

УДК 62.534 (031)

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ МАЯТНИКА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

© 2013 С.П. Безгласный, Н.И. Кутырева

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 02.12.2013

Рассматривается задача параметрического управления плоскими движениями маятника переменной длины. Маятник представляет собой невесомый стержень с точечной массой, которая может скользить вдоль стержня в ограниченных пределах. Управление является расстоянием от точки подвеса до подвижной точки. Предложен закон управления успокоением маятника путем непрерывного изменения длины подвеса маятника, зависящей от фазового состояния. Для предложенного закона управления численно показана асимптотическая устойчивость нижнего положения маятника в случаях увеличения и уменьшения его длины соответственно. Теоретические результаты подтверждены графическим представлением численных расчетов.

Ключевые слова: маятник переменной длины, управляемая система, асимптотическая устойчивость.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение движений математического маятника обнаруживает много качественных свойств динамики нелинейной системы и вызывает как самостоятельный интерес у современных исследователей, так и в прикладных задачах, когда плоские движения исследуемых систем и объектов при различных упрощениях моделируют математическим маятником. Так, например, в работе [1] изучены бифуркации равновесий и исследованы резонансы в задаче о колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании при больших частотах вибраций и малых амплитудах колебаний длины маятника и точки его подвеса. В [2] при помощи КАМ-теории проанализированы условно-периодические движения системы в задаче о движении двух одинаковых маятников, связанных линейной упругой пружиной, в окрестности их устойчивого вертикального положения равновесия. Задача о стабилизации релейным управлением программных движений маятника в переменном поле силы тяжести при наличии неучтенных воздействий решена в работе [3] с помощью метода предельных функций и предельных систем [4].

Одной из классических задач механики о маятниковых движениях является задача об управлении движением маятника переменной длины, являющегося одномассовой моделью качелей. Так авторами в ряде работ, например [5–10], исследовались вопросы устойчивости и неустойчи-

вости верхнего и нижнего положений, влияния сил (сухого, вязкого трений и аэродинамического сопротивления), выбора оптимальных режимов раскачки, гашения колебаний и возникновения резонансов. Перемещая массу вдоль невесомого стержня по принципу раскачки качелей, можно решать и некоторые прикладные задачи об управлении движениями более сложных объектов. Например, в работе [11] с помощью закона управления подвижной массой, предложенного в [12], решены задачи о диаметральной переориентации и гравитационной стабилизации плоских движений спутника на круговой орбите.

Основными недостатками управления длиной маятника по принципу качелей являются следующие. Во-первых, в большинстве указанных выше работ задачи об управлении качелями решались с помощью скачкообразного (релейного) изменения величины перемещения подвижной массы. В силу инертности масс на практике реализация релейного изменения длины представляется затруднительной. Авторами работ [11, 12] предложен непрерывный закон движения подвижной массы, позволяющий раскачивать и тормозить качели. Но управляющий закон, предложенный в этих работах, предполагает неограниченность расстояния от точки подвеса до подвижной массы в обе стороны, в частности, в [12] авторами приведен численный пример, в котором теоретически считается, что стержень продлен вверх за точку подвеса маятника с предоставленной возможностью движения по нему подвижной массы, что является нецелесообразным и крайне затруднительным с точки зрения практической реализации. В работе [13] был предложен новый закон управлением длиной маятника, который предполагает

Безгласный Сергей Павлович, кандидат физико-математических наук, доцент, докторант.

E-mail: bezglasnsp@rambler.ru

Кутырева Наталья Игоревна, студент.

E-mail: nataliya.kutyreva@gmail.com

ограниченность относительного перемещения этой массы вдоль стержня. Но он имеет точки излома, значит, как и для релейного закона управления, при его реализации будет возникать эффект биения вследствие скачкообразного изменения скорости движения управляемой массы. Во-вторых, в большинстве указанных работ отмечается очень медленная сходимость амплитуды к положению нижнего равновесия, что делает эти способы управления слабо эффективными вблизи окрестности нуля.

