

УДК 681.7.068: 539.319

## ЗАДАЧА ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО ЗАКОНА НЕОДНОРОДНОГО ЛЕГИРОВАНИЯ СИЛОВОГО СТЕРЖНЯ ДЛЯ ЗАГОТОВКИ АНИЗОТРОПНОГО КВАРЦЕВОГО ВОЛОКНА ТИПА ПАНДА

© 2013 Н.В. Семенов, А.Н. Труфанов, Н.А. Труфанов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Поступила в редакцию 26.11.2013

Рассматривается задача поиска оптимальной зависимости легирования оксидом бора силового стержня анизотропного оптического волокна типа Панда. Задача оптимизации ставится с целью увеличения общей температурной деформации силового стержня при выполнении условий прочности на всех технологических этапах производства. При решении используется метод Нелдера-Мида. Ограничения по условиям прочности учитываются с помощью метода штрафных функций. Параметрами оптимизации являются коэффициенты функции, описывающей закон распределения по радиусу стержня оксида бора в чистом кварце. Зависимость распределения аппроксимируется двумя кубическими сплайнами. Получен оптимальный закон распределения легирующих добавок с учётом условий прочности.

Ключевые слова: *силовой стержень, оптическое волокно Panda, технологические напряжения, закон легирования, оптимизация*

Изготовление высокоточных приборов, таких, как волоконно-оптические датчики, накладывает серьёзные требования на уровень светопроводящих характеристик волокна. В таких устройствах широко применяются анизотропные кварцевые оптические волокна [1-3], поддерживающие поляризацию сигнала за счет разности механических напряжений в светопроводящей жиле, например, волокна типа Панда. Особенность этих волокон заключается в наличии двух цилиндрических стержней, устанавливаемых в заготовке световода на одном диаметре по обе стороны от светопроводящей жилы. Стержень изготавливается с помощью модифицированного метода химического осаждения из газовой фазы (MCVD) [4] и содержит переменные вдоль радиуса легирующие добавки, назначение которых заключается в увеличении температурной деформации стержня по сравнению с материалом заготовки волокна для создания в светопроводящей жиле максимальной разности главных напряжений, определяющих оптические свойства

волокна. Неоднородное и достаточно высокое легирование стержня приводит к возникновению больших технологических напряжений при изготовлении стержня, которые зачастую приводят к растрескиванию заготовки [5]. Задача выбора оптимального закона легирования ставится с целью подбора необходимых параметров, благодаря которым удастся увеличить общую температурную деформацию силового стержня при выполнении условий прочности на всех технологических этапах производства. При этом известно, что температурная деформация кварцевого стекла увеличивается с ростом концентрации легирующего оксида бора  $B_2O_3$ . Задача оптимизации решается методом Нелдера-Мида [6] на основе данных, получаемых в процессе решения термомеханической задачи о поведении стержня при остывании от температуры  $2100^\circ C$  до комнатной температуры с учётом наличия релаксационного перехода из стеклообразного в вязкотекучее (стеклования). Ограничения по условиям прочности учитываются с помощью метода штрафных функций. Параметрами оптимизации являются коэффициенты функции, описывающей закон распределения по радиусу стержня оксида бора в чистом кварце.

**Постановка задачи оптимизации.** Силовой стержень представляет собой длинный круглый цилиндр радиусом  $r_2=5 \cdot 10^{-3}$  м. Стержень имеет переменную по радиусу степень

---

Семенов Никита Владимирович, аспирант

Труфанов Александр Николаевич, кандидат технических наук, директор Областного центра новых инновационных технологий. E-mail: ant@pstu.ru

Труфанов Николай Александрович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и механики. E-mail: nat@pstu.ru

легирования  $\mu(r)$  чистого кварца оксидом бора  $B_2O_3$  на расстоянии от центра до радиуса  $r_1=3 \cdot 10^{-3}$  м, а остальная часть стержня состоит из чистого оксида кварца. При этом содержание легирующих добавок не превышает 10%. В качестве функции, характеризующей величину температурной деформации, используется интегральное относительное содержание оксида бора в элементе стержня единичной длины

$$\Phi(p_1, \dots, p_k) = 2\pi \int_0^{r_1} \mu(p_1, \dots, p_k, r) r dr \quad (1)$$

Параметрами оптимизации  $p_1, \dots, p_k$  являются коэффициенты функции, описывающей закон распределения оксида бора в чистом кварце.

