УДК 62.534 (031)

ОБ УПРАВЛЕНИИ ОРИЕНТАЦИЕЙ СТВОРОК СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

© 2013 С.П. Безгласный, А.Е. Старцев

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 02.12.2013

В работе рассмотрена задача об управлении движениями панелей солнечных батарей космического аппарата на круговой орбите, моделируемых механической системой с тремя степенями свободы. Синтезированы два вида активных управлений по принципу обратной связи, реализующих асимптотически устойчивые заданные нестационарные программные движения батарей. Решение задачи приведено на основе первого метода классической теории устойчивости.

Ключевые слова: программное движение, функция Ляпунова, прямой метод, стабилизация движения, асимптотическая устойчивость.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи по реализации управляемых пространственных движений механической системы имеют важное прикладное значение и широко рассматриваются авторами во многих работах, например [1–7]. В данной работе ставится и решается задача об управлении движениями панелей солнечных батарей космического аппарата на круговой орбите, моделируемых плоскими трехзвенниками, шарнирно прекрепленными к корпусу аппарата. Определены управления, реализующие и стабилизирующие заданные программные движения трехзвенника, обеспечивающие постоянную ориентацию панелей батарей в сторону Солнца при движении космического аппарата по круговой орбите. Решение проводится построением активного управления (моментов), приложенного к звеньям панелей и представляющего собой совокупность программного управления и стабилизирующего управления, осуществляемого по принципу обратной связи. Исследование программного движения сводится к анализу нулевого решения неавтономной системы уравнений возмущенного движения и проводится на основе прямого метода Ляпунова [1].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть рассматриваемая механическая система (панели батареи) представляет собой трехзвенный плоский маятник, закрепленный с помощью шарнира на корпусе космического аппарата. Каждое звено маятника однородно и центр масс звена находится на середине длины. За обобщенные координаты примем углы φ, ψ и θ – углы отклонения каждой из панелей, отсчитываемые от продольной оси аппарата.

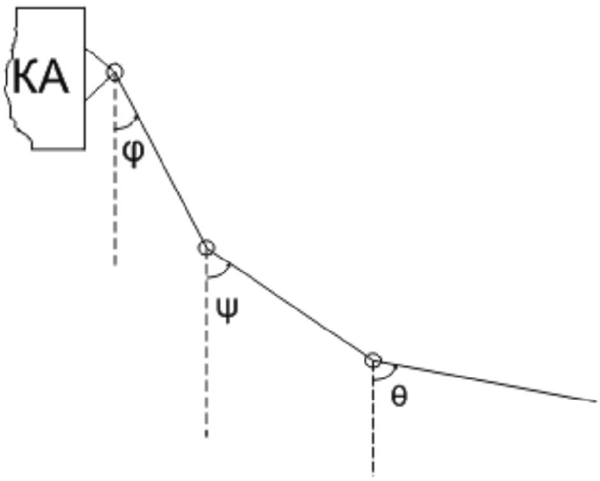

Рис. 1. Механическая система

Обозначив массы m_i и длины l_i, $i = 1,2,3$ стержней соответственно, запишем кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{24} m_2 l_2^2 \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{l_2^2}{4} \dot{\psi}^2 + l_1 l_2 \dot{\varphi}\dot{\psi} \cos(\varphi - \psi)) + \frac{1}{24} m_3 l_3^2 \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi} + \dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2} m_3 (l_1^2 \dot{\varphi}^2 + l_2^2 \dot{\psi}^2 + \frac{l_3^2}{4} \dot{\theta}^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}\dot{\psi} \cos(\varphi - \psi) + l_1 l_3 \dot{\varphi}\dot{\theta} \cos(\varphi - \theta) + l_2 l_3 \dot{\psi}\dot{\theta} \cos(\psi - \theta)).$$

Уравнения движения в виде уравнений Лагранжа второго рода будут иметь вид:

Безгласный Сергей Павлович, кандидат физико-математических наук, доцент, докторант.
E-mail: bezglasnsp@rambler.ru
Старцев Алексей Евгеньевич, студент.
E-mail: alexsei91@rambler.ru

$$\begin{cases}
\frac{1}{3}m_1l_1^2\ddot{\varphi}+\frac{1}{12}m_2l_2^2(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi})+\frac{1}{2}m_2(2l_1^2\ddot{\varphi}+l_1l_2\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi)-l_1l_2\dot{\psi}(\dot{\varphi}-\dot{\psi})\sin(\varphi-\psi))+\\
+\frac{1}{12}m_3l_3^2(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}+\ddot{\theta})+\frac{1}{2}m_3(2l_1^2\ddot{\varphi}+2l_1l_2\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi)-2l_1l_2\dot{\psi}(\dot{\varphi}-\dot{\psi})\sin(\varphi-\psi)+\\
l_1l_3\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta)-l_1l_3\dot{\theta}(\dot{\varphi}-\dot{\theta})\sin(\varphi-\theta))+\frac{1}{2}m_2l_1l_2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi-\psi)+\\
+m_3(l_1l_2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi-\psi)+\frac{1}{2}l_1l_3\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin(\varphi-\theta))=Q_\varphi,\\
\frac{1}{12}m_2l_2^2(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi})+\frac{1}{2}m_2(\frac{l_2^2}{2}\ddot{\psi}+l_1l_2\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi)-l_1l_2\dot{\varphi}(\dot{\varphi}-\dot{\psi})\sin(\varphi-\psi))+\\
\frac{1}{12}m_3l_3^2(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}+\ddot{\theta})+\frac{1}{2}m_3(2l_2^2\ddot{\psi}+2l_1l_2\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi)-2l_1l_2\dot{\varphi}(\dot{\varphi}-\dot{\psi})\sin(\varphi-\psi)+\\
+l_2l_3\ddot{\theta}\cos(\psi-\theta)-l_2l_3\dot{\theta}(\dot{\psi}-\dot{\theta})\sin(\psi-\theta))-\frac{1}{2}m_2l_1l_2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi-\psi)-\\
-m_3(l_1l_2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi-\psi)-\frac{1}{2}l_2l_3\dot{\psi}\dot{\theta}\sin(\psi-\theta))=Q_\psi,\\
\frac{1}{12}m_2l_2^2(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}+\ddot{\theta})+\frac{1}{2}m_3(\frac{l_3^2}{2}\ddot{\theta}+l_1l_3\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)-l_1l_3\dot{\varphi}(\dot{\varphi}-\dot{\theta})\sin(\varphi-\theta)+\\
+l_2l_3\ddot{\psi}\cos(\psi-\theta)-l_2l_3\dot{\psi}(\dot{\psi}-\dot{\theta})\sin(\psi-\theta))-\frac{1}{2}m_3(l_1l_3\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin(\varphi-\theta)+\\
+l_2l_3\dot{\psi}\dot{\theta}\sin(\psi-\theta))=Q_\theta.
\end{cases}$$

Вектор Q в правой части уравнений Лагранжа представляет собой сумму внешних обобщенных сил, действующих на механическую систему, и управляющих воздействий, определяемых в дальнейшем. В дальнейшем будем считать, что действующие на систему внешние силы равны нулю, то есть $Q_{вн}=0$.

Программным движением назовем совокупность непрерывных дважды дифференцируемых функций: $\varphi^*(t)$, $\psi^*(t)$, $\theta^*(t)$. В общем случае эти функции не являются решениями системы уравнений движения. Поэтому для реализации программного движения управляющие силы представимы в виде суммы:

$$Q_u = Q_c + Q_{st},$$

где Q_c – силы, реализующие программное движение, Q_{st} – силы, стабилизирующие его.

Поставим и решим задачу – определить явный вид активных управлений в виде программных моментов M_c^φ, M_c^ψ, M_c^θ, приложенных к панелям батарей и реализующих выбранное программное движение, и стабилизирующих сил Q_{st}, обеспечивающих асимптотическую устойчивость реализуемых движений.