В данной работе предложен новый закон управления длиной одномассового маятника, позволяющего одновременно существенно увеличивать (уменьшать) длину маятника и гасить амплитуду плоских колебаний относительно его вертикального положения. Реализация таких движений может быть полезна в различных приложениях, например, при моделировании процесса опускания или подъема груза с помощью тросовой лебедки, расположенной на борту зависшего вертолета, при проведении строительных или спасательных работ в труднодоступных местах.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим в поле силы тяжести плоские движения закрепленного в неподвижной точке невесомого стержня с подвижной точечной массой – математический маятник переменной длины.

Пусть l – расстояние от точки подвеса маятника до материальной точки массы m , которая может перемещаться вдоль стержня. Угол отклонения маятника от вертикали обозначим через φ . Как и в [11], управлением будет расстояние от точки подвеса до подвижной массы, то есть длина маятника.

Кинетическая и потенциальная энергии маятника имеют вид:

$$T = \frac{m}{2} (l(t)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{l}(t)^2), \quad \Pi = -mgl(t) \cos \varphi.$$

Запишем уравнение движения маятника в виде уравнения Лагранжа второго рода:

$$2ml(t)\dot{l}(t)\dot{\varphi} + ml(t)^2\ddot{\varphi} + mgl(t)\sin \varphi = 0, \quad (1)$$

где g – ускорение сил тяготения; точка обозначает производную по времени.

Поставим и решим две задачи об управлении плоскими движениями маятника – построить законы управления движением подвижной массы (или управления длиной маятника), реализующие существенное увеличение или уменьшение длины маятника с одновременным гашением амплитуды его колебаний в окрестности нижнего положения равновесия.

2. УСПОКОЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ ЕГО ДЛИНЫ

Рассмотрим вспомогательную функцию $F(\varphi, \dot{\varphi})$ с ее производной по времени, определенные равенствами:

$$\begin{aligned} F(\varphi, \dot{\varphi}) &= \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}, \\ \dot{F} &= \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Зададим закон изменения длины маятника при его движениях согласно следующим равенствам:

$$l = l_0 + \int_0^t v \cdot \theta(\dot{F}) dt$$

$$\theta(\dot{F}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \dot{F} = \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} < 0, \\ 1, & \text{если } \dot{F} = \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} \geq 0 \end{cases}, \quad (3)$$

где $v = const > 0$ – скорость изменения длины маятника, $\theta(\dot{F})$ – функция Хевисайда.

Производная от величины l запишется равенством:

$$\dot{l} = v \cdot \theta(\dot{F}). \quad (4)$$

Подставив (3) и (4) в (1), получим уравнения движения маятника в виде:

$$\begin{cases} 2m \left(l_0 + \int_0^t v \cdot \theta(\dot{F}) dt \right) \cdot v \cdot \theta(\dot{F}) \cdot \dot{\varphi} + m \left(l_0 + \int_0^t v \cdot \theta(\dot{F}) dt \right)^2 \cdot \ddot{\varphi} + \\ + mg \left(l_0 + \int_0^t v \cdot \theta(\dot{F}) dt \right) \sin \varphi = 0, \text{ при } \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} \geq 0 \\ \left\{ \begin{aligned} &ml_0^2 \ddot{\varphi} + mgl_0 \sin \varphi = 0, \\ &\text{при } \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} < 0. \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (5)$$

Проинтегрируем численно систему (5) при следующих значениях входящих в нее параметров: $m = 1 \text{ кг}$, $l_0 = 1 \text{ м}$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, $v = 1 \text{ м/с}$ и начальных данных движения: $\varphi_0 = \pi/6 \text{ рад}$, $\dot{\varphi}_0 = 0 \text{ рад/с}$. Интегрирование проведено на временном промежутке $t \in [0; 100] \text{ с}$.

