

## ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИЧЕСКОГО СИГНАЛА, СОГЛАСОВАННОГО СО СФЕРОИДАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ, ДЛЯ ПЕРЕДАЧИ В ЛИНЗОВОЙ СИСТЕМЕ БЕЗ ИСКАЖЕНИЙ

© 2013 М.С. Кириленко, С.Н. Хонина

Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара

Поступила в редакцию 30.10.2013

Рассмотрены вытянутые угловые сфероидальные функции нулевого порядка и их свойства. Произведён расчёт сфероидальных функций при различных параметрах. Выполнено разложение одномерного гауссова пучка по сфероидальным функциям, позволившее оценить искажение данного оптического сигнала при прохождении через линзовую систему. Показана возможность формирования оптического сигнала, передаваемого без искажений, в виде суперпозиции сфероидальных функций, согласованных с параметрами оптической системы.

Ключевые слова: сфероидальные функции, оптический сигнал, коммуникационные моды, оператор распространения, преобразование Фурье, аппроксимация, спектр.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие коммуникационных мод [1] широко изучается и применяется в оптике на протяжении нескольких последних десятилетий [2-5]. Вытянутые угловые сфероидальные функции, которые образуют коммуникационные моды для квадратных апертур и преобразования Френеля, также хорошо известны и были изучены аналитически в 60-х годах прошлого столетия [4, 6, 7].

Сфероидальные функции представляют собой полный набор функций с ограниченной спектральной полосой, которые ортогональны как на данном конечном интервале, так и на бесконечном интервале [6]. Суперпозиция данных функций, аппроксимирующая некоторое световое распределение, будет обладать инвариантным характером при прохождении через оптические линзовые системы с ограниченной апертурой.

В данной работе за основное интегральное преобразование принимается преобразование Фурье. Рассматривается разложение оптических сигналов по сфероидальным функциям, оцениваются погрешности аппроксимации, а также осуществляется применение оператора распространения к исходным полям и их аппроксимации. Демонстрируются инвариантные свойства оптического сигнала, согласованного с суперпозицией сфероидальных функций.

### 2. ПРИМЕНЕНИЕ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

Рассмотрим монохроматическое скалярное поле, полученное в результате дифракции световой волны на отверстии в плоском экране (рис. 1) [8].

Для плоского распределения вторичных источников значение поля в наблюдаемой точке может быть записано как:

$$U(\vec{r}) = \int_A G(\vec{r}, \vec{\rho}) U_0(\vec{\rho}) d^2 \vec{\rho}, \quad (1)$$

где  $U_0(\vec{r})$  – значение поля на апертуре  $A$  (на рис. 1),  $\vec{r} = (x, y, z)$  – наблюдаемая точка,  $\vec{\rho} = (\rho_x, \rho_y, 0)$  – координаты апертуры,  $U(\vec{r})$  – значение поля в точке  $\vec{r}$ ,

$$G(\vec{r}, \vec{\rho}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \exp(ik|\vec{r} - \vec{\rho}|)}{\partial z} \Big|_{z=0} - \text{функция}$$

Грина описанной системы [9],  $k$  – волновое число.

После помещения апертуры в начало координат третья координата на ней обращается в ноль. Обозначим также наблюдаемую область  $O$

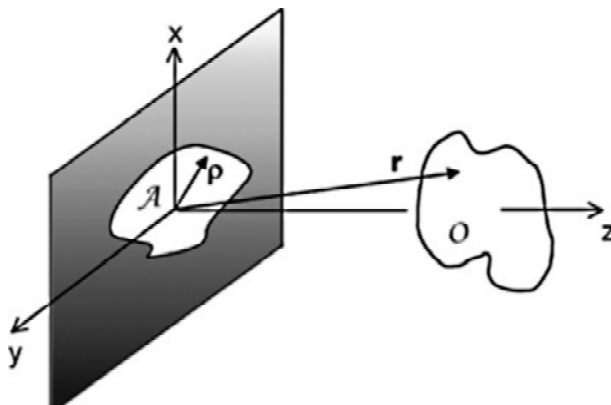


Рис. 1. Изображение геометрии системы

Кириленко Михаил Сергеевич, аспирант, инженер.

E-mail: areatangent@gmail.com

Хонина Светлана Николаевна, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник.

E-mail: khonina@smr.ru

и потребуем, чтобы она не перекрывалась с апертурой  $A$ . Разница между различными зонами дифракции определяется аппроксимацией функции Грина.