2. СИНТЕЗ ПРОГРАММНОГО И СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЙ

Выберем программное движение в виде

$$\begin{cases}\varphi^*=0,\\ \psi^*=\omega_0 t,\\ \theta^*=\omega_0 t.\end{cases}$$

Если величина ω_0 равняется угловой скорости обращений космического аппарата вокруг Земли по круговой траектории, и движения трехзвенника происходят в плоскости, параллельной плоскости орбиты, то выбранные функции будут соответствовать постоянной ориентации двух крайних панелей солнечной батареи относительно неподвижной системы координат (например, ориентации на Солнце под выбранным углом). Найдем программные моменты прямой подстановкой в левую часть системы уравнений движения функций φ^*, ψ^*, θ^*:

$$\begin{cases}M_c^\varphi=-\frac{1}{2}l_1l_2\omega_0^2(m_2+2m_3)\sin(\omega_0 t),\\ M_c^\psi=0,\\ M_c^\theta=-\frac{1}{2}m_3l_2l_3\omega_0^2\sin(\omega_0 t).\end{cases} \tag{1}$$

Добавив в правые части уравнений Лагранжа найденные программные моменты (1), получим систему уравнений управляемых движений трехзвенника. Сведем решение задачи о стабилизации программных движений к задаче об устойчивости положения равновесия системы [5,8]. Для этого составим уравнения возмущенного движения трехзвенника, введя отклонения по правилам:

$$\begin{cases}x_1=\varphi-\varphi^*,\\ x_2=\psi-\psi^*,\\ x_3=\theta-\theta^*,\end{cases}$$

Подставив их в систему уравнений управляемых движений, получим систему уравнений в отклонениях. Как известно [1], она разрешима относительно вторых производных и представима в нормальной форме. Имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка (ее явный вид не приводится в силу громоздкости) относительно переменных $x=(x_1,x_2,x_3,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3)^{\mathrm{T}}$, где символ $(\ )^{\mathrm{T}}$ обозначает транспонирование. Линеаризовав правые части этой системы, легко записать систему первого приближения уравнений возмущенного движения в виде

$$\dot{x}=Ax, \tag{2}$$

где $A_{6\times6}$ – матрица коэффициентов имеет вид:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&0&a_{45}&0\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&0&a_{55}&0\\a_{61}&a_{62}&a_{63}&0&a_{65}&0\end{pmatrix}$$

и имеет 15 ненулевых элементов из 36, определяемых через параметры системы и выбранного программного движения, в частности,

$$a_{41}=(576m_3^2l_1l_2^3\omega_0^2\cos(\omega_0t)-432m_3^2l_1l_3^2\omega_0^2\cos(\omega_0t)^3+18m_2l_1l_2m_3l_3^2\omega_0^2\cos(\omega_0t)+$$
$$+480m_3l_1l_2^3m_2\omega_0^2\cos(\omega_0t)+96m_2^2l_1l_2^3\omega_0^2\cos(\omega_0t)-216m_3l_1l_2^3m_2\omega_0^2\cos(\omega_0t)^3+$$
$$+36m_3^2l_1l_3^2l_2\omega_0^2\cos(\omega_0t)-144m_3^2l_1l_2^2l_3\omega_0^2\cos(\omega_0t)^2-72m_2l_1l_2^2m_3l_3\omega_0^2\cos(\omega_0t)^2)/$$
$$/(36m_2l_1l_2^2m_3l_3+576m_2l_1^2l_2^2\cos(\omega_0t)^2m_3-72m_2l_1l_2^2\cos(\omega_0t)^2m_3l_3+$$
$$+72m_2l_1^2l_2\cos(\omega_0t)m_3l_3-144m_3^2l_1l_2^2\cos(\omega_0t)^2l_3+48m_1l_1^2m_3l_2l_3\cos(\omega_0t)+$$
$$+144m_2^2l_1^2l_2^2co(\omega_0t)^2+48m_2^2l_1l_2^3\cos(\omega_0t)+144m_3^2l_1^2l_2^2\cos(\omega_0t)^2+$$
$$+36m_3^2l_2^2l_3^2\cos(\omega_0t)^2+36m_2l_2^4m_3\cos(\omega_0t)^2+24m_2l_2^3m_3l_1\cos(\omega_0t)+$$
$$+144m_1l_1^2m_3l_2^2\cos(\omega_0t)^2+36m_2l_1l_2\cos(\omega_0t)m_3l_3^2-36m_3^2l_3^2l_2^2-48m_2l_2^4m_3-$$
$$-144m_3^2l_1^2l_2^2-192m_2^2l_1^2l_2^2-12m_2^2l_2^4-9m_2l_2^2m_3l_3^2-64m_1l_1^2m_2l_2^2-192m_1l_1^2m_3l_2^2-$$
$$-12m_1l_1^2m_3l_3^2-624m_3l_1^2m_2l_2^2-36m_2l_1^2m_3l_3^2+144m_3^2l_1l_2^2l_3),$$