Задача оптимизации может быть сформулирована следующим образом: найти параметры распределения, обеспечивающие максимальное значение функции (1) (температурную деформацию силового элемента) при ограничениях типа неравенств (условия прочности по первому

$$F(p_1, \dots, p_k) = -\Phi(p_1, \dots, p_k) + \lambda_1 \left( ([\sigma_c] - \sigma_i^{\max}(p_1, \dots, p_k))^2 \cdot (1 - \text{sign}([\sigma_c] - \sigma_i^{\max}(p_1, \dots, p_k))) \right) + \lambda_2 \left( ([\sigma_p] - \sigma_1^{\max}(p_1, \dots, p_k))^2 \cdot (1 - \text{sign}([\sigma_p] - \sigma_1^{\max}(p_1, \dots, p_k))) \right), \quad (2)$$

где  $\sigma_i^{\max}$  и  $\sigma_1^{\max}$  – максимальные значения в конструкции интенсивности остаточных напряжений и первого главного остаточного напряжения соответственно,  $\lambda_1, \lambda_2$  – весовые коэффициенты для штрафных функции.

**Ограничения типа равенств на минимизируемую функцию.** Ограничения типа равенств на компоненты тензора остаточных напряжений формулирует математическая модель термомеханических явлений, происходящих при остывании стержня из кварцевого стекла от температур выше температуры стеклования  $2100^\circ\text{C}$  до комнатной температуры, которая включает в себя краевую задачу нестационарной теплопроводности и краевую задачу о напряженно-деформированном состоянии (НДС) с учетом

- граничные условия

$$-\lambda(T) \text{grad}(T) \cdot \mathbf{n} = \alpha(T) \cdot (T - T_c(t)) + \varepsilon \sigma_0 (T)^4, \quad \mathbf{x} \in l_3,$$

где первое слагаемое правой части описывает конвективный теплоперенос, а второе – теплообмен излучением по закону Стефана-Больцмана;  $\varepsilon$  – коэффициент черноты,  $\sigma_0$  – постоянная Стефана-Больцмана,  $\alpha(T)$  – коэффициент теплопередачи,  $T_c(t)$  – температура окружающей среды,  $\mathbf{n}$  – нормаль к границе  $l$ ;

- начальные условия

$$T(0, \mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S.$$

главному напряжению  $\sigma_1$  и интенсивности напряжений  $\sigma_i$ ):

$$\begin{cases} \Phi(p_1, \dots, p_k) \rightarrow \max, \\ \sigma_1(p_1, \dots, p_k) < [\sigma_p] \\ \sigma_i(p_1, \dots, p_k) < [\sigma_c] \end{cases}$$

и ограничениях типа равенств (уравнения краевой задачи по определению остаточных напряжений при изготовлении стержня с законом легирования  $\mu(r)$ ; где  $[\sigma_p]$  – предел прочности на растяжение,  $[\sigma_c]$  – предел прочности материала на сжатие.

Для преобразования сформулированной задачи с ограничениями типа неравенств и равенств к задаче минимизации без ограничений типа неравенств использован метод штрафных функций [7]. Целевая функция с учетом (1) примет следующий вид:

неоднородного поля температур и наличия релаксационного перехода (стеклования) в остывающем материале. Постановка краевой задачи нестационарной теплопроводности в области  $S$  с границей  $l$  содержит:

- уравнение теплопроводности

$$\rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda(T) \cdot \text{grad}(T)), \quad \mathbf{x} \in S,$$

где  $c(T)$ ,  $\lambda(T)$ ,  $\rho$  – соответственно теплоемкость, теплопроводность и плотность материала. Диссипативный разогрев полагается пренебрежимо малым из-за низких скоростей деформаций;

Несвязанная краевая задача о НДС с учетом малости деформаций включает:

- уравнения равновесия

$$\operatorname{div}(\hat{\sigma}) = 0, \mathbf{x} \in S,$$

- геометрические соотношения Коши

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \mathbf{x} \in S,$$

где  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  – вектор перемещений,  $\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$  – тензор полных деформаций.

- граничные условия в перемещениях и напряжениях

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{U}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in l_\sigma, \\ \hat{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{P}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in l_\sigma, \end{aligned}$$

где  $l_u, l_\sigma$  – части границы с заданными перемещениями и нагрузками соответственно.