В дальнейшем будем рассматривать только физически реализуемые поля, т.е. такие поля, у которых амплитуды являются интегрируемыми в квадрате. В этом случае мы можем определить гильбертово пространство  $H_A$ .

Для задания гильбертова пространства определим скалярное произведение следующим образом:

$$(U_{01}, U_{02})_{H_A} = \int_A U_{01}(\vec{\rho}) U_{02}^*(\vec{\rho}) d^2 \vec{\rho}, \quad (2)$$

где  $U_{01}, U_{02}$  – два исходных поля на апертуре, а звёздочкой обозначено комплексное сопряжение.

Комплексные амплитуды поля на апертуре будем рассматривать как вектора гильбертова пространства.

Аналогичным образом мы можем определить гильбертово пространство  $H_O$  амплитуд поля в рассматриваемой области  $O$  на рис. 1. Далее, введём оператор  $\Gamma: H_A \rightarrow H_O$ , который преобразует поле на апертуре  $A$  в поле на рассматриваемой области  $O$ . Другими словами, оператор переводит вектор из пространства  $H_A$  в пространство  $H_O$ :

$$U = \Gamma U_0, \quad (3)$$

где  $\Gamma$  определён как интеграл в выражении (1),  $U_0$  – исходное поле на апертуре, вектор-функция,  $U$  – поле в рассматриваемой области, вектор-функция.

Если задать апертуру и рассматриваемые области ограниченными и непересекающимися, то можно показать, что оператор  $\Gamma$  является оператором Гильберта-Шмидта [10, 11], что говорит о существовании множества нормированных функций, являющихся решением задачи собственных значений и собственных функций

$$\Gamma \Gamma^* \Psi_n = |g_n|^2 \Psi_n$$

и другого множества нормированных собственных функций

$$\Gamma \Gamma^* \Phi_n = |g_n|^2 \Phi_n, \quad (5)$$

где  $\Psi_n$  и  $\Phi_n$  – собственные функции соответствующих операторов из уравнений (4) и (5),  $|g_n|^2$  – собственные значения,  $\Gamma^*$  – оператор, сопряжённый к оператору  $\Gamma$ .

Причём функции  $\Psi_n$  и  $\Phi_n$  связаны следующими соотношениями [12]:

$$\Gamma \Psi_n = g_n \Phi_n; \quad (6)$$

$$\Gamma^* \Phi_n = g_n^* \Psi_n. \quad (7)$$

Можно показать, что множества  $\{\Psi_n\}$  и

$\{\Phi_n\}$  являются полным базисом в пространствах  $H_A$  и  $H_O$  соответственно. Поэтому поле на апертуре можно представить следующим образом:

$$U_0(\vec{\rho}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n(\vec{\rho}), \quad (8)$$

где  $a_n$  – это комплексные коэффициенты. Из (3) и (6), очевидно, следует, что результирующее поле в рассматриваемой области:

$$U(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n \Phi_n(\vec{r}), \quad (9)$$

Из последней формулы видно, что стоит лишь систему однажды определить, и задача о распространении поля становится несложной.

В случае параксиального распространения световой волны функция Грина имеет следующий вид:

$$G(\vec{r}, \vec{\rho}) = \frac{k}{2\pi iz} \left[ -i \frac{k}{z} (x\rho_x + y\rho_y) \right]. \quad (10)$$

Если предположить, что по оси  $y$  нет никаких изменений всех связанных величин, то мы имеем одномерный случай, где функция Грина запишется следующим образом:

$$G(x, \rho_x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} \exp\left(-i \frac{k}{z} x\rho_x\right). \quad (11)$$

Тогда найдём оператор  $\Gamma^* \Gamma$ :

$$\begin{aligned} \Gamma^* \Gamma U_0(x') &= \\ &= \frac{k}{2\pi z} \int_{-x_0}^{x_0} \left\{ \int_{-\rho_{x_0}}^{\rho_{x_0}} \exp\left[i \frac{k}{z} \rho_x (x'-x)\right] d\rho_x \right\} U_0(x) dx, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $x_0$  – половина ширины рассматриваемой одномерной области,  $\rho_{x_0}$  – половина ширины одномерной апертуры.

Возьмём внутренний интеграл в правой части и в качестве  $U_0(x)$  возьмём собственные функции:

$$|g_n|^2 U_{0n}(x') = \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\sin\left[\frac{k}{z} \rho_{x_0} (x'-x)\right]}{\pi(x'-x)} U_{0n}(x) dx, \quad (13)$$

где  $U_{0n}(x)$  – соответствующая собственному значению  $|g_n|^2$  собственная функция. Полученное соотношение показывает, что данные собственные функции являются сфероидальными.

