

Задача 4. Для заданной полуширины полосы покрытия $h > 0$ требуется выбрать такую систему «центров» $\{L_k\}_n \in P$, чтобы условие (4) выполнялось для наименьшего числа n .

Очевидно, что «центру» $L_p \in \{L_k\}_n \in \mathbf{P}$ ($1 \leq p \leq n$) в \mathbf{X} отвечает такая область Дирихле: $\mathbf{D}(L_p) = \{x \in \mathbf{X} : \rho(x, L_p) \leq \rho(x, L_k), \forall k = 1, 2, \dots, n, k \neq p\}$, а ее размеры определяются так:

$$A_p = A_p(L_p) = \max_{x \in \mathbf{D}(L_p)} \rho(x, L_p).$$

Соответственно, $L_p \in \{L_k\}_n \in \mathbf{P}$ будет не-улучшаемым «центром», если не существует сколь угодно близкого к нему «центра» $\tilde{L}_p \in \mathbf{P}$, для которого $A_p(\tilde{L}_p) < A_p(L_p)$. Здесь малость «расстояния» между парой таких «центров» подразумевается в смысле малости угла между прямыми $\tilde{L}_p(\tilde{x}_0, \tilde{l}_0)$ и $L_p(x_0, l_0)$ при условии, что $\tilde{x}_0, x_0 \in \mathbf{X}$.

С целью иллюстрации к задаче 3 рассмотрим следующий пример ее постановки и решения. Пусть множество \mathbf{X} – единичный квадрат плоскости, а система покрывающих его «центров» представляет собой совокупность трех прямых $\{L_1, L_2, L_3\}$. Очевидно, что в этом случае процедура улучшения для такой системы «центров» тривиальна и, в конечном счете, будет получена следующая не-улучшаемая система «центров» $\{\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3\}$, где $\hat{L}_k(x_k, l_k)$, $l_k = \text{col}(0, 1)$, $k = 1, 2, 3$, $x_1 = \text{col}(x^1, x^2) = (\frac{1}{6}, 0)$, $x_2 = (\frac{1}{2}, 0)$, $x_3 = (\frac{5}{6}, 0)$ и $h_{\min} = \frac{1}{6}$ (рис. 1).

Кроме того, можно найти еще одно решение этой же задачи с $h_{\min} = \frac{1}{6}$, а именно: $l_k = \text{col}(1, 0)$, $k = 1, 2, 3$, а также $x_1 = (0, \frac{1}{6})$, $x_2 = (0, \frac{1}{2})$, $x_3 = (0, \frac{5}{6})$. Вариант решения задачи здесь зависит как от задания начальной системы «центров» $\{L_1, L_2, L_3\}$, так и от принятого

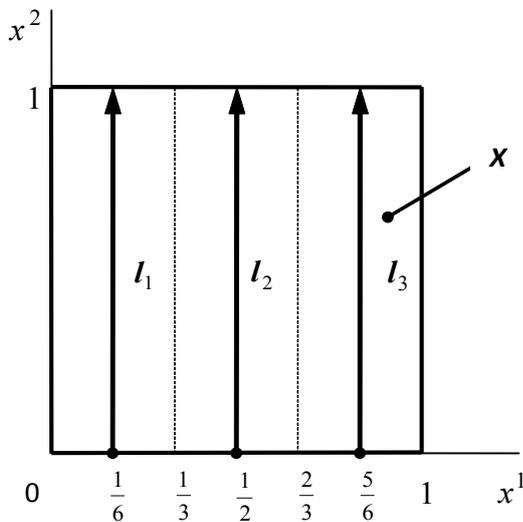


Рис. 1.

