

УДК 621.777.01

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ПРЕССОВАНИИ ТРУБЫ

© 2013 Ю.С. Горшков, Б.В. Каргин

Самарский государственный аэрокосмический университет имени акад. С.П. Королева  
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 26.11.2013

Приведена методика построения кинематически возможных полей скоростей для осесимметричной деформации при прессовании трубы, основанная на использовании конечных интегральных преобразований. Даны аналитические выражения для расчета напряженно-деформированного состояния в очаге деформации.

Ключевые слова: *прессованная труба, тензор, неподвижная игла, граничные условия, поля напряжений, очаг деформации, свинцовая заготовка*

Исходя из вариационных принципов механики сплошных сред, если известны поля скоростей, то путем их дифференцирования легко определяются поля скоростей деформаций [1, 2]. Поля напряжений могут быть получены в дальнейшем из уравнений статики и связи, в качестве которых можно использовать уравнения теории течения или теории деформаций. Известные методы в большей или меньшей степени связаны с необходимостью проведения экспериментов, например, для аппроксимации условий течения. В данной работе сделана попытка описать деформированное состояние чисто аналитическим путем.

Аналитический метод применен для осесимметричной деформации при прессовании круглой трубы с неподвижной иглой из полой заготовки. После скоростей для данного процесса определим через интегрирование условия неразрывности материала заготовки при заданных граничных условиях методами математической физики [3]. В цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  геометрический очаг пластической деформации опишем в виде полого цилиндра высотой  $h$  и радиусами  $R_0$  и  $r_0$ . Схема процесса деформирования представлена на рис. 1. Пусть в области пластического течения задан потенциал скоростей  $U(r, z)$ , связанный с вектором скорости соотношением

$$V = \text{grad}U(r, z)$$

или в координатной форме

$$V_r = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad V_z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (1)$$

Если в очаге деформации отсутствуют источники, стоки и завихрения, то условие несжимаемости можно записать в следующем виде

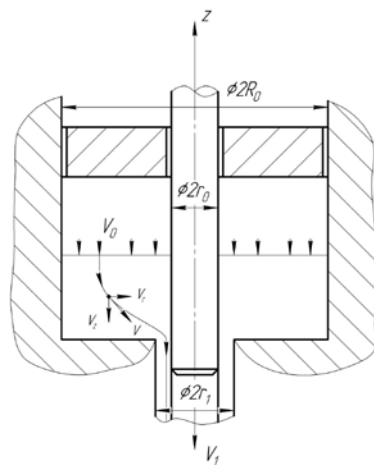
$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

Горшков Юрий Сергеевич, кандидат технических наук, доцент. E-mail: ysgorhkov@yandex.ru  
Каргин Борис Владимирович, кандидат технических наук, доцент. E-mail: kargin163@gmail.com

Из условия симметрии дифференцирование по  $\varphi$  опущено. Граничные условия на контуре очага деформации

$$\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=h} = V_0; \quad \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = V_1 \text{ на } (r_0, r_1) \text{ и } 0 \text{ на } (r_1, R_0)$$



**Рис. 1.** Схема очага пластической деформации при прессовании трубы

Задание уравнения (2) и граничных условий (3) определяет потенциал  $U(r, z)$  однозначно с точностью до постоянного слагаемого. Для отыскания потенциала скоростей используем конечные интегральные преобразования [3], которые предполагают исключение операции дифференцирования по  $r$ , обращение уравнения (2) в обыкновенное дифференциальное уравнение. Найдем ядро преобразования, позволяющее исключить дифференциальные операции по  $z$  из решения уравнения

$$\frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{K}}{\partial r} + \lambda_k^2 \bar{K} = 0 \quad (4)$$

и граничного условия

$$\frac{\partial K}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{\partial K}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 0 \quad (5)$$