Собственные значения  $|g_n|^2$  имеют следующее поведение: они приблизительно равны единице до некоторого критического значения

$N = \frac{2x_0 k \rho_{x_0}}{\pi z}$ , а затем все  $|g_n|^2$  приблизительно равны нулю [4].

Это число определяет количество сфероидальных функций – так называемых коммуникационных мод – по которым можно раскладывать произвольные оптические сигналы. Оно зависит от длины волны и геометрии системы и является числом степеней свободы системы.

С помощью формулы (13) можно найти модули  $g_n$ , а аргументы вычисляются по следующей формуле:

$$\arg g_n = \frac{\pi}{4} + 4 \left\{ \frac{n+1}{4} \right\} \frac{\pi}{2}, \quad (14)$$

где  $\{ \}$  в данном случае – дробная часть от числа.

Разложение (8) одномерного оптического сигнала по сфероидальным функциям записывается в следующем виде:

$$GU_0(x) \approx \sum_{n=0}^N C_n i^{-(n+1/2)} |g_n| \sqrt{\frac{x_0}{\rho_{x_0}}} \psi_n \left( x \frac{x_0}{\rho_{x_0}} \right), \quad (15)$$

где  $C_n$  – коэффициенты разложения,  $\psi_n(x)$  – сфероидальные функции.

Произвольная суперпозиция сфероидальных функций не будет обладать инвариантным характером.

Если мы имеем оптическую линзовую систему, осуществляющую двойное преобразование Фурье от исходного сигнала, можно получить следующее выражение:

$$GGU_0(x) \approx i \frac{x_0}{\rho_{x_0}} U_0 \left( -x \frac{x_0^2}{\rho_{x_0}^2} \right). \quad (16)$$

Таким образом, после прохождения двух линз, как и следовало ожидать, оптический сигнал преворачивается и масштабируется.

В двумерном случае при квадратной апертуре двумерные сфероидальные функции

$\psi_{nm}(x, y)$  можно рассматривать как произведение двух одномерных сфероидальных функций:

$$\psi_{nm}(x, y) = \psi_n(x) \psi_m(y). \quad (17)$$

Собственные значения в этом случае запишутся следующим образом:

$$|g_{nm}| = |g_n| |g_m|. \quad (18)$$

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОХОЖДЕНИЯ СИГНАЛА И ЕГО СУПЕРПОЗИЦИИ

Произведём расчёт сфероидальных функций, согласованных с параметрами оптической системы, состоящей из двух линз, и выполним разложения по ним оптического сигнала.

В качестве примера рассматривается случай, когда  $k\rho_{x_0}/z = 20$ ,  $x_0 = 1$ , а исходный сигнал

представляет собой гауссов пучок  $\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ ,

$\sigma = 0.1$ . В этом случае количество сфероидальных функций, используемых для аппроксимации сигнала, равно 13. На рис. 2 показаны графики исходного сигнала (чёрный цвет) и его представления через сфероидальные функции (серый цвет). Погрешность аппроксимации составила 6%.

Сигнал, полученный после прохождения исходного гауссова пучка через линзовую систему в соответствии с (16), практически совпал с полученной аппроксимацией (среднеквадратичное отклонение составило 1%), т.е. искажение соответствовало погрешности аппроксимации.

Чтобы сигнал передавался без искажений, он должен быть согласован с суперпозицией набора сфероидальных функций, имеющих собственные значения, близкие к единице. Прохождение такой аппроксимации сигнала (см. рис. 2) произошло практически без искажений (среднеквадратичное отклонение составило 1,6%).

Таким образом, искажение сигнала можно оценивать без моделирования его прохождения