алгоритма последовательного их улучшения. Неединственность решения задачи обусловлена избыточной симметрией области \mathbf{X} . Если же ее задать в виде, например, прямоугольного треугольника с единичными катетами (рис. 2), то получим следующее единственное решение задачи:

$$\hat{L}_k(x_k, l_k), \quad l_k = \text{col}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad k = 1, 2, 3,$$

$$x_1 = \left(\frac{1}{6}, 0\right), \quad x_2 = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad x_3 = \left(\frac{5}{6}, 0\right) \quad \text{для}$$

$h_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{12}$; очевидно, что значение h_{\min} определяется минимальным характерным размером области \mathbf{X} .

В более общем случае в рассматриваемой задаче в качестве множества \mathbf{Y} можно выбрать множество кривых $L \in \mathbf{M}$ определенного вида, например, кривых, обладающих какими-либо специальными свойствами, а именно: гладких или кусочно-гладких кривых, кривых без самопересечения и ограниченной кривизны и т.п. Соответственно, тогда для процедуры улучшения такой системы «центров» следует ввести определенного вида операцию варьирования кривых. Кстати, нетрудно показать, что в рассматривавшемся выше примере замена множества \mathbf{P} на некоторое множество \mathbf{M} на решение задачи не повлияет. Тем не менее, если вместо (3) ввести другую функцию «расстояний» между точками $x \in \mathbf{X}$ и «центрами» $\{L_k\}_n \in \mathbf{M}$, то, в зависимости от содержания задачи, ее решение может оказаться в значительной степени нетривиальным.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАРШРУТА СЪЁМКИ И УСЛОВИЯ ЕГО СКАНИРОВАНИЯ

Предваряя постановку задачи многомаршрутного сканирования заданного района зондирования, вначале сформируем необходимую для

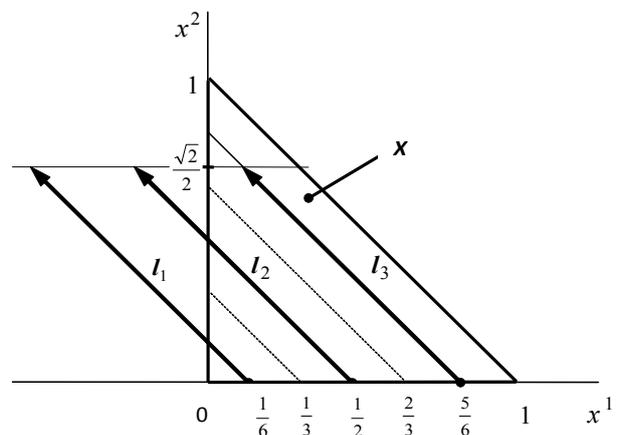


Рис. 2.

этого математическую модель маршрута съёмки в режиме “push broom” («заметания») с помощью оптико-электронной аппаратуры зондирования современных КА [3, 4]. И так, первое и основное необходимое условие сканирования маршрута съёмки имеет следующий вид [5]:

$$\mathbf{r}_{ЛВ} = \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_{КА}, \quad (5)$$

где $\mathbf{r}_{КА}$ – радиус-вектор КА (в гринвичской системе координат), \mathbf{r}_M – радиус-вектор центральной линии маршрута съёмки, а $\mathbf{r}_{ЛВ}$ – радиус-вектор линии визирования (ЛВ), которая задаёт требуемое положение оптической оси аппаратуры зондирования КА в пространстве. В условии (5) радиус-вектор $\mathbf{r}_{КА}$ определяется кинематическим уравнением движения КА $\mathbf{r}_{КА} = \mathbf{r}_{КА}(t)$, получаемым из решения дифференциальных уравнений его орбитального движения, радиус-вектор \mathbf{r}_M задается вектор-функцией дуговой координаты s , которая отсчитывается вдоль центральной линии маршрута съёмки: $\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_M(s)$, то есть $\mathbf{r}_{ЛВ}$ в (5), вообще говоря, вектор-функция двух аргументов: $\mathbf{r}_{ЛВ} = \mathbf{r}_{ЛВ}(t, s)$. Поэтому выполнение этого условия в каждый момент времени сканирования маршрута съёмки требует явного задания закона сканирования $s = s(t)$. Кроме центральной линии в виде пространственной кривой $\mathbf{L} = \mathbf{L}(s) = \mathbf{L}(\mathbf{r}_M(s))$, в модель маршрута съёмки необходимо включить еще модель аппроксимации части физической поверхности Земли (района зондирования) некоторой поверхностью $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$, по крайней мере, в пределах полосы сканирования, определяемой полосой захвата аппаратуры зондирования КА. Очевидно, что при этом должно иметь место: $\mathbf{L} = \Phi(\mathbf{r}_M(s))$, то есть $\mathbf{L} \subset \Phi$. Закон сканирования $s = s(t)$ можно получить как решение дифференциального уравнения