Общая система уравнений задачи о напряженно-деформированном состоянии заготовки включает также определяющие соотношения. Механическое поведение кварцевого стекла в широком диапазоне температур (20-2100°C) связано с переходом материала из стеклообразного в вязкотекучее состояние. Для описания механического поведения кварцевого стекла с целью адекватного отражения указанных явлений были использованы физические соотношения максвелловского типа:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= {}^4\hat{C} \cdot (\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}_T - \hat{\varepsilon}_B), \\ \hat{\varepsilon}_T(\mathbf{x}, t) &= \hat{E} \int_{T_0}^T \alpha(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}, t)) dT, \\ \frac{\partial \hat{\varepsilon}_B}{\partial t} &= \frac{\hat{S}}{\eta(T)}, \hat{\varepsilon}_B = \int_0^t \frac{\partial \hat{\varepsilon}_B}{\partial t} dt, \\ \eta(\mathbf{x}, T) &= \eta_0(\mathbf{x}) e^{\frac{U(\mathbf{x})}{RT(\mathbf{x}, t)}}, \end{aligned}$$

где  ${}^4\hat{C}$  – тензор четвертого ранга упругих констант застеклованного материала (изменением

упругих свойств при введении малых концентраций легирующих элементов пренебрегаем);  $\hat{\varepsilon}_e(\mathbf{x}, t) = \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) - \hat{\varepsilon}_T(\mathbf{x}, t) - \hat{\varepsilon}_B(\mathbf{x}, t)$  – тензор упругих деформаций,  $\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$  – тензор полных деформаций;  $\hat{\varepsilon}_T(\mathbf{x}, t)$  – тензор температурных деформаций;  $\hat{\varepsilon}_B(\mathbf{x}, t)$  – тензор вязких деформаций;  $\eta(\mathbf{x}, T)$ ,  $\alpha(\mathbf{x}, T)$  – вязкость и коэффициент температурного расширения материала, зависящие от температуры и от неоднородно распределенных по объему тела легирующих примесей;  $T_0$  – начальная температура, при которой предполагается отсутствие в теле начальных напряжений, деформаций и их производных по времени (гипотеза о естественном ненапряженном и недеформированном состоянии);  $\hat{S}(\mathbf{x}, t) = \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t) - \sigma(\mathbf{x}, t)\hat{E}$  – девиатор тензора напряжений;  $\sigma(\mathbf{x}, t) = \sigma_{kk} / 3$  – среднее напряжение;  $\hat{E}$  – единичный тензор второго ранга;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $U(\mu(\mathbf{x}))$  – энергия активации. Девиатор тензора вязкой деформации  $\hat{\varepsilon}_B(\mathbf{x}, t) = \hat{\varepsilon}_B(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{3}\theta_B(\mathbf{x}, t)\hat{E}$ , в силу того, что в расплавленном состоянии материал предполагается несжимаемой жидкостью ( $\theta_B = 0$ ), равен тензору вязких деформаций  $\hat{\varepsilon}_B = \hat{\varepsilon}_B$ ;  $\theta_B = \varepsilon_{B_{kk}}$  – объемная деформация.

Методика численного решения задачи определения напряженно-деформированного состояния изложена в работе [8].

**Решение задачи оптимизации.** Для поиска минимума функционала (2) с изложенными ограничениями использован метод Нелдера–Мида. В данной работе зависимость распределения степени легирования от радиуса была аппроксимирована двумя кубическими сплайнами. Таким образом, рассматривались функции распределения легирующего элемента  $\mu(r)$  вида:

$$\mu(r) = \begin{cases} N_1^i(r)\mu_1 + \bar{N}_1^i(r)\mu'_1 + N_m^j(r)\mu_m + \bar{N}_m^j(r)\mu'_m, & r \in [0, 0.0015] \\ N_m^i(r)\mu_m + \bar{N}_m^i(r)\mu'_m + N_n^j(r)\mu_n + \bar{N}_n^j(r)\mu'_n, & r \in [0.0015, 0.003] \end{cases} \quad (3)$$