На рис. 1–5 представлены графики численных расчетов. Рис. 1 и 2 иллюстрируют асимптотическую сходимость к нулевому значению величин φ и $\dot{\varphi}$ с течением времени, что соответствует затуханию амплитуды колебаний маятника. Фазовый портрет системы на рисунке 3 тоже подтверждает сделанные выводы об успокоении колебаний маятника в окрестности нижнего положения равновесия. Тем временем график изменения величины l на рисунке 4 демонстрирует ее существенный рост от значения $l_0 = 1 \text{ м}$ до значений, превосходящих 50 метров на рассматриваемом интервале движения. Показательной является кривая, изображенная на рис. 5, иллюс-

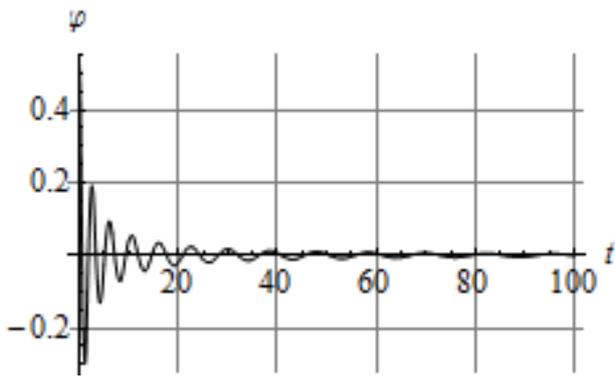


Рис. 1. График $\varphi(t)$

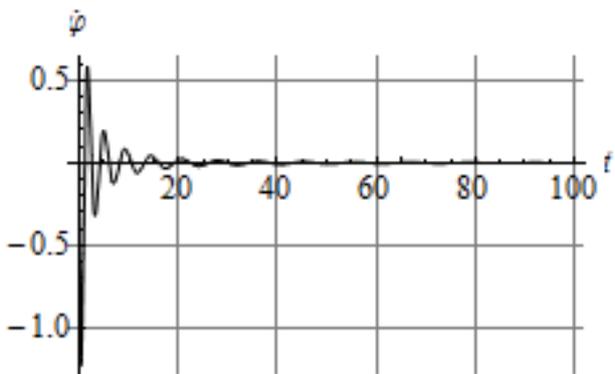


Рис. 2. График $\dot{\varphi}(t)$

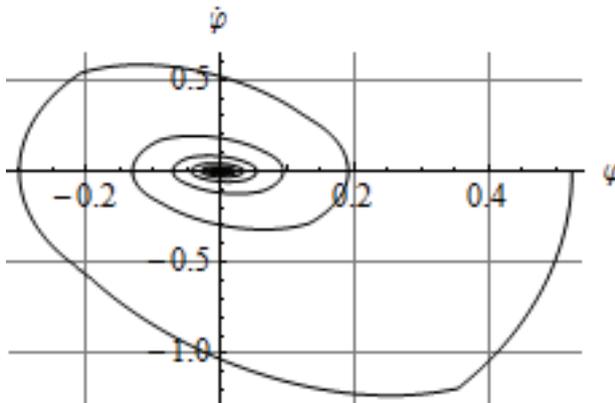


Рис. 3. Фазовая плоскость

трирующая одновременный рост длины маятника с асимптотическим уменьшением амплитуды его движения. Итак, предложенный закон (3) управлением подвижной массой маятника решает поставленную задачу о существенном увеличении его длины при одновременном гашении амплитуды колебаний.

3. УСПОКОЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА ПРИ УМЕНЬШЕНИИ ЕГО ДЛИНЫ

Теперь решим противоположную задачу об управлении плоскими движениями маятника – построить закон управления движением подвижной массы (или управления длиной маятника), реализующий существенное уменьшение длины