$$\frac{ds}{dt} = v_M(t, s), \quad s(t_0) = 0, \quad (6)$$

где t_0 – момент времени начала сканирования, а v_M – модуль вектора скорости скольжения конца радиус-вектора ЛВ, который определяется так: $\mathbf{v}_M = v_M d\mathbf{r}_M / ds$. Вектор скорости \mathbf{v}_M определяется следующими необходимыми условиями сканирования [5]: во-первых, это совмещение оси аппаратуры зондирования КА с ЛВ, и, во-вторых, пропорциональность проекции вектора \mathbf{v}_M на фокальную плоскость аппаратуры зондирования заданной скорости бега изображения текущей точки центральной линии маршрута съёмки \mathbf{w} , которая должна быть ортогональна приемной линейке ПЗС [3-5]. С учетом этих условий зависимость между v_M и $w = |\mathbf{w}|$ имеет следующий вид [5]:

$$w = \frac{f \sin \alpha}{D} v_M, \quad (7)$$

где $D(t) = \tilde{D}(t, s(t))$, $\tilde{D}(t, s) = |\mathbf{r}_{ЛВ}(t, s)|$, $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t, s)$ – угол между $\boldsymbol{\tau}(s)$ – касательным ортом к \mathbf{L} и ортом ЛВ – $\mathbf{e}_{ЛВ}(t) = \tilde{\mathbf{e}}_{ЛВ}(t, s(t))$, а f – параметр аппаратуры зондирования. Так как w обычно задается в виде некоторой программы $w(t)$, то с учетом (7) тогда можно определить $v_M(t, s)$ в (6), то есть получить, в конечном счете, из решения уравнения (6) закон сканирования $s = s(t)$. Поскольку

$$v_M(t, s) = \frac{\tilde{D}(t, s)}{f \sin \tilde{\alpha}(t, s)} w(t),$$

постольку уравнение (6), как основное уравнение закона сканирования, можно переписать так:

$$\frac{ds}{dt} = P(t, s) w(t), \quad s(t_0) = 0, \quad (8)$$

где $P(t, s) = \frac{\tilde{D}(t, s)}{f \sin \tilde{\alpha}(t, s)}$. Очевидно, что при

$w(t) > 0$ имеет место $\frac{ds}{dt} > 0$, то есть решение

уравнения (8) $s = s(t)$ – строго монотонно возрастающая функция ($\forall t \geq t_0$). В силу условий сканирования с вектором скорости \mathbf{v}_M определенным образом связан орт нормали, который задает требуемое положение плоскости сектора сканирования аппаратуры зондирования [5]:

$$\tilde{\mathbf{e}}_D(t, s) = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_D(t, s)}{\tilde{v}_D(t, s)},$$

где $\tilde{\mathbf{v}}_D(t, s) = \tilde{\mathbf{e}}_{ЛВ}(t, s) \times [\mathbf{v}_M(t, s) \times \tilde{\mathbf{e}}_{ЛВ}(t, s)]$, а также орт, который определяет требуемое положение линейки ПЗС [4, 5]:

$$\tilde{\mathbf{e}}_\pi(t, s) = \tilde{\mathbf{e}}_{ЛВ}(t, s) \times \tilde{\mathbf{e}}_D(t, s).$$

Тройка ортов: $\tilde{\mathbf{e}}_{ЛВ}(t, s)$, $\tilde{\mathbf{e}}_D(t, s)$, $\tilde{\mathbf{e}}_\pi(t, s)$, задает требуемую ориентацию КА в пространстве относительно сканируемого маршрута съёмки. Для синтеза программы углового движения КА при сканировании маршрута съёмки необходимо также (при условии совмещения осей его связанной системы координат с осями, задаваемыми указанной тройкой) определить вектор потребной угловой скорости КА $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{КА}(t, s)$. Его компоненты в гринвичской системе координат вычисляются по формулам, указанным в [5].

