

УДК 624.072.2.012.35

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В СТАЛЬНОМ ЛИСТЕ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ

© 2013 Н.С. Бухман, Ю.В. Жильцов

Самарский государственный архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 29.11.2013

В статье представлены результаты определения коэффициентов распределения напряжений в поперечном армировании из стального листа в железобетонных балках на действие поперечной силы. Приведено сопоставление нормативной и предлагаемой методики расчета с опытными значениями.

Ключевые слова: *изгибаемый железобетонный элемент, поперечное армирование, наклонное сечение*

Опытные исследования на железобетонных образцах [1] с применением тензометрического измерения деформаций на стальном листе и бетоне, показывают, что поперечное армирование из стального листа в зоне поперечного изгиба находится в плосконапряженном состоянии. В стальном листе одновременно действуют нормальные и касательные напряжения, в связи с чем площадка главных растягивающих напряжений находится под углом к продольной оси балки. Расчет наклонного сечения с жестким поперечным армированием

на действие поперечной силы по нормативному документу [2] не учитывает плосконапряженное состояние стального листа и угол наклона главной площадки растягивающих напряжений, что при расчете приводит к значительному расхождению с фактической несущей способностью. Автором [3] предлагается условие прочности железобетонных балок по наклонному сечению, позволяющее учесть плосконапряженное состояние поперечного армирования из стального листа.

$$Q_b + Q_{верт} + Q_s + Q_\tau = R_{bt} \cdot b \cdot h_0 \cdot \left[k_1 + k_2 \left(\frac{h_0}{a} \right)^{1,5} \right] + k_{ж1} R_{cm} t_{cm} c_0 + \frac{R_s A_s c_0}{h_0 \gamma_v^*} + \frac{k_{ж2} R_{cm} J t_{cm}}{S_{0,5сечения}} \quad (1)$$

где Q_b , Q_s – поперечное усилие воспринимаемое бетоном и поперечное усилие, воспринимаемое продольной арматурой, соответственно [4]; $Q_{верт}$ и Q_τ – вертикальное и касательное усилие, воспринимаемые стальным листом, предложенное автором [3].

Плосконапряженное состояние стального листа учитывается введением коэффициентов $k_{ж1}$, $k_{ж2}$ в $Q_{верт}$ и Q_τ . Коэффициенты учитывают взаимосвязь условия прочности стали при действии двухосного напряженного состояния и имеют зависимость между собой в виде (2)

$$k_{ж2} = \sqrt{\frac{1 - k_{ж1}^2}{3}} \quad (2)$$

Определение коэффициентов $k_{ж1}$, $k_{ж2}$ сводится к решению равенства (3) в котором одновременно увязан угол наклона главной площадки напряжений, с проекцией критической наклонной трещины и уравнением прочности плосконапряженного

состояния стали.

$$\frac{h_0 - x}{h_0 \cdot \sqrt{3 \frac{1 - k_{ж1}}{1 + k_{ж1}}}} = \left(\frac{\frac{3}{2} k_2 \cdot R_{bt} \cdot b}{k_{ж1} \cdot R_{cm} \cdot t_{cm} + \frac{R_s \cdot A_s}{h_0 \cdot \gamma_v^*}} \right)^{0,4} \quad (3)$$

Решение уравнения (3) выполняется аналитически. Для отыскания коэффициентов рассмотрим диапазон изменения входящих в формулу прочностных характеристик материалов, геометрических характеристик и коэффициентов:

$$\begin{aligned} 80 \leq h_0 \leq 700; \quad 15 \leq x \leq 0,5h_0; \quad 100 \leq b \leq 700; \\ 0,7 \leq R_{bt} \leq 1,7; \quad 0 \leq k_{ж1} \leq 1; \quad 0,7 \leq k_2 \leq 1,7; \\ 1,5 \leq t_{cm} \leq 30; \quad 200 \leq R_{cm} \leq 415; \quad 215 \leq R_s \leq 500; \\ 400 \leq A_s \leq 6000; \quad 5 \leq \gamma_v^* \leq 22. \end{aligned}$$

С целью упрощения решения произведем замену:

$$k_{ж1} = k; \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{x}{h_0} \right); \quad \beta = \frac{3}{2} \frac{k_2 \cdot R_{bt} \cdot b}{R_{cm} \cdot t_{cm}};$$

Бухман Николай Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей и прикладной физики и химии. E-mail: nic341rambler@rambler.ru.

