УДК 62.534 (031)

ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСТАТА С ПОЛОСТЬЮ С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

© 2013 А.В. Алексеев, С.П. Безгласный, В.С. Красников

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 02.12.2013

Исследованы сферические движения относительно центра масс свободного однороторного гиростата со сферической полостью, целиком заполненной жидкостью большой вязкости. Выведены уравнения движения, найдены и исследованы на устойчивость стационарные движения. Синтезировано множество управлений по принципу обратной связи, стабилизирующих неустойчивые и устойчивые стационарные движения гиростата до асимптотически устойчивых.

Ключевые слова: гиростат, асимптотическая устойчивость, активное управление, обратная связь, стабилизация, полость с жидкостью.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи о пространственной ориентации спутников и летательных аппаратов на орбите имеют важное прикладное значение и широко рассматриваются исследователями во многих работах. Сферические движения летательных аппаратов относительно центра масс моделируются движениями твердых тел или систем тел, в частности, гиростатов. Например, движения под действием гравитационного момента на круговой орбите орбитальной станции Мир в 1999–2001 гг. и спутника Фотон М-3 в 2007 г. относительно своих центров масс в работе [1] моделируется с помощью осесимметричного гиростата с гиростатическим моментом, направленным по его оси симметрии. Основные способы и принципы управления вращательным движением тел и их систем были обозначены уже давно, например, в работах [2–4]. Современными отечественными и зарубежными авторами активно исследуются задачи о резонансных режимах и бифуркациях стационарных движений спутников [5, 6], о хаотических движениях и методах их устранения [7, 8], о стабилизации заданных программных движений гиростатов различной структуры [9, 10] .

С середины прошлого века получили бурное развитие задачи динамики твердых тел с полостями, содержащими жидкость, представляющие определенный теоретический интерес в связи с прикладными задачами, выдвигаемыми практикой: развитие ракетной техники, содержащей большое количество жидкого топлива, проблемы сейсмостойкости резервуаров для хранения жидкости и другие. Основополагающие результаты теории твердых тел с полостями, содержащими жидкость, изложены, например, в работах [11, 12]. На движение космического аппарата (КА) вокруг центра масс существенно влияют вращающиеся роторы и жидкое топливо, обуславливая необходимость изучения динамики и свойств устойчивости множества движений механической системы, представляющей собой однороторный гиростат с полостью, заполненной жидкостью. Этой проблеме посвящена предлагаемая работа.

В данной работе ставится задача исследования устойчивости и построения целого множества активных управлений, стабилизирующих до асимптотической устойчивости устойчивые и неустойчивые стационарные движения однороторного гиростата с полостью, целиком заполненной жидкостью большой вязкости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим пространственное движение гиростата, представленного на рисунке 1, как системы двух динамически симметричных связанных тел с общей осью вращения, совпадающей с осями динамической симметрии обоих тел: тело-носитель, содержащее полость, целиком заполненную жидкостью большой вязкости, и ротор. Пусть $A_1 = B_1$, C_1 – главные моменты инерции тела-носителя вместе с жидкостью, $A_2 = B_2$, C_2 – главные моменты инерции ротора. Координата σ представляет собой угол поворота ротора относительно носителя. Неподвижная точка O гиростата совпадает с общим центром масс системы и лежит на оси динамической симметрии обоих тел.

Алексеев Алексей Владимирович, кандидат технических наук, доцент. E-mail: alexeeff05@mail.ru
Безгласный Сергей Павлович, кандидат физико-математических наук, доцент, докторант.
E-mail: bezglasnsp@rambler.ru
Красников Виктор Сергеевич, аспирант.
E-mail: walkthrough@mail.ru

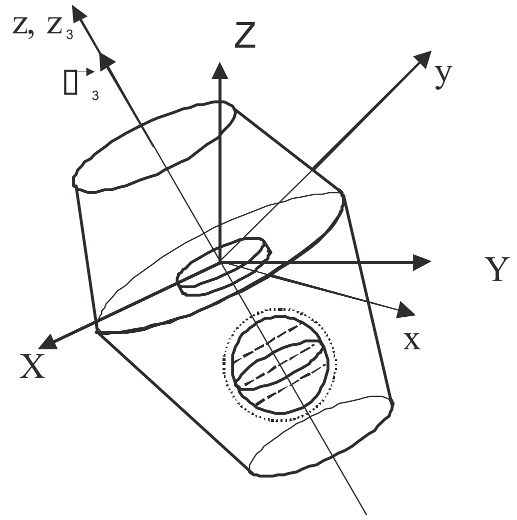

Рис. 1. Гиростат с полостью с жидкостью

Уравнения движения однороторного гиростата с полостью, заполненной жидкостью, в проекциях на оси связанной с носителем системы координат $Oxyz$, следуя [13], запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} &A\dot{p}+\left(C-B\right)qr+C_2 q\sigma=m_x,\\ &B\dot{q}+\left(A-C\right)pr-C_2 p\sigma=m_y,\\ &C\dot{r}+\left(B-A\right)pq+C_2\dot{\sigma}=m_z, \end{aligned} \tag{1}$$