Подчинив общее решение  $AI_0(\lambda_k r) + BN_0(\lambda_k r)$  уравнения (4) условиям (5), получим

$$\begin{aligned} -A\lambda_k I_1(\lambda_k r_0) - B\lambda_k N_1(\lambda_k r_0) &= 0 \\ -A\lambda_k I_1(\lambda_k R_0) - B\lambda_k N_1(\lambda_k R_0) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы существовали решения, отличные от тривиального решения  $A = B = 0$ , определитель

$$\begin{vmatrix} I_1(\lambda_k r_0) & N_1(\lambda_k r_0) \\ I_1(\lambda_k R_0) & N_1(\lambda_k R_0) \end{vmatrix}$$

$$C_k = \int_{r_0}^{R_0} [I_1(\lambda_k r_0)N_0(\lambda_k r) - N_1(\lambda_k r_0)I_0(\lambda_k r)]^2 r dr = \frac{2}{\pi^2 \lambda_k^2} \cdot \frac{I_1(\lambda_k r_0) - I_1(\lambda_k R)}{I_1^2(\lambda_k R_0)}$$

Осуществив в интервале  $r_0 \leq r \leq R_0$  преобразование с ядром  $\frac{r}{C_k} \cdot K_k(r)$ , приведем задачу (2), (3) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{U}}{dz} \Big|_{z=0} &= \frac{V_1}{C_k} \int_{r_0}^{R_0} K_k(r) r dr = \frac{V_1 r_1}{C_k \lambda_k} [I(\lambda_k r_0)N_1(\lambda_k r_1) - N_1(\lambda_k r_0)I_1(\lambda_k r_1)] = \\ &= \bar{V}_1 \end{aligned} \quad (8)$$

Общее решение уравнения (7) при граничных условиях (8)

$$\begin{aligned} U_0 &= -V_0 z + const & k &= 0 \\ \bar{U}_k &= \frac{V_1}{\lambda_k} \cdot \frac{ch\lambda_k(h-z)}{ch\lambda_k h} & k &> 0 \end{aligned}$$

$$U(r, z) = -V_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_1 ch\lambda_k(h-z)}{\lambda_k sh\lambda_k h} K_k(r) + const \quad (9)$$

Взяв градиент от потенциала (9) получим непрерывное кинематически возможное поле скоростей для прессования трубы:

$$\begin{aligned} \frac{V_z}{V_0} &= -1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{V}_1 sh\lambda_k(h-z)}{sh\lambda_k h} K_k(r) \\ \frac{V_r}{V_0} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{V}_1 ch\lambda_k(h-z)}{\lambda_k sh\lambda_k h} K_k(r) \\ V &= \sqrt{V_r^2 + V_z^2}, \quad \Psi = \arctg \frac{V_r}{V_z} \end{aligned} \quad (10)$$

Компоненты тензора скоростей деформаций в каждой точке зоны пластической деформации можно определить по формулам:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}; \quad \dot{\epsilon}_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}; \\ \dot{\epsilon}_z &= \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \quad \dot{\gamma}_{rz} = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} \end{aligned} \quad (11)$$

должен быть равен нулю, что для определения собственных чисел дает уравнение

$$I_1(\lambda_k r_0)N_1(\lambda_k R_0) - N_1(\lambda_k r_0)I_1(\lambda_k R_0) = 0$$

Решив систему (6), найдем, что с точностью до произвольного множителя

$$A = -N_1(\lambda_k r_0), \quad B = I_1(\lambda_k r_0)$$

Таким образом, можно принять

$$K_k(r) = I(\lambda_k r_0)N_0(\lambda_k r) - N_1(\lambda_k r_0)I_0(\lambda_k r)$$

Нормирующий множитель  $C_k$  равен

$$\frac{d^2 \bar{U}}{dz^2} - \lambda_k^2 \bar{U} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d\bar{U}}{dz} \Big|_{z=h} = \frac{V_0}{C_k} \int_{r_0}^{R_0} K_k(r) r dr = 0$$

Применяя формулу обращения, получим искоемое решение в виде сходящегося ряда

$$U(r, z) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{U}_k K_k(r)$$

Компоненты тензора напряжений могут быть определены из уравнений равновесия, записанных в цилиндрической системе координат, соотношений между напряжениями и скоростями деформации и условия пластичности Мизеса. В результате получим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_z + \frac{\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_z}{\lambda} \\ \sigma_\varphi &= \sigma_z + \frac{\dot{\epsilon}_\varphi - \dot{\epsilon}_z}{\lambda} \\ \tau_{rz} &= \frac{\dot{\gamma}_{rz}}{2\lambda} \end{aligned} \quad (12)$$