явный вид остальных ненулевых элементов a_{ij} опущен ввиду громоздкости.

Добавив в систему (2) управление $u = Bx$, получим линейную управляемую систему:

$$\dot{x}=(A+B)x. \qquad (3)$$

Выберем элементы матрицы B согласно равенствам

$$b_{ij}=-a_{ij}-e_{ij}\,,\ e_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \qquad (4)$$

Тогда все характеристические числа системы (4) будут отрицательны, и согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости по линейному приближению [1], нелинейная система уравнений возмущенного движения с добавленным в нее управлением $u = Bx$ будет иметь асимптотически устойчивое тривиальное решение $x = 0$, соответствующее выбранному программному движению трехзвенника.

Численное интегрирование уравнений стабилизированного движения подтверждает и иллюстрирует полученные результаты. Ниже приведены графики поведения отклонений и скоростей с течением времени. Уравнения движения были проинтегрированы при следующих значениях параметров системы: $m_1 = 0.5$ *кг*, $m_2 = m_3 = 1$ *кг*, $l_1 = 2$ *м*, $l_2 = l_3 = 1$ *м*, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{5400}$ *рад/с* и следующих начальных данных:

$$\varphi_0=\psi_0=\theta_0=\frac{\pi}{100}\ \text{рад},$$

$$\dot{\varphi}_0=\dot{\psi}_0=\dot{\theta}_0=\frac{\pi}{50}\ \text{рад/с}.$$

Предложенное управление с коэффициентами (4) обеспечивает хорошую сходимость, но является сложным по структуре и имеет много ком-