$$C_2\left(\dot{r}+\dot{\sigma}\right)=M_z, \tag{2}$$

где $A=A_1+A_2$, $B=B_1+B_2$, $C=C_1+C_2$ главные моменты инерции гиростата, вычисленные в системе координат $Oxyz$. Выражение (2) представляет собой уравнение относительного вращения ротора, M_z – момент, действующий со стороны несущего тела на ротор. В дальнейшем будем рассматривать движение при предположении о равенстве нулю указанного момента. Тогда уравнение (2) приводится к следующему виду:

$$\dot{\sigma}_3=-\dot{r}. \tag{3}$$

Правые части уравнений (1) представляют собой проекции момента сил, действующих на несущее тело со стороны полости с жидкостью, и согласно работе [11] определяются равенством:

$$\mathbf{m}=-\left[\frac{\tilde{d}\mathbf{L}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L}\right]. \tag{4}$$

Гиростатический момент жидкости будем определять по формуле [11]:

$$\mathbf{L}=-\frac{\rho}{\nu}\mathbf{P}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}=-\frac{\rho}{\nu}P\mathbf{E}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}},$$

где $\dot{\boldsymbol{\omega}}=\left(\dot{p},\dot{q},\dot{r}\right)^{\mathrm{T}}$ – вектор углового ускорения несущего тела, P – коэффициент, учитывающий форму полости, ρ – плотность и ν – кинематическая вязкость жидкости. Учитывая вышесказанное, равенство (4) можно переписать в виде:

$$\mathbf{m}=-\frac{\rho}{\nu}P\mathbf{g},$$

где $\mathbf{m}=\left(m_x,m_y,m_z\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{g}=\begin{bmatrix}\ddot{p}+q\dot{r}-r\dot{q}\\ \ddot{q}+r\dot{p}-p\dot{r}\\ \ddot{r}+p\dot{q}-q\dot{p}\end{bmatrix}$.

Равенства (1), (3) представляют собой динамические уравнения движения рассматриваемой системы.

Согласно [13] введём в уравнениях (1), (3) новую переменную:

$$s=\left[\left(C-A\right)r+C_2\sigma\right]A^{-1}. \tag{5}$$

С учётом новой переменной и результатов интегрирования равенства (3) уравнения движения (1) примут вид:

$$\begin{aligned} &\dot{p}+sq=\frac{\rho}{\nu}\frac{1}{A}\frac{P}{C_1-A}ps\left[C_1 s-C_2\left(r_0+\sigma_0\right)\right],\\ &\dot{q}-sp=\frac{\rho}{\nu}\frac{1}{A}\frac{P}{C_1-A}qs\left[C_1 s-C_2\left(r_0+\sigma_0\right)\right],\\ &\frac{C_1}{C_1-A}\dot{s}=-\frac{\rho}{\nu}\frac{P}{A}s\left(p^2+q^2\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Поставим и решим следующие задачи: найти стационарные движения гиростата с полостью с жидкостью; исследовать их на устойчивость; стабилизировать построением активного управления неустойчивые стационарные движения гиростата до асимптотической устойчивости.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

Определим для данной системы множества стационарных движений, под которыми понимаются движения гиростата, для которых проекции вектора угловой скорости на оси связанной системы координат постоянны: $\dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0$. Решая полученную систему уравнений, получаем два стационарных движения:

$$\begin{aligned} &1)\ p = q = 0,\ s = u = const; \\ &2)\ p = a = const,\ q = b = const,\ s = 0. \end{aligned} \qquad (7)$$

Исследуем на устойчивость найденные стационарные движения. Составим уравнения возмущённого движения однороторного гиростата и уравнения их первого приближения вида $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ или в скалярном виде для первого и второго движений соответственно:

$$1)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = Mx_1 - Fx_2, \\ \dot{x}_2 = Fx_1 + Mx_2, \\ \dot{x}_3 = 0, \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = Tx_3, \\ \dot{x}_2 = Vx_3, \\ \dot{x}_3 = Kx_3, \end{cases} \qquad (8)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} &E = M = \frac{\rho}{\nu}\frac{1}{A}\frac{P}{C_1 - A}\left[C_1 u^2 - C_2 u\left(r_0 + \sigma_0\right)\right], \\ &T = -b - \frac{\rho}{\nu}\frac{1}{A}\frac{PC_2 a}{C_1 - A}\left(r_0 + \sigma_0\right), \\ &V = a - \frac{\rho}{\nu}\frac{1}{A}\frac{PC_2 b}{C_1 - A}\left(r_0 + \sigma_0\right), \\ &K = -\frac{\rho}{\nu}\frac{P}{AC_1}\left(a^2 + b^2\right)\left(A - C_1\right), \\ &F = -N = u. \end{aligned} \qquad (9)$$