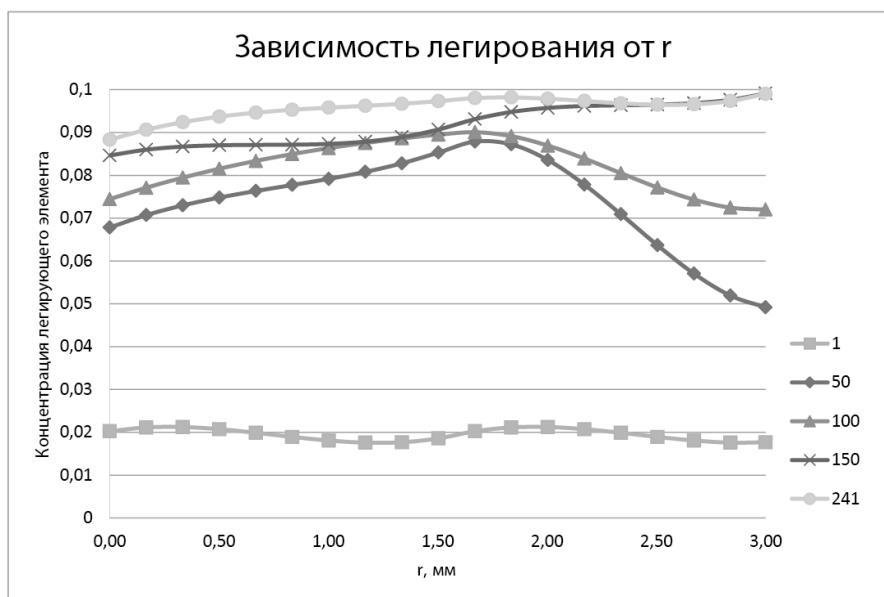
где  $\mu_1, \mu_m, \mu_n$  – значения концентрации легирующих элементов в центре стержня, в середине легированной зоны ( $r=r_1/2$ ), в конце легированной зоны ( $r=r_1$ ) соответственно;  $\mu'_1, \mu'_m, \mu'_n$  – значения производных  $d\mu/dr$  в этих же точках.

В результате имеем шесть независимых параметров оптимизации:

$$p_1 = \mu_1, \quad p_2 = \mu'_1, \quad p_3 = \mu_m, \quad p_4 = \mu'_m, \\ p_5 = \mu_n, \quad p_6 = \mu'_n.$$

В качестве ограничений по нормальным растягивающим напряжениям  $\sigma_1$  и по интенсивности

напряжений  $\sigma_i$  использованы следующие значения:  $[\sigma_p] = 35$  МПа,  $[\sigma_c] = 60$  МПа. Последовательные результаты решения задачи оптимизации отражены на рис. 1.



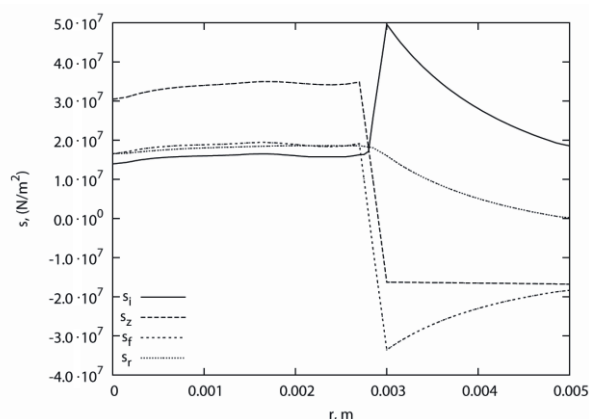
**Рис. 1.** Изменение зависимости степени легирования силового стержня от радиуса в процессе решения задачи оптимизации, на итерациях № 1, 50, 100, 200 и 241

В результате решения поставленной задачи была определена зависимость степени легирования от радиуса (рис. 1. кривая «241»), позволяющая реализовать в силовом стержне для оптического волокна типа Панда максимальные температурные деформации при соблюдении условий прочности. Результат поиска оптимальных параметров формулы (3) имеет вид:

$$p_1 = \mu_1 = 0,0869, \quad p_2 = \mu'_1 = 0,0299, \\ p_3 = \mu_m = 0,0977, \quad p_4 = \mu'_m = 0,0084, \\ p_5 = \mu_n = 0,1037, \quad p_6 = \mu'_n = 0,0413.$$

Остаточные технологические напряжения в силовом стержне для этой зависимости распределения легирующих элементов приведены на рис. 2.

**Выводы:** показано, что при изготовлении методом MCVD силовых стержней с переменным содержанием легирующих добавок по радиусу для оптического волокна типа Панда, возможно увеличение величины температурной деформации стержня и, соответственно, улучшение оптических свойств волокна, с помощью использования оптимального закона легирования.