Жильцов Юрий Викторович, ассистент кафедры строительных конструкций. E-mail: zzilz@mail.ru

$$\gamma = \frac{R_s \cdot A_s}{h_0 \cdot \gamma_v^* \cdot R_{cm} \cdot t_{cm}}$$

После преобразования выражение (3) примет вид:

$$\alpha^2 \cdot \left(\frac{1+k}{1-k} \right) = \frac{\beta^{\frac{4}{5}}}{(k+\gamma)^{\frac{4}{5}}} \quad (4)$$

Тогда k в уравнение (4) будет существовать при выполнении условий:

$$\gamma^4 \leq \frac{\beta^4}{\alpha^{10}}; \quad \gamma^2 \leq \frac{\beta^2}{\alpha^5}; \quad \alpha^5 \gamma^2 \leq \beta^2$$

На рис. 1 представлен график зависимости γ от k .

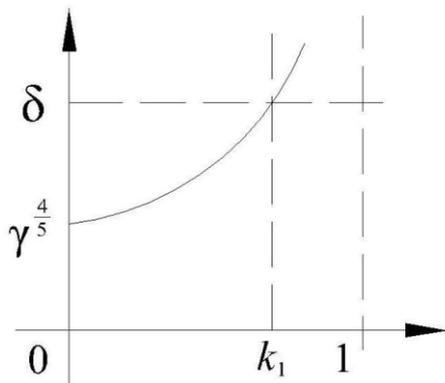


Рис. 1. График зависимости γ от k

Умножим выражение (4) на $(k+\gamma)$ и получим:

$$\frac{(k+\gamma)(1+k)}{1-k} = \frac{\beta^{\frac{4}{5}}}{\alpha^2} (k+\gamma)^{\frac{1}{5}} \quad (5)$$

Принимая для уравнения (5) вторую замену $\delta = \alpha^{-2} \cdot \beta^{\frac{4}{5}}; y = 1 - k; k = 1 - y$ (при этом $y \leq 1$) получим:

$$\frac{(1+\gamma-y)(2-y)}{y} = \delta(1+\gamma-y)^{\frac{1}{5}} \quad (6)$$

В первом приближении из (6) получим:

$$\delta(1+\gamma-y)^{\frac{1}{5}} \cong \delta(1+\gamma)^{\frac{1}{5}} \left[1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{y}{1+\gamma} \right]^{\frac{1}{5}} \quad (7)$$

Произведем третью замену подставив в (7) $\gamma_1 = 1 + \gamma, \delta_1 = \delta \cdot \gamma_1^{\frac{1}{5}}$ и перенеся все в левую часть, получим квадратное уравнение:

$$y^2 \left(1 + \frac{\delta_1}{5\gamma_1} \right) - (2 + \gamma_1 + \delta_1)y + 2\gamma_1 = 0 \quad (8)$$

Решением квадратного уравнения будет:

$$y = \frac{(2 + \gamma_1 + \delta_1) - \sqrt{(\gamma_1 + \delta_1) \cdot (\gamma_1 + \delta_1 + 4) - \frac{(20\gamma_1 + \delta_1)}{5\gamma_1}}}{2 \left(1 + \frac{\delta_1}{5\gamma_1} \right)} \quad (9)$$

Тогда в первом приближении значение k с учетом того, что $k \geq 0$ будет:

$$k = 1 - \frac{(2 + \gamma_1 + \delta_1) - \sqrt{(\gamma_1 + \delta_1) \cdot (\gamma_1 + \delta_1 + 4) - \frac{(20\gamma_1 + \delta_1)}{5\gamma_1}}}{2 \left(1 + \frac{\delta_1}{5\gamma_1} \right)} \quad (10)$$