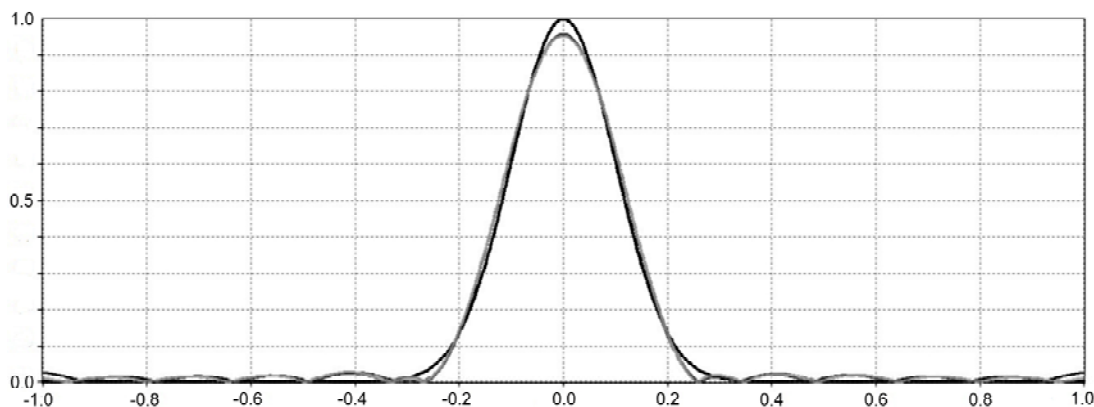


Рис. 2. Графики сигнала (чёрный цвет) и его аппроксимации (серый цвет)

через оптическую систему, а лишь на основе разложения по сфероидальным функциям, согласованным с параметрами этой системы.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выполнен расчет собственных функций оператора прохождения оптического сигнала через систему из двух линз в соответствии с параметрами этой системы. Произведено разложение одномерного гауссова сигнала по рассчитанным сфероидальным функциям. Показано, что аппроксимация сигнала набором сфероидальных функций, имеющих собственные значения, близкие к единице, передается практически без искажений (среднеквадратичное отклонение составило 1,6%). Причем оценивать искажение исходного сигнала при его прохождении через оптическую систему можно без моделирования, а лишь на основе погрешности аппроксимации, т.е. разложения по сфероидальным функциям.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miller D.A.B.* Communicating with waves between volumes: evaluating orthogonal spatial channels and limits on coupling strengths // *Appl. Opt.*, Vol. 39, 2000. 1681–1699.
2. *Gallager R.G.* Information Theory and Reliable Communication. Wiley, New York, 1968.
3. *di Francia G.T.* Degrees of freedom of an image // *J. Opt. Soc. Am.*, Vol. 59, 1969. 799–804.
4. *Frieden B.R.* Evaluation, design and extrapolation methods for optical signals, ed. E.Wolf // *Progress in Optics*, Vol. IX., 1971. 311–407.
5. *Bertero M., Pike E.R.* Resolution in diffraction-limited imaging, a singular-value analysis I. The case of coherent illumination // *Opt. Acta*, Vol. 29, 1982. 727–746.
6. *Slepian D., Pollak H.O.* Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – I // *Bell Syst. Technol. J.*, Vol. 40, 1961. 43–63.
7. *Landau H.J., Pollak H.O.* Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – II. // *Bell Syst. Technol. J.*, Vol. 40, 1961. 65–84.
8. Communication modes in scalar diffraction / *P. Martinsson, P. Ma, A. Burvall, A.T. Friberg* // *Optik.*, Vol. 199, 2008. 103–111.
9. *Levine H., Schwinger J.* On the theory of diffraction by an aperture in an infinite plane screen I // *Phys. Rev.*, Vol. 74, 1948. 958–974.
10. Number of degrees of freedom in inverse diffraction / *M. Bertero, C. de Mol, F. Gori, L. Ronchi* // *Opt. Acta.*, Vol. 30, 1983. 1051–1065.
11. *Barrett H.H., Myers K.J.* Foundations of Image Science. Wiley, Hoboken, NJ, 2004.
12. *Lanczos C.* Linear Differential Operators. Van Nostrand, London, 1961.

### FORMATION OF THE OPTICAL SIGNAL MATCHED WITH SPHEROIDAL FUNCTIONS TO TRANSFER IN LENS SYSTEM WITHOUT DISTORTIONS

© 2013 M.S. Kirilenko, S.N. Khonina

Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara

Prolate angular spheroidal functions of zero order and their properties are considered. The calculation of spheroidal functions produced for different parameters. One-dimensional Gaussian beam decomposition into spheroidal functions is performed which allowed evaluate the distortion of the optical signal passing through the lens system. We demonstrate the possibility of the formation of the optical signal transmitted through a lens system without distortion when it is a superposition of spheroidal functions consistent with the parameters of the optical system.

Key words: spheroidal functions, optical signal, communication modes, propagation operator, Fourier transform, approximation, spectrum.

---

*Mikhail Kirilenko, Postgraduate Student, Engineer.*

*E-mail: areatangent@gmail.com*

*Svetlana Khonina, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Research Fellow. E-mail: khonina@smr.ru*