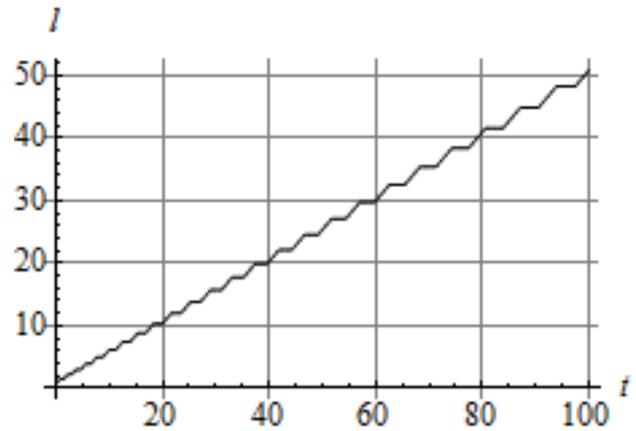


Рис. 4. График $l(t)$

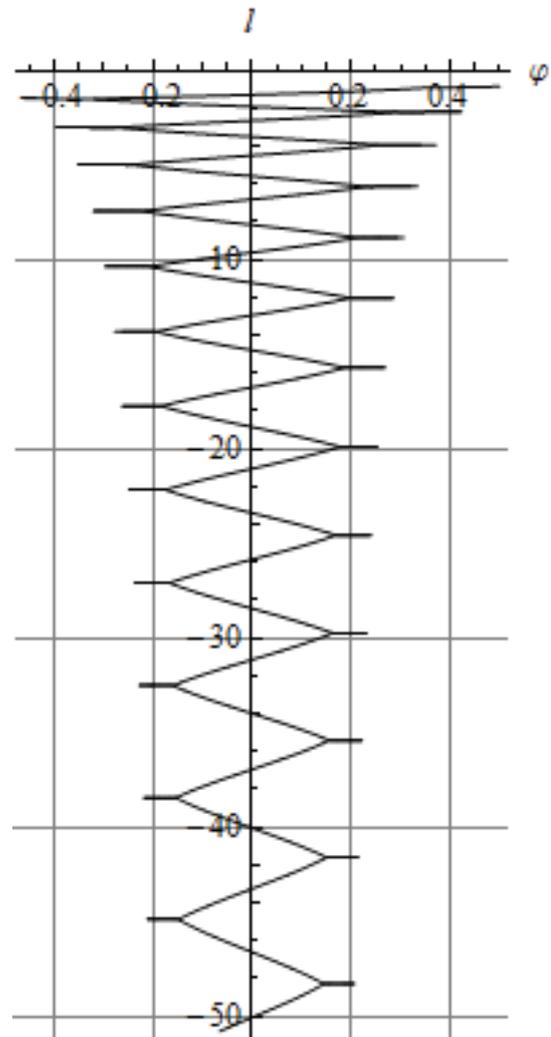


Рис. 5. График $l(\varphi)$

маятника с одновременным гашением амплитуды его колебаний в окрестности нижнего положения равновесия.

Зададим закон изменения длины маятника при его движениях согласно следующим равенствам:

$$l = l_0 - \int_0^t v \cdot \theta(\dot{F}) dt, \quad (6)$$

$$\theta(\dot{F}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \dot{F} = \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} > 0, \\ 1, & \text{если } \dot{F} = \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} \leq 0 \end{cases}$$

где опять число $\nu = const > 0$ задает скорость изменения длины маятника, $\theta(\dot{F})$ – функция Хевисайда.

Производная от величины l запишется равенством:

$$\dot{l} = -\nu \cdot \theta(\dot{F}). \quad (7)$$

Подставив (6) и (7) в (1), получим уравнения движения маятника в виде:

$$\begin{cases} 2m \left(l_0 - \int_0^t \nu \cdot \theta(\dot{F}) dt \right) \cdot \nu \cdot \theta(\dot{F}) \cdot \dot{\varphi} + m \left(l_0 - \int_0^t \nu \cdot \theta(\dot{F}) dt \right)^2 \cdot \ddot{\varphi} + \\ + mg \left(l_0 - \int_0^t \nu \cdot \theta(\dot{F}) dt \right) \sin \varphi = 0, & \text{при } \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} \leq 0 \quad (8) \\ \begin{cases} ml_0^2 \ddot{\varphi} + mg l_0 \sin \varphi = 0, \\ \text{при } \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Проинтегрируем численно систему (8) при следующих значениях входящих в нее параметров: $m = 1 \text{ кг}$, $l_0 = 100 \text{ м}$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, $\nu = 1 \text{ м/с}$ и начальных данных движения: $\varphi_0 = \pi/6 \text{ рад}$, $\dot{\varphi}_0 = 0 \text{ рад/с}$. Интегрирование проведено на временном промежутке $t \in [0; 195] \text{ с}$.