Составляя характеристические уравнения линейных систем (8) и решая их относительно λ, получим следующие корни:

$$\begin{aligned} &1)\ \ \lambda_1 = 0, \quad \mathrm{Re}(\lambda_2) = E, \quad \mathrm{Re}(\lambda_3) = E; \\ &2)\ \ \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = K. \end{aligned} \qquad (10)$$

При $\mathrm{Re}(\lambda_3) = E < 0$ и $\mathrm{Re}(\lambda_3) = K < 0$, ввиду присутствия нулевых корней, согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению выводов об асимптотической устойчивости стационарных движений сделать нельзя, и данные движения необходимо исследовать другими методами теории устойчивости. При выполнении неравенств $\mathrm{Re}(\lambda_3) = E > 0$ и $\mathrm{Re}(\lambda_3) = K > 0$ имеем неустойчивость таких движений [15].

3. СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСТАТА

Решим задачу о стабилизации второго неустойчивого стационарного решения (7) при условии, что $\mathrm{Re}\left(\lambda_3\right) = K > 0$. Согласно [14] добавим в систему линейное по отклонениям управление вида $\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{x}$, и определим множества значений элементов матрицы $\mathbf{B}$, стабилизирующих устойчивые и неустойчивые стационарные движения гиростата до асимптотической устойчивости. Уравнения первого приближения управляемой системы, соответствующие уравнениям (10), примут вид $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}$.

Выбор структуры матрицы $\mathbf{B}$ обусловлен двумя соображениями. Во-первых, возьмем наибольшее возможное число нулевых элементов для упрощения искомого управления. Во-вторых, матрица $\mathbf{B}$ должна удовлетворять критерию полной управляемости линейных автономных систем [15]. Выберем матрицу $\mathbf{B}$ следующим образом (легко убедиться, что критерий полной управляемости выполнен, то есть ранг соответствующей матрицы управляемости равняется размерности фазового пространства – трём):

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Для того чтобы управляемое движение было асимптотически устойчивым, достаточно, чтобы все корни соответствующего характеристического уравнения

$$(b_{11} - \lambda)[\lambda^2 - \lambda(K + b_{22}) + \{Kb_{22} - Vb_{32}\}] = 0, (15)$$

имели отрицательные вещественные части. Используя критерий Гурвица, определим области допустимых значений коэффициентов b_{11}, b_{21}, b_{33} управления, при которых достигается асимптотическая стабилизация. А именно, для устойчивости второй линейной системы (10) необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы Гурвица были положительны. Таким образом, мы получаем систему трех неравенств:

$$\begin{cases} b_{11} < 0; \\ (-K - b_{22}) > 0; \\ (Kb_{22} - Vb_{32}) > 0. \end{cases} \qquad (18)$$

4. АНАЛИЗ МНОЖЕСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

Найдем решения последних двух неравенств системы (18), учитывая следующие замечания:

- будем рассматривать любые значения величины K;

- величины $p = a = const,\ \ q = b = const$ могут принимать значения любого знака, определяемого различными наборами значений параметров системы и начальных условий движения.

Решая систему второго и третьего неравенств из (18) относительно b_{11} и b_{21}, получим совокупность трех множеств решений (19) – (21), удовлетворяющих критерию Гурвица:

$$1)\begin{cases} V > 0; \\ b_{22} < -K; \\ b_{32} < \dfrac{Kb_{22}}{V}. \end{cases} \qquad (19)$$

Система (19) совместно с неравенством $b_{11} < 0$ задает целое множество значений коэффициентов b_{11}, b_{21}, b_{33} для синтеза стабилизирующего управления. Несложный анализ, проведенный ниже, этого решения дает следующие возможности для наиболее простого выбора элементов матрицы управления $\mathbf{B}$, упрощающие структуру полученного стабилизирующего управления. А именно,

А) При $K > 0$ можно выбрать произвольные значения

$$b_{11} < 0,\ b_{22} < -K < 0 \text{ и } b_{32} < \frac{Kb_{22}}{V} < 0.$$

Б) При $K < 0$ можно при $b_{11} < 0$ взять $b_{22} = 0$, тогда $b_{32} < 0$. И наоборот, если взять $b_{32} = 0$, то $b_{22} < 0$.