Произведем уточнение $k_{ж1}$ методом аппроксимации. Для уточнения в уравнении (4) произведем замену $\delta = \beta^{4/5} / \alpha^2$. Предположим, что степень есть $p = 4/5$, тогда степень можно записать как $p = 4/5 = 1 - 1/5 = 1 - v$, в этом случае k является функцией от v , то есть $k = k(v)$ где $v = 1/5$, тогда уравнение (4) примет вид:

$$\frac{1+k}{1-k} = \frac{\delta}{(k+\gamma)^{1-v}} \quad (11)$$

Решим функцию при $v=0$, то есть $k_0 = k(0)$ – ? Подставим $v=0$ в (11), получим квадратное уравнение:

$$k_0^2 + (1 + \gamma + \delta)k_0 + (\gamma - \delta) = 0 \quad (12)$$

Решением уравнения (12) будет:

$$k_0 = \frac{\left[\sqrt{(1 + \gamma + \delta)^2 + 4 \cdot (\delta - \gamma)} - (1 + \gamma + \delta) \right]}{2} \quad (13)$$

Если предположить, что в формуле (12) $k=0$, тогда $\delta \geq \gamma^{4/5}$. Если $k \cong 1$, тогда $k = 1 - \Delta k, \Delta k \ll 1$, уравнение (11) примет вид:

$$\frac{2 - \Delta k}{\Delta k} (\gamma + 1 - \Delta k)^{\frac{4}{5}} = \delta \quad (14)$$

В нулевом приближении уравнения (14) будем иметь следующее

$$2(1 + \gamma)^{\frac{4}{5}} = \delta \Delta k; \quad \Delta k^{(0)} = 2\delta^{-1}(1 + \gamma)^{\frac{4}{5}} \quad (15)$$

Выразим $k^{(0)}$ из (14):

$$k^{(0)} = 1 - 2 \frac{(1 + \gamma)^{\frac{4}{5}}}{\delta} \quad (16)$$

Произведем уточнение:

$$\begin{aligned} \Delta k &= \delta^{-1} (2 - \Delta k) (\gamma + 1 - \Delta k)^{\frac{4}{5}} = \delta^{-1} (2 - \Delta k) (1 + \gamma)^{\frac{4}{5}} \left[1 - \frac{\Delta k}{1 + \gamma} \right]^{\frac{4}{5}} = \\ &\cong \delta^{-1} 2(1 + \gamma)^{\frac{4}{5}} \left[\left(1 - \frac{\Delta k}{2} \right) \left(1 - \frac{\Delta k}{1 + \gamma} \right) \right]^{\frac{4}{5}} \cong \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cong 2\delta^{-1}(1+\gamma)^{\frac{4}{5}} \left[1 + \Delta k \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\gamma} \right) \right] \cong \\ &\cong 2\delta^{-1}(1+\gamma)^{\frac{4}{5}} \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1+\gamma} \right) \cdot 2\delta^{-1}(1+\gamma)^{\frac{4}{5}} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда, выразив δ , получим условие существования уравнения:

$$\left(1 + \frac{2}{1+\gamma} \right) \cdot (1+\gamma)^{\frac{4}{5}} \ll \delta \quad (18)$$

Условие (18) выполняется, если:

$$\delta \gg \left(1, \gamma^{\frac{4}{5}} \right); \quad \delta \gg (1+\gamma)^{\frac{4}{5}}; \quad \delta \gg (1+\gamma)^{\frac{4}{5}} \quad (19)$$

Условие (19) выполняется при $k \cong 1$. Если $k \sim 1$, тогда (11) есть функция:

$$f = \frac{1+k}{1-k} \cdot (\gamma+k)^{\frac{4}{5}} = \delta \quad (20)$$

Рассмотрим функцию:

$$\varphi(k) = (1+k) \cdot (\gamma+k)^{\frac{4}{5}} \quad (21)$$

Предполагая схожесть (21) с $(a+bx+cx^2)$ при $0 < x < 1$, рассмотрим график изменения функции $\varphi(k)$ на трех участках (рис. 2). Тогда аппроксимирующую функцию можно принять в виде многочлена:

$$\begin{aligned} \varphi(k) &\approx \varphi_0 \frac{(k-k_1)(k-k_2)}{(k_0-k_1)(k_0-k_2)} + \\ &+ \varphi_1 \frac{(k-k_0)(k-k_2)}{(k_1-k_0)(k_1-k_2)} + \varphi_2 \frac{(k-k_0)(k-k_1)}{(k_2-k_0)(k_2-k_1)} = \\ &= \gamma^{\frac{4}{5}} \frac{\left(k - \frac{1}{2} \right) (k-1)}{\left(0 - \frac{1}{2} \right) (0-1)} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} + \gamma \right)^{\frac{4}{5}} \frac{(k-0)(k-1)}{\left(\frac{1}{2} - 0 \right) \left(\frac{1}{2} - 1 \right)} + \\ &\quad + 2(1+\gamma)^{\frac{4}{5}} \frac{(k-0) \left(k - \frac{1}{2} \right)}{(1-0) \left(1 - \frac{1}{2} \right)} = \\ &= k^2 \left[2\gamma^{\frac{4}{5}} - 6 \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^{\frac{4}{5}} + 4(\gamma+1)^{\frac{4}{5}} \right] + \\ &\quad + k \left[-3\gamma^{\frac{4}{5}} + 6 \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^{\frac{4}{5}} - 2(\gamma+1)^{\frac{4}{5}} \right] + \left[\gamma^{\frac{4}{5}} \right] = \\ &= ak^2 + bk + c = \delta(1-k) \end{aligned} \quad (22)$$

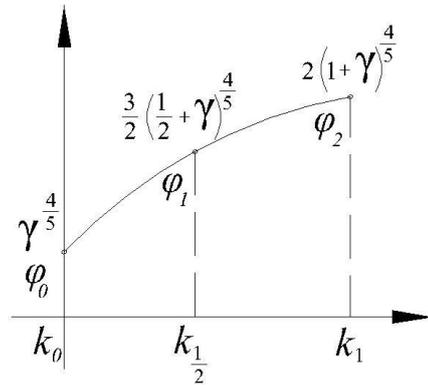


Рис. 2. График зависимости функции $\varphi(k)$

Для упрощения решения (22) запишем:

$$\begin{aligned} a &= \left[2\gamma^{\frac{4}{5}} - 6 \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^{\frac{4}{5}} + 4(\gamma+1)^{\frac{4}{5}} \right]; \\ b &= \left[-3\gamma^{\frac{4}{5}} + 6 \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^{\frac{4}{5}} - 2(\gamma+1)^{\frac{4}{5}} \right]; \quad c = \left[\gamma^{\frac{4}{5}} \right] \end{aligned}$$

Найдем решение уравнения (22). Перенеся все в левую часть, получим квадратное уравнение:

$$ak^2 + (b + \delta)k + (c - \delta) = 0 \quad (23)$$

С учетом того, что $k \geq 0$ окончательным решением квадратного уравнения будет:

$$k = \frac{\sqrt{(b + \delta)^2 - 4a(c - \delta)} - (b + \delta)}{2a} \quad (24)$$

Тогда коэффициент $k_{ж1}$ полученный из уравнения (3), и коэффициент $k_{ж2}$ с учетом (2) можно записать:

$$k_{ж1} = \frac{\sqrt{(b + \delta)^2 - 4a(c - \delta)} - (b + \delta)}{2a} \quad (25)$$

$$k_{ж2} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{\sqrt{(b + \delta)^2 - 4a(c - \delta)} - (b + \delta)}{2a} \right)^2}{3}} \quad (26)$$

где $a, b, c, \delta, \alpha, \beta, \gamma$ замена, принятая для упрощения отыскания коэффициентов:

$$\begin{aligned} a &= \left[2\gamma^{\frac{4}{5}} - 6 \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^{\frac{4}{5}} + 4(\gamma+1)^{\frac{4}{5}} \right]; \\ b &= \left[-3\gamma^{\frac{4}{5}} + 6 \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^{\frac{4}{5}} - 2(\gamma+1)^{\frac{4}{5}} \right]; \end{aligned}$$

$$c = \left[\gamma^{\frac{4}{5}} \right]; \quad \delta = \frac{\beta^{\frac{4}{5}}}{\alpha^2}; \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{x}{h_0} \right);$$

$$\beta = \frac{3 k_2 \cdot R_{bt} \cdot b}{2 R_{cm} \cdot t_{cm}}; \quad \gamma = \frac{R_s \cdot A_s}{h_0 \cdot \gamma_v^* \cdot R_{cm} \cdot t_{cm}}$$