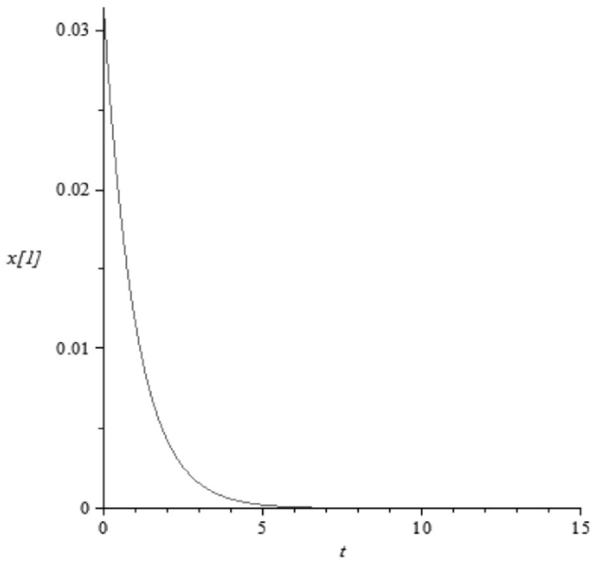

Рис. 2. График $x_1(t)$

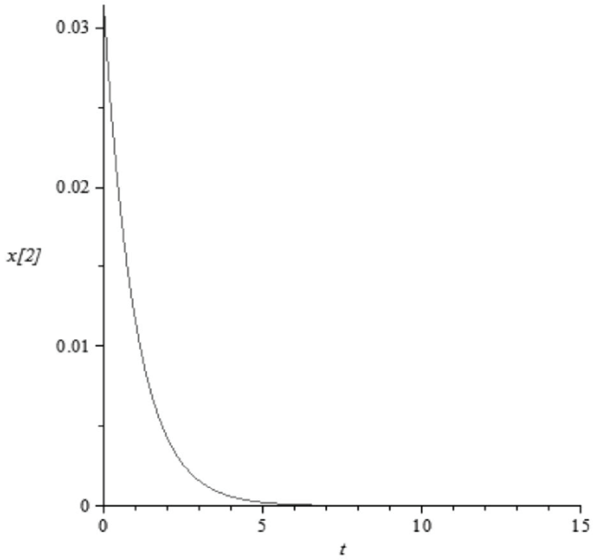

Рис. 3. График $x_2(t)$

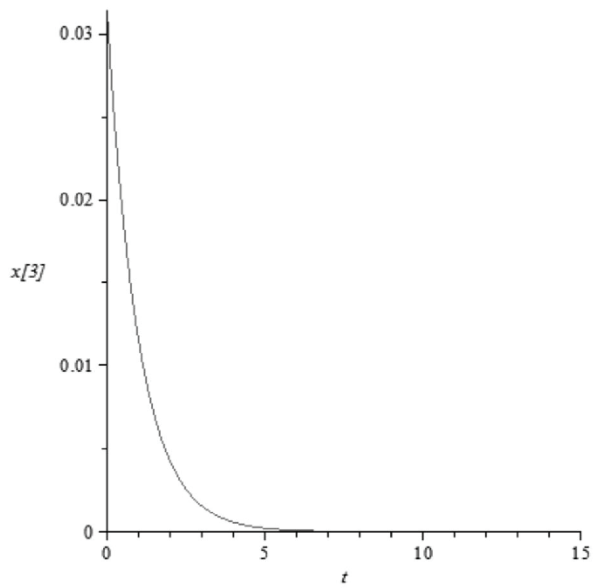

Рис. 4. График $x_3(t)$

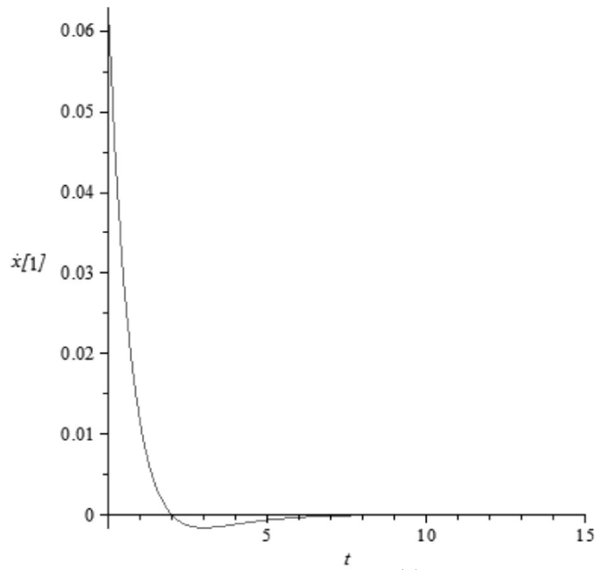

Рис. 5. График $\dot{x}_1(t)$

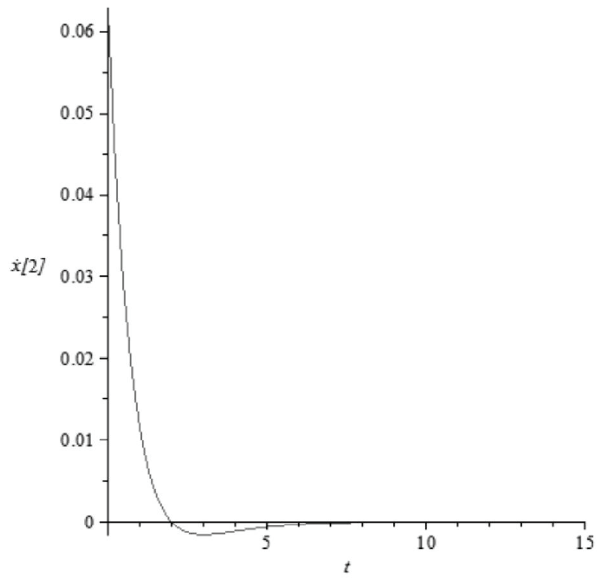

Рис. 6 . График $\dot{x}_2(t)$

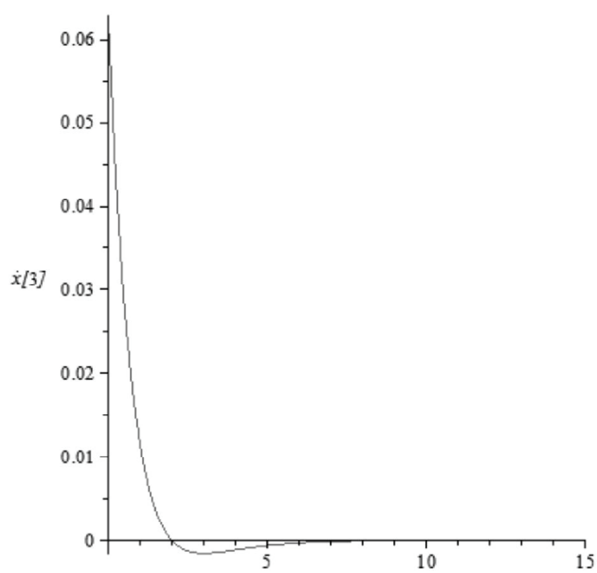

Рис. 7. График $\dot{x}_3(t)$

понент. Построим более простое стабилизирующее управление. Предположим, что в матрице B все элементы равны нулю, кроме элементов b_{i1}, $(i=1,\dots,6)$, стоящих в первом столбце. Подберем их таким образом, чтобы характеристическое уравнение $\det(A+B-\lambda E)=0$ системы (3) совпадало с уравнением $(\lambda+1)^6=0$. Методом неопределенных коэффициентов получим:

$b_{11}=-6$,

$$b_{21}=-2(-10a_{43}a_{52}+10a_{53}a_{42}-3a_{43}a_{52}^2+3a_{52}a_{53}a_{42}- \\ -3a_{43}-3a_{43}a_{53}a_{62}+3a_{63}a_{53}a_{42})/(-a_{42}a_{43}a_{52}+ \\ +a_{53}a_{42}^2-a_{43}^2a_{62}+a_{63}a_{42}a_{43}),$$