Так как рассматривается установившийся процесс, то компоненты напряжений являются функциями только координат

$$d\sigma_z = \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} dr + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \quad (13)$$

Интегрируя выражение (13) от какой-либо точки в виде  $(r_0, z_0)$ , получим осевой компонент напряжения в

$$\sigma_z(r, z) = \int_{r_0}^r \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_r}{\lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\dot{\gamma}_{rz}}{2\lambda} \right) - \frac{\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\varphi}{2\lambda} \right] dr - \int_{z_0}^z \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\dot{\gamma}_{rz}}{2\lambda} \right) + \left( \frac{\dot{\gamma}_{rz}}{2r\lambda} \right) \right] dz + \sigma_z(r_0, z_0) \quad (14)$$

Величина  $\sigma_z(r_0, z_0)$  может быть определена из условия равенства нулю результирующей силы в выходном сечении.

На рис. 2 показано распределение осевых сжимающих напряжений в области очага пластической деформации, полученных расчётом на ЭВМ при прессовании свинцовой заготовки с коэффициентом вытяжки, равным 3,5. Полученная картина течения достаточно близка к экспериментальной [4].

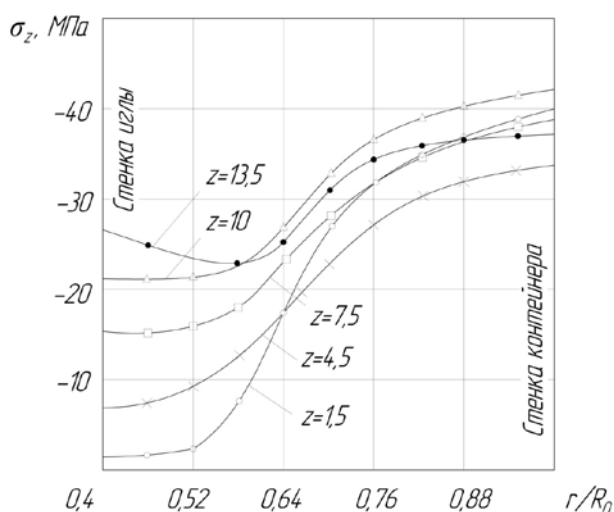


Рис. 2. Характер распределения осевых сжимающих напряжений в очаге пластических деформаций

Выражения (10), (11), (12), (14) представляют основные уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние при прессовании трубы. Решение этих уравнений при заданных граничных условиях по напряжениям и скорости, а также по известной зависимости между интенсивностями напряжений и скоростей деформаций, получаемой из опытов на растяжение или сжатие для конкретных материалов, является полным решением исследуемой задачи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Качанов, Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. 352 с.
2. Гун, Г.Я. Пластическое формоизменение металлов / Г.Я. Гун, П.И. Полухин и др. – М.: Metallurgy, 1968. 416 с.
3. Кошляков, Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Физматгиз, 1962. 469 с.
4. Мета, Шабейк, Кобаяси. Конструирование и технология машиностроения // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия В. 1970. №2. С. 142.Т.

## DEFINITION THE STRESS-DEFORMED STATE AT PIPE PRESSING

© 2013 Yu.S. Gorshkov, B.V. Kargin

Samara State Aerospace University named after acad. S.P. Korolev  
(National Research University)

The technique of creation the kinematically possible fields of speeds for axisymmetric deformation at pipe pressing, based on the use of terminating integral transformations is given. Analytical expressions for stress-deformed state calculation in deformation center are given.

Key words: *pressed pipe, tensor, fixed needle, boundary conditions, fields of tension, deformation center, lead preparation*

Yuriy Gorshkov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor. E-mail: ysgorshkov@yandex.ru  
Boris Kargin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor. E-mail: kargin163@gmail.com