Таким образом, модель маршрута съёмки, с учетом приведённых необходимых условий сканирования, представляется центральной линией

$L = L(s)$ и моделью рельефа района зондирования в виде аппроксимирующей его поверхности $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$. К ним следует также присоединить основное уравнение закона сканирования маршрута съёмки (8).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО МНОГОМАРШРУТНОГО СКАНИРОВАНИЯ РАЙОНА ЗОНДИРОВАНИЯ В РЕЖИМЕ «PUSH BROOM» («ЗАМЕТАНИЯ»)

Переходя к постановке задачи оптимального многомаршрутного сканирования района зондирования, дополнительно введем в рассмотрение необходимые для этого модели. Вначале рассмотрим соответствующие модели для полосы сканирования, «заметаемой» на поверхности $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$ сектором сканирования аппаратуры зондирования КА $S = S(\mathbf{r})$, который определяется так [5]: начало в центре масс КА (задано радиус-вектором $\mathbf{r}_{КА}$); плоскость, в которой он лежит, задается нормалью \mathbf{e}_D , а его границы задаются крайними ЛВ (левой и правой по направлению сканирования маршрута съёмки), составляющими с центральной ЛВ, то есть с $\mathbf{r}_{ЛВ}$ ($\mathbf{e}_{ЛВ}$), угол ε_0 , равный половине угла сектора захвата аппаратуры зондирования ($\varepsilon_0 \ll \frac{\pi}{2}$ [3]); орты этих ЛВ вычисляются так:

$$\mathbf{e}_{ЛВ}^{(l)} = \mathbf{e}_{ЛВ} \cos \varepsilon_0 + (\mathbf{e}_D \times \mathbf{e}_{ЛВ}) \sin \varepsilon_0;$$

$$\mathbf{e}_{ЛВ}^{(r)} = \mathbf{e}_{ЛВ} \cos \varepsilon_0 - (\mathbf{e}_D \times \mathbf{e}_{ЛВ}) \sin \varepsilon_0.$$

С поверхностью $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$ сектор сканирования $S = S(\mathbf{r})$ пересекается по элементарной «полоске» (линии) $Q = Q(\mathbf{r})$ [5], которая пересекает центральную линию маршрута съёмки при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_M(s(t))$. При заданных маршруте съёмки $L(s)$, моменте начала его сканирования t_0 и законе сканирования $s = s(t)$, а также при заданном уравнении движения КА в виде $\mathbf{r}_{КА} = \mathbf{r}_{КА}(t)$, крайние ЛВ сектора S будут вычерчивать на поверхности Φ левую и правую границы полосы сканирования $\Pi = \Pi(\mathbf{r})$ относительно L , а именно: $\partial \Pi^{(l)} = \partial \Pi^{(l)}(\mathbf{r})$ и $\partial \Pi^{(r)} = \partial \Pi^{(r)}(\mathbf{r})$; остальные части границы Π – на момент начала сканирования и на момент его окончания – будут задаваться элементарными «полосками» $\partial \Pi^{(0)} = Q(\mathbf{r}(t_0))$ и $\partial \Pi^{(f)} = Q(\mathbf{r}(t_f))$ для соответствующих моментов времени. Проекция центральной линии маршрута съёмки L и полосы сканирования Π на поверхность общего земного эллипсоида G определяют кривую \tilde{L} и область $\tilde{\Pi}$, ограниченную соответствующими проекциями границ Π , а именно: $\partial \tilde{\Pi}^{(l)}$, $\partial \tilde{\Pi}^{(r)}$, $\partial \tilde{\Pi}^{(0)}$ и $\partial \tilde{\Pi}^{(f)}$. Поскольку $\mathbf{r} = \mathbf{r}(B, L, H)$, где B, L, H – геодезические координаты точки, задаваемой радиус-векто-