На рис. 6–10 представлены графики численных расчетов. Рис. 1 и 2 иллюстрируют асимпто-

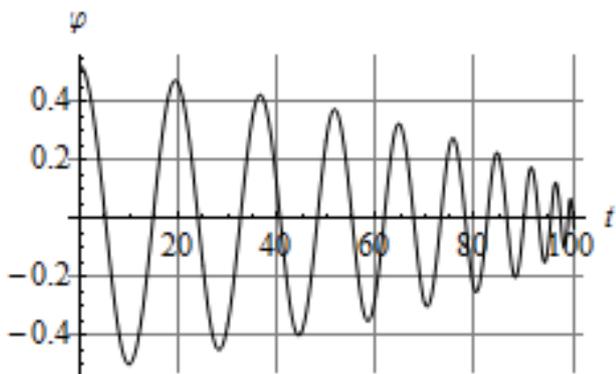


Рис. 6. График $\varphi(t)$

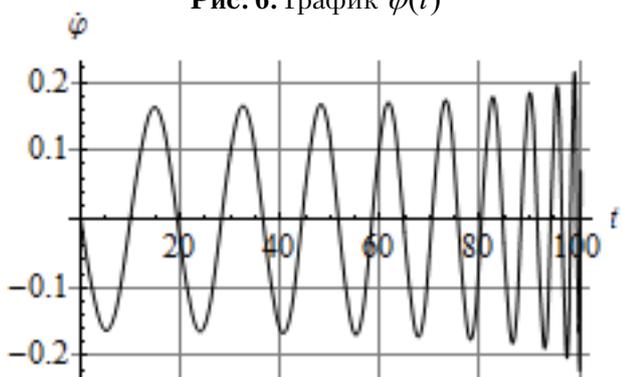


Рис. 7. График $\dot{\varphi}(t)$

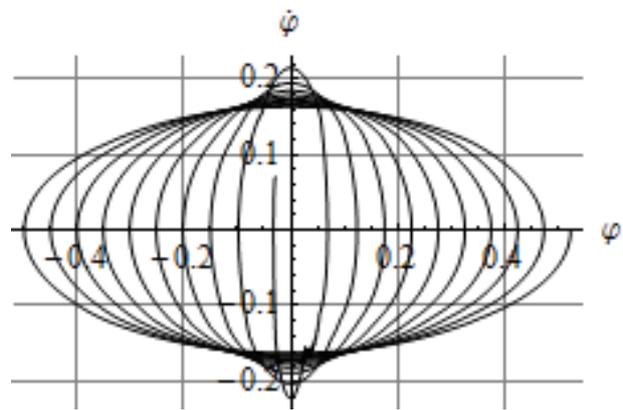


Рис. 8. Фазовая плоскость

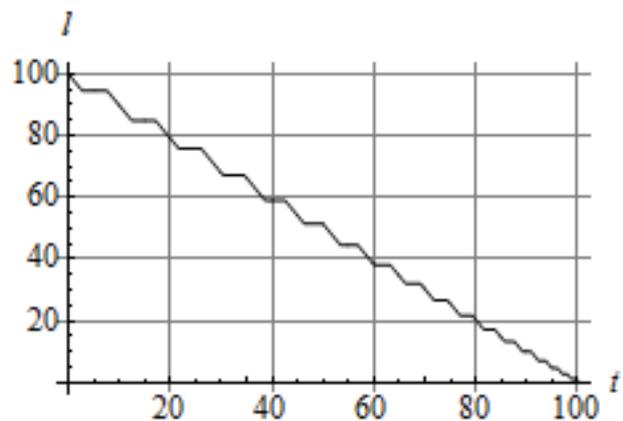


Рис. 9. График $l(t)$

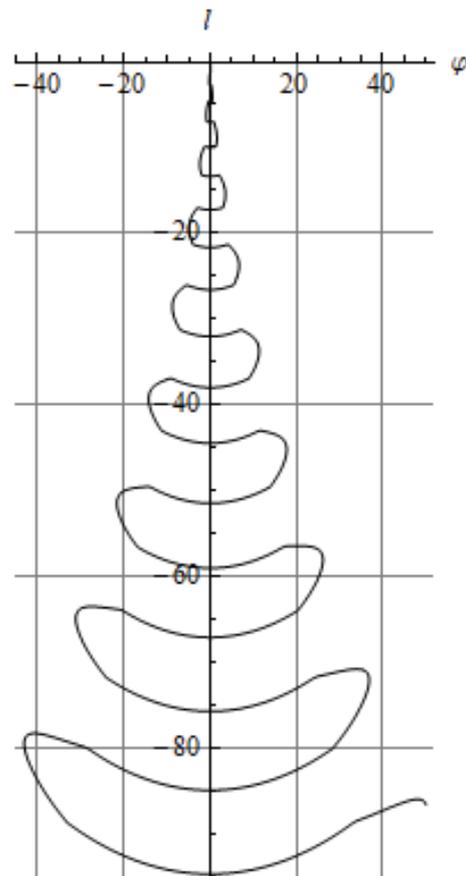


Рис. 10. График $l(\varphi)$

тическую сходимость к нулевому значению величин φ и $\dot{\varphi}$ с течением времени, что соответствует затуханию амплитуды колебаний маятника. Фазовый портрет системы на рисунке 3 тоже подтверждает сделанные выводы об успокоении колебаний маятника в окрестности нижнего положения равновесия. Тем временем график изменения величины l на рисунке 4 демонстрирует ее существенный рост от значения $l_0 = 1$ м до значений, превосходящих 50 метров на рассматриваемом интервале движения. Показательной является кривая, изображенная на рисунке 5, иллюстрирующая одновременный рост длины маятника с асимптотическим уменьшением амплитуды его движения. Итак, предложенный закон (3) управлением подвижной массой маятника решает поставленную задачу о существенном увеличении его длины при одновременном гашении амплитуды колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красильников П.С. О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 36–51.
2. Маркеев А.П. Нелинейные колебания симпатических маятников // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 3. С. 605–622.
3. Андреев А.С. Метод функций Ляпунова в задачах управления // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12. № 4. С. 64–73.
4. Андреев А.С. Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы // ПММ. 1996. Т.60. Вып. 3. С. 388–396.
5. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник» Алма-Ата: Наука, 1981. 253 с.
6. Magnus K. Schwingungen. Stuttgart: B.G. Teubner, 1976. Магнус К. Колебания. М.: Мир, 1982. 304 с.
7. Чеширин С.Л. Параметрические колебания и устойчивость периодического движения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 219 с.