В) При $K = 0$ имеем $b_{22} < 0$ и $b_{32} < 0$.

Проведем анализ второй системы неравенств, следуемой из критерия Гурвица

$$2)\begin{cases} V = 0; \\ b_{22} < -K; \\ 0 < Kb_{22},\ \forall b_{32}. \end{cases} \qquad (20)$$

Анализ этого результата показывает, что возможен простейший синтез стабилизирующего управления согласно следующим условиям:

А) При $K = 0$ решения системы (20) не существует;

Б) При $K > 0$ последнее неравенство (20) несовместно;

В) При $K < 0$ можно взять $b_{22} < 0$ и, в частности, $b_{32} = 0$.

Для третьего случая, при $b_{11} < 0$, имеем систему неравенств:

$$3)\begin{cases} V < 0; \\ b_{22} < -K; \\ b_{32} > \dfrac{Kb_{22}}{V}. \end{cases} \qquad (21)$$

В частности, из нее вытекают простейшие решения:

А) При $K = 0$ $b_{22} < 0$, $b_{32} > 0$;

Б) При $K > 0$ управлять необходимо обоими коэффициентами, выбираемыми согласно (21);

В) При $K < 0$ можно взять коэффициент $b_{22} = 0$, тогда $b_{32} > 0$. И наоборот, если взять $b_{32} = 0$, то ему будет соответствовать любой $b_{22} < 0$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведена математическая модель движения относительно центра масс однороторного гиростата с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью. Найдены и исследованы на устойчивость стационарные движения гиростата. Синтезировано стабилизирующее линейное управление по принципу обратной связи, определены условия на коэффициенты и указаны простейшие частные случаи значений этих коэффициентов, обеспечивающих асимптотическую устойчивость неустойчивых стационарных режимов движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сазонов В.В.* Периодические движения спутника-гиростата относительно центра масс под действием гравитационного момента // Космические исследования. 2013. Т. 51. № 2. С. 145–158.
2. *Раушенбах В.В., Токарь В.И.* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 589 с.
3. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 359 с.
4. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения гиростатов // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 1. С. 9–16.
5. *Маркеев А.П.* Нелинейные колебания спутника при резонансе 1:1:1 // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 52–68.
6. *Харламов М.П., Рябов П.Е.* Бифуркация первых интегралов в случае Ковалевской-Яхьи // Регулярная и хаотическая динамика. 1997. Т. 2. № 2. С. 25–40.
7. *Hall C., Rand R.* Spinap Dynamics of Axial Dual-Spin Spacecraft // J. Guidance Control Dyn. 1994. V.17. Issue 1. pp. 30–37.
8. *El-Gohary A.* Chaos and optimal control of steady-state rotation of a satellite-gyrostat on a circular orbit // Chaos, solitons & fractals. 2009. V. 42. Issue 5. Pp. 2842–2851.
9. *Безгласный С.П., Мысина О.А.* Об одноосной и трехосной ориентации составного тела // Вестник СамГУ. Естественно-научная серия. 2011. № 2 (83). С. 80–90.
10. *Безгласный С.П., Худякова М.А.* Об ориентации гиростата с переменными моментами инерции // Автоматизация процессов управления. 2013. № 2 (32). С. 22–28.
11. *Черноусько Ф.Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1968.
12. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
13. *Алексеев А.В.* Движение спутника-гиростата, содержащего полость с жидкостью большой вязкости // Известия Самарского научного центра РАН. 2007. № 9.. С.671–676.

14. *Алексеев А.В., Безгласный С.П., Красников В.С.* Стабилизация стационарных движений однороторного гиростата с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева (национального исследовательского университета). 2012. № 6. С. 13–18.
15. *Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М.* Оптимальное управление движением. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 376 с.

BUILDING STABILIZING CONTROL FOR STATIONARY MOTIONS OF A GYROSTAT WITH A CAVITY VISCOUS FLUID

© 2013 A.V. Alekseev, S.P. Bezglasnyi, V.S. Krasnikov

Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolyov
(National Research University)

Spherical motion relative to the center of mass of the free single rotor gyrostat with a spherical cavity is entirely filled with a fluid of high viscosity are researched. Equations of motion are found and investigated the stability of stationary motion. The set of controls on the basis of feedback which stabilize unstable and stable stationary motion of gyrostat to asymptotically stable, are constructed.
Keywords: gyrostat, asymptotic stability, active control, feedback, stabilization, cavity with fluid.

Aleksey Alekseev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor. E-mail: alexeeff05@mail.ru
Sergey Bezglasnyi, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Doctoral Candidate.
E-mail: bezglasnsp@rambler.ru
Viktor Krasnikov, Post Graduate Student.
E-mail: walkthrough@mail.ru