ром $\mathbf{r} \in \Phi$ (в гринвичской системе координат), то проекция этой точки на поверхность G будет задаваться радиус-вектором $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}(B, L, 0) \in G$. Связь между \mathbf{r} и $\tilde{\mathbf{r}}$ устанавливается с помощью модели поверхности Φ в виде модели рельефа района зондирования:

$$H = \Phi(B, L), \tag{9}$$

которую здесь можно рассматривать как уравнение поверхности $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$ в явном виде, а также как соответствующую параметризацию этой поверхности [6]. Далее модель маршрута съёмки (при заданных $\mathbf{r}_{КА} = \mathbf{r}_{КА}(t)$ и $s = s(t)$), представленную его центральной линией L и полосой сканирования Π , будем называть физической моделью, а модель маршрута съёмки в виде проекций L и Π на эллипсоид G , то есть \tilde{L} и $\tilde{\Pi}$, – геодезической моделью (или моделью в геодезических координатах), в состав которой следует также включить и модель рельефа (9).

С учетом (9) для поверхности Φ можно ввести векторную параметризацию в виде [6]:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(B, L),$$

а векторное уравнение кривой $L \in \Phi$ в пространстве тогда можно записать в виде

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\psi}(\theta),$$

где θ – параметр, а $\boldsymbol{\psi}(\theta) = \mathbf{f}(\psi_1(\theta), \psi_2(\theta))$. Линии L на Φ в плоской области V отвечает ее образ в виде параметризованной кривой l , уравнения которой имеют вид

$$B = \psi_1(\theta); L = \psi_2(\theta); \tag{10}$$

они называются внутренними уравнениями кривой L на Φ [6]. Соответственно, и для G можно записать векторное уравнение $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(B, L)$, где $\tilde{\mathbf{r}} \in G$ – радиус-вектор точки, которая является проекцией точки с радиус-вектором \mathbf{r} . Тогда линию $\tilde{L} \in G$ в пространстве также можно задать векторным уравнением

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\boldsymbol{\psi}}(\theta),$$

где $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\theta) = \tilde{\mathbf{f}}(\psi_1(\theta), \psi_2(\theta))$. Образом \tilde{L} в области V будет кривая \tilde{l} . Очевидно, что она будет описываться уравнениями (10) и, стало быть, кривые l и \tilde{l} в области V совпадают, а уравнения (10) также будут внутренними уравнениями и для кривой \tilde{L} на G .

Введение естественной параметризации центральной линии маршрута съёмки и ее проекции на поверхность общего земного эллипсоида при формировании моделей $L = L(s)$ и $\tilde{L} = \tilde{L}(\tilde{s})$ (здесь \tilde{s} – дуговая координата, отсчитываемая от начала кривой \tilde{L} , которому соответствует начало центральной линии маршрута съёмки $L(0)$), а также указание связи между s и \tilde{s} тре-

будет вычисления дифференциалов дуг на поверхностях Φ и G , а именно:

$$ds^2 = \left[E \left(\frac{dB}{d\theta} \right)^2 + 2F \left(\frac{dB}{d\theta} \right) \left(\frac{dL}{d\theta} \right) + G \left(\frac{dL}{d\theta} \right)^2 \right] d\theta^2;$$

$$d\tilde{s}^2 = \left[\tilde{E} \left(\frac{dB}{d\theta} \right)^2 + \tilde{G} \left(\frac{dL}{d\theta} \right)^2 \right] d\theta^2,$$

где $E = \left(\frac{\partial f}{\partial B} \right)^2$, $F = \left(\frac{\partial f}{\partial B} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial L} \right)$, $G = \left(\frac{\partial f}{\partial L} \right)^2$