8. Сейранян А.П. Качели. Параметрический резонанс // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 5. С. 847–856.
9. Зевин А.А., Филоненко Л.А. Качественное исследование колебаний маятника с периодически меняющейся длиной и математическая модель качелей // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 6. С. 989–1003.
10. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Устойчивость равновесия маятника переменной длины // ПММ. 2009. Т.73. Вып. 6. С. 893–901.
11. Асланов В.С., Безгласный С.П. Гравитационная стабилизация спутника с помощью подвижной массы // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 565–575.
12. Асланов В.С., Безгласный С.П. Устойчивость и неустойчивость управляемых движений двухмассового маятника переменной длины // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 3. С. 32–46.
13. Безгласный С.П., Пиякина Е.Е., Талитова А.А. Ограниченное управление двухмассовым маятником // Автоматизация процессов управления. 2013. Т. 34. № 4. С. 23–29.

CONTROL OF THE OSCILLATION OF THE VARIABLE-LENGTH PENDULUM

© 2013 S.P. Bezglasnyi, N.I. Kuttyreva

Samara State Aerospace University

The problem of parametric control of plane motions of the variable-length pendulum is considered. The pendulum is a weightless rod with a point unit which is slides along it within bounded limits. The control is the distance from the suspension point to the moving point. The proposed control law of pendulum damping consists in continuously varying the pendulum suspension length depending on the phase state. The asymptotic stability of the pendulum lower position in the respective cases of increase and decrease in length are numerically shown for the proposed control law. The theoretical results are confirmed by graphical representation of the numerical results.

Key words: variable-length pendulum, controlled system, asymptotic stability.

Sergey Bezglasnyi, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Doctoral Candidate.

E-mail: bezglasnsp@rambler.ru

Nataliya Kuttyreva, student.

E-mail: nataliya.kuttyreva@gmail.com