Найденные выражения для коэффициентов $k_{ж1}$ и $k_{ж2}$, позволяют учесть напряженно-деформированное состояние поперечного армирования из

стального листа. Подстановка фактических прочностных и геометрических характеристик опытных образцов из [1, 5] в условие прочности (3) с учетом коэффициентов распределения напряжений $k_{ж1}$ и $k_{ж2}$ для определения несущей способности по наклонному сечению показывает лучшую сходимость расчетных и опытных значений по сравнению с нормативными методиками [2, 6]. Результаты сопоставления приведены в табл. 1.

Таблица 1. Сопоставление расчетных и опытных значений несущей способности

Марка образца	$c_{факт}$, мм	$Q_p^{оп}$, кН	Q_p^T , кН [6]	$Q_p^{оп}/Q_p^T$ [6]	Q_p^T , кН [2]	$Q_p^{оп}/Q_p^T$ [2]	Q_p^T , кН [1] с $k_{ж1}$ и $k_{ж1}$	$Q_p^{оп}/Q_p^T$ [1] с $k_{ж1}$ и $k_{ж1}$
Б1-Вс	294	290	202,73	1,43	139,62	2,08	265,09	1,09
Б2-Вс	294	289	216,69	1,33	147,74	1,96	280,27	1,05
Б3-Вс	192	380,5	239,13	1,59	147,83	2,58	353,98	1,075

Выводы: сопоставление расчетных и опытных значений прочности показывает, что существующая нормативная методика [2] значительно недооценивает прочность наклонного сечения железобетонных конструкций с жестким армированием. Сопоставление по методике [6] носит оценочный характер, но при этом также значительно недооценивает несущую способность. Предлагаемая методика [1] учитывающая плосконапряженное состояние поперечного армирования из стального листа, наиболее удовлетворительно оценивает несущую способность наклонного сечения и может быть применима для выполнения расчетов наклонного сечения с поперечным армированием из стального листа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Жильцов, Ю.В. Работа наклонных сечений изгибаемых железобетонных элементов с жестким поперечным армированием // Бетон и железобетон. 2012. №6. С. 11-16.
2. Руководство по проектированию железобетонных конструкций с жесткой арматурой. – М.: Стройиздат, 1978. С. 55.
3. Жильцов, Ю.В. Новый подход в расчете железобетонных балок армированных жесткими вставками на действие поперечной силы // Строительный вестник Российской инженерной академии: труды секции «Строительство» РИА. Выпуск 11. – М., 2010. С. 157-159.
4. Карпенко, С.Н. Построение критериев прочности железобетонных конструкций по наклонным трещинам разрушения // АСАСЕМІА архитектура и строительство. 2006. №2. С. 54-59.
5. Филатов, В.Б. Особенности работы и эффективное использование жесткой поперечной арматуры железобетонных балок / В.Б. Филатов, Ю.В. Жильцов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2012. Том 14 №4(5). С. 1324-1328.
6. СНиП 2.03.01 -84*. Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования. – М.: Стройиздат 1991. с. 77.

DETERMINATION THE COEFFICIENTS OF STRESS DISTRIBUTION IN THE STEEL SHEET AT TRANSVERSE BEND OF FERROCONCRETE BEAM

© 2013 N.S. Buchman, Yu.V. Zhiltsov

Samara State Architectural and Building University

Results of determination the coefficients of stress distribution in transverse reinforcing from a steel sheet in ferroconcrete beams on action of shear force are presented in article. Comparison of a standard and offered calculation procedure to skilled values is given.

Key words: bent ferroconcrete element, transverse reinforcing, inclined section

Nikolay Buchman, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Common and Applied Physics and Chemistry Department. E-mail: nic341rambler@rambler.ru.

Yuriy Zhiltsov, Assistant at Building Constructions Department. E-mail: zzilz@mail.ru