и $\tilde{E} = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial B} \right)^2$, $\tilde{G} = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial L} \right)^2$ – коэффициенты пер-

вых квадратичных форм, соответственно, для поверхностей Φ и G (здесь $\tilde{F} \equiv 0$, так как геодезические координаты B, L образуют на G ортогональную систему) [6]. Очевидно, что естественная параметризация геодезической модели маршрута съёмки (с параметром \tilde{s}) более удобна для задания и описания его основных элементов и характеристик. В конечном счете, исключение параметра θ в $r = \psi(\theta)$ и $\tilde{r} = \tilde{\psi}(\theta)$ доставляет искомую связь: $s = \varphi(\tilde{s})$. В свою очередь, естественная параметризация физической модели маршрута съёмки вводится тогда, когда необходимо найти закон его сканирования из решения (10) и сформировать соответствующую программу углового движения КА, а также при вычислении какого-либо показателя качества сканирования маршрута съёмки с учетом рельефа района зондирования [5].

В дополнение к образу центральной линии маршрута съёмки в виде кривой l в области V введем также образ полос сканирования Π и $\tilde{\Pi}$ в виде области $V_\Pi \subset V$, границы которой определяются внутренними уравнениями для левой, правой, начальной и конечной границ Π (или $\tilde{\Pi}$). В связи с этим необходимо отметить, что границы полосы сканирования для заданного маршрута съёмки, вообще говоря, зависит от выбора начального момента времени сканирования t_0 и закона сканирования $s = s(t)$ или $\tilde{s} = \varphi^{-1}(s(t))$. Поэтому ширина полосы сканирования (точнее, ее максимальная полуширина), вообще говоря, будет варьироваться соответствующим образом. Поскольку ее поперечные размеры определяются, в первую очередь, постоянным углом сектора захвата аппаратуры зондирования, постольку в качестве радиуса покрытия далее будет рассматриваться параметр ϵ_0 .

Переходя непосредственно к постановке задачи, введем в рассмотрение: во-первых, модель

района зондирования в виде заданной области $\tilde{X} \subset G$, образом которой в V является $V_X \subset V$; во-вторых, множество «центров» $\tilde{Y} \subset G$, с элементами в виде гладких кривых без самопересечений и ограниченной кривизны $M \in \tilde{Y} \subset G$. На каждой такой кривой будет указываться какая-либо «начальная» точка $m_0 \in M$, от которой вдоль кривой $M = M(\tilde{s})$ в направлении сканирования отсчитывается дуговая координата \tilde{s} . Кроме того, введем также функцию «расстояния» от точек $x \in \tilde{X}$ до кривых $M \in \tilde{Y}$, определяя ее как наименьшую длину геодезической кривой (на поверхности G), соединяющую $x \in \tilde{X}$ с точкой $m(\tilde{s}_x) \in M$, то есть $\rho(x, M) = \rho(x, m(\tilde{s}_x))$, где \tilde{s}_x – дуговая координата точки $m(\tilde{s}_x) \in M$, наиболее близкой к точке $x \in \tilde{X} \subset G$. Если $\xi \in V_X$ – образ точки $x \in \tilde{X}$, а $\mu(\theta) \in V_Y \subset V$ – образ кривой $m(\tilde{s}) \in M$, то и в области V можно также ввести функцию «расстояния», приняв $\rho(\xi, \mu) = \rho(\xi, \mu(\theta_\xi)) = \rho(x, M)$, где значение параметра θ_ξ соответствует значению \tilde{s}_x .