**Рис. 2.** Зависимость напряжений  $\sigma_r$  (радиальные напряжения),  $\sigma_\phi$  (окружные напряжения),  $\sigma_z$  (осевые напряжения),  $\sigma_i$  (интенсивность напряжений) в силовом стержне для оптического волокна типа Panda от радиуса в случае оптимального легирования

На основе решённой задачи оптимизации можно сделать вывод, что используя полученный закон распределения легирующих добавок можно увеличить величину температурной деформации стержня по сравнению с ранее полученными аналитическими зависимостями, сохранив его прочность. Полученное оптимальное распределение степени легирования от радиуса

существенно отличается от используемых на практике степенных зависимостей вида [8]:

$$\mu(r) = a \left( 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^b \right) \quad (4)$$

Так, например, параметр, отражающий величину температурной деформации (1) для распределения вида (4), равен  $\Phi(p_1, \dots, p_k) = 9,42 \cdot 10^{-7}$  при значении степенного аргумента  $b=4$  и  $a=0,1$ , а для полученной оптимальной зависимости этот параметр равен  $\Phi(p_1, \dots, p_k) = 13,82 \cdot 10^{-7}$ . То есть, при оптимальном легировании удается увеличить общее содержание оксида бора в стержне почти в 1,5 раза при сохранении прочности изделия.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ проект №13-08-96036 p\_урал\_a.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Guan, R. Stress birefringence analysis of polarization maintaining optical fibers / R. Guan, F. Zhu, Z. Gan et al. // Optical Fiber Technology. 2005. Vol. 11, №3. P. 240-254.
2. Окуси, Т. Волоконно-оптические датчики / Т. Окуси, К. Окамото, М. Оцу и др. Пер. с япон. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отделение, 1990. 256 с.
3. Гроднев, И.И. Оптические кабели: конструкции, характеристики, производство и применение / И.И. Гроднев, Ю.Т. Ларин, И.И. Теумин. – М.: Энергоатомиздат, 1991. 264 с.
4. Бурков, В.Д. Физико-технологические основы волоконно-оптической техники: учеб. пособие / В.Д. Бурков, Г.А. Иванов. – М.: ГОУ ВПО МГУЛ, 2007. 222 с.
5. Trufanov, A.N. Numerical analysis of residual stresses in preform of stress applying part for PANDA-type polarization maintaining optical fibers / A.N. Trufanov, O.Yu. Smetannikov, N.A. Trufanov // Optical Fiber Technology. 2010. Vol. 16, №3. P. 156-161.
6. Банди, Б. Методы Оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь, 1988. 42 с.
7. Реклейтис, Г. Оптимизация в технике: в 2 кн. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэсдел. – М.: Наука, 1980. 226 с.
8. Сметанников, О.Ю. Технологические и остаточные напряжения в неоднородном стеклющемся цилиндрическом стержне / О.Ю. Сметанников, Н.А. Труфанов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2009. №2. С. 126-140.

## THE PROBLEM OF CHOICE THE OPTIMUM LAW OF NONUNIFORM ALLOYING THE POWER CORE FOR PREPARATION THE ANISOTROPIC QUARTZ FIBRES OF PANDA TYPE

© 2013 N.V. Semenov, A.N. Trufanov, N.A. Trufanov

Perm National Research Polytechnical University

The problem of searching the optimum dependence of alloying by boron oxide the power core of anisotropic optical fiber of Panda type is considered. The task of optimization is set for the purpose of increase the common temperature deformation of a power core at performing the conditions of durability at all technological production phases. At the decision the method of Nelder-Mead is used. Restrictions under the terms of durability are considered by means of penal functions method. Parameters of optimization are coefficients of the function describing the distribution law on radius of a core of boron oxide in clear quartz. Dependence of distribution is approximated by two cubic splines. The optimum distribution law of alloying additives taking into account durability conditions is received.

Key words: power core, optical fiber of Panda type, technological tension, alloying law, optimization

---

Nikita Semenov, Post-graduate Student  
 Alexander Trufanov, Candidate of Technical Sciences, Director of the Regional Center of New Informational Technologies. E-mail: ant@pstu.ru  
 Nikolay Trufanov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Mechanics. E-mail: nat@pstu.ru