$$b_{31}=-2(3a_{42}+3a_{42}a_{53}a_{62}+a_{63}^2a_{42}-3a_{43}a_{62}a_{63}- \\ -10a_{43}a_{62}-3a_{43}a_{62}a_{52}+10a_{63}a_{42})/(-a_{42}a_{43}a_{52}+ \\ +a_{53}a_{42}^2-a_{43}^2a_{62}+a_{64}a_{42}a_{43}),$$

$$b_{41}=-15-a_{52}-a_{41}-a_{63},$$

$$b_{51}=(15a_{43}a_{52}-15a_{53}a_{42}+a_{43}+a_{52}^3a_{43}-a_{52}^2a_{52}a_{42}- \\ -a_{51}a_{42}^2a_{53}-15a_{63}a_{53}a_{42}-a_{63}^2a_{53}a_{42}-a_{53}^2a_{62}a_{42}+ \\ +15a_{43}a_{52}^2-15a_{52}a_{53}a_{42}+a_{51}a_{42}a_{43}a_{52}+a_{51}a_{43}^2a_{62}- \\ -a_{51}a_{42}a_{63}a_{43}+15a_{43}a_{53}a_{62}-a_{63}a_{52}a_{53}a_{42}+ \\ +a_{43}a_{53}a_{62}a_{63}+2a_{43}a_{53}a_{62}a_{52})/(a_{53}a_{42}^2-a_{42}a_{43}a_{52}- \\ -a_{43}^2a_{62}+a_{63}a_{42}a_{43}),$$

$$b_{61}=(15a_{43}a_{62}-15a_{63}a_{42}-15a_{42}a_{52}a_{62}+15a_{43}a_{62}a_{52}+ \\ +15a_{43}a_{62}a_{63}-a_{53}a_{61}a_{42}^2+a_{43}a_{62}a_{63}a_{52}+a_{43}^2a_{62}a_{61}- \\ -a_{42}+a_{43}a_{62}a_{63}^2+a_{43}a_{62}^2a_{53}+a_{43}a_{62}a_{52}^2-2a_{42}a_{53}a_{62}a_{63}- \\ -15a_