Итак, выделим в \tilde{Y} некоторую конечную систему «центров» $M_k \in \tilde{Y}$, $k = 1, 2, \dots, n$, или $\{M_k\}_n \in \tilde{Y}$, указав для каждого из них «началь-

ную» точку $m_0^{(k)} \in M_k$ и направление отсчета дуговой координаты \tilde{s} . Кроме того, введем интервалы $[t_0^{(k)}, t_f^{(k)}]$ и законы сканирования $s^{(k)} = s^{(k)}(t)$, $\forall t \in [t_0^{(k)}, t_f^{(k)}]$ (либо $\tilde{s}^{(k)} = \varphi_k^{-1}(s^{(k)}(t))$). Очевидно, что из условий физической реализуемости необходимо, чтобы

$$\bigcap_{k=1}^n [t_0^{(k)}, t_f^{(k)}] = \emptyset, \text{ и, если «центры» перену-}$$

мерованы в порядке сканирования соответствующих им маршрутов съёмки, то должно выполняться еще одно условие:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (t_0^{(k+1)} - t_f^{(k)}) \geq T_{\min}, \text{ где } T_{\min} \text{ – суммарное}$$

минимально допустимое время, необходимое для перенацеливания аппаратуры зондирования КА на межмаршрутных интервалах. На выбор «начальных» точек $m_0^{(k)} \in M_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) также

накладываются такие ограничения, чтобы начальные элементарные «полоски» $\partial \tilde{\Pi}_k^{(0)}$ находились за пределами района зондирования

$\tilde{X} \subset G$, а при выборе законов сканирования и

интервалов $[t_0^{(k)}, t_f^{(k)}]$ то же самое должно обеспечиваться и для $\partial \tilde{\Pi}_k^{(f)}$. Очевидно, что с учетом

указанных ограничений для системы «центров» $\{M_k\}_n \in \tilde{Y}$, для заданной траектории полёта КА $r_{КА} = r_{КА}(t)$ и заданном параметре $\epsilon_0 > 0$, рассматриваемом как «радиус покрытия» для \tilde{X} , каждому такому «центру» можно поставить в соответствие подмножество в \tilde{X} в виде пересечения района зондирования и k -й полосы сканирования: $E_{\epsilon_0}(M_k) = \{x \in \tilde{X} \cap \tilde{\Pi}_k\}$, и для каждого «центра» $M_p \in \{M_k\}_n \in \tilde{Y}$ ($1 \leq p \leq n$) в \tilde{X} можно указать его область Дирихле

$$D(M_p) = \{x \in \tilde{X} : \rho(x, M_p) \leq \rho(x, M_k), \forall k = 1, 2, \dots, n, k \neq p\},$$

размеры которой можно определить так:

$$A_p = A_p(M_p) = \max_{x \in D(M_p)} \rho(x, M_p).$$

По определению, система $\{M_k\}_n \in \tilde{Y}$ покрывает множество \tilde{X} с радиусом $\epsilon_0 > 0$, если выполняется условие:

$$\tilde{X} \subset \bigcup_{k=1}^n E_{\epsilon_0}(M_k), \quad (11)$$

то есть каждая точка района зондирования $x \in \tilde{X}$ в этом случае будет принадлежать хотя бы одной из полос сканирования $\tilde{\Pi}_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Теперь можно сформулировать следующую задачу, которая аналогична задаче о минимальном радиусе покрытия (задача 1 или задача 3), а также взаимную к ней задачу.

Задача 5. Для заданного \tilde{X} требуется выбрать такую систему n «центров» $\{M_k\}_n \in \tilde{Y}$ ($n \geq 1$), чтобы условие (11) для него выполнялось с наименьшим значением $\epsilon_0 > 0$.

Соответственно, можно сформулировать и взаимную задачу к данной задаче.

Задача 6. Для заданного параметра $\epsilon_0 > 0$ требуется выбрать такую систему «центров» $\{M_k\}_n \in \tilde{Y}$, чтобы условие (11) выполнялось для наименьшего числа n .

Таким образом, в терминах теории оптимальных покрытий сформулированы основные задачи оптимального многомаршрутного сканирования произвольного района зондирования, характерные размеры которого существенно превышают ширину полосы захвата оптико-электронной аппаратуры зондирования КА ДЗЗ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена постановка задачи многомаршрутного сканирования в режиме «push broom» («заметания») [3-5] районов зондирования с

произвольными границами. Постановку данной задачи отличает применение математической модели теории оптимальных покрытий заданных областей некоторой системой «центров» [1, 2] и их выбор в виде множества гладких или кусочно-гладких кривых без самопересечения и ограниченной кривизны, моделирующих проекции центральных маршрутов съёмки на поверхность общего земного эллипсоида. Сформулированы основные варианты задачи, которые аналогичны задачам о минимальном радиусе покрытия и о минимальном числе «центров». При этом в качестве радиуса покрытия принят угол захвата сектора сканирования аппаратуры зондирования КА. В рамках постановки рассматриваемой задачи приведены общие модели для произвольных маршрутов съёмки, которые допускают учет рельефа района зондирования при построении полос сканирования для них. Решение задачи многомаршрутного сканирования районов зондирования необходимо для формирования программы управления угловым движением КА ДЗЗ, в том числе для оптимизации соответствующего паттерна управления [7]. Кратко изложены элементы основной математической модели теории оптимальных покрытий. Также приведены примеры более сложных вариантов задания покрываемого множества и множества «центров» при постановке основной задачи о минимальном радиусе покрытия.

Исследование проведено при поддержке РФФИ, проекты № 13-08-97019 p_поволжье_a и № 13-08-97002 p_поволжье_a.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пиявский С.А. Об оптимизации сетей // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1968. № 1. С.68-80.
2. Брусов В.С., Пиявский С.А. Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости // Журнал ВМ и МФ. 1971. Т. 11. № 2. С.304-312.
3. Лебедев В.В., Гансвинд И.Н. Проектирование систем космического мониторинга / Основы дистанционного зондирования. М.: Техносфера, 2006. 336 с.
4. Бакланов А.И. Системы наблюдения и мониторинга. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 234 с.
5. Горелов Ю.Н., Данилов С.Б., Мантуров А.И., Пермяков А.В. Оптимальное управление сканированием маршрутов съёмки для КА дистанционного зондирования Земли // Общерос. научно-техн. журнал «Поляр». 2009. № 9. С.49-55.
6. Александров А.Д., Нецветов Н.Ю. Геометрия. М.: Наука, 1990. 672 с.
7. Горелов Ю.Н., Данилов С.Б., Курганская Л.В., Мантуров А.И., Морозова М.В., Соллогуб А.В. Оптимизация управления сканированием для геометрически сложных маршрутов съёмки при дистанционном

зондировании Земли из космоса // Сб. тр. XX
С.-Петербургской междунар. конф. по интегрирован-

ным навигационным системам. СПб.: ГИЦ РФ
ЦНИИ "Электронприбор", 2013. С.212-220.

ABOUT THE OPTIMAL MULTIROUTE SENSING PROBLEM FOR THE EARTH REMOTE-SENSING SATELLITES

© 2013 Yu.N. Gorelov¹, V.E. Yurin^{2,3}

¹Institute for the Control of Complex Systems of RAS, Samara

²Samara State University

³Federal State Unitary Enterprise

"State Research and Production Space Rocket Center "TsSKB-Progress", Samara

The article deals with the problem of optimal multiroute sensing of survey areas by the Earth remote sensing spacecraft. The elements of the optimal coatings theory are summarized in this paper. Also it is reviewed the problem's statement variant of the optimal coating by strips of two-dimensional domains with arbitrary boundaries as part of that theory. The complete mathematical model of the single route in the "push broom"-mode is given. It is formulated a new application task of multiroute sensing area survey based on a mathematical model of the optimal coatings theory.

Keywords: spacecraft, remote sensing, the mathematical model, scan line, optimal coverage, coverage range, the covering "centers" system.

Yury Gorelov, Doctor of Technics, Deputy Director for Science.

E-mail: yungor07@mail.ru

Vitaly Yurin, Graduate Student, Deputy Chief of Department.

E-mail: yurin.vit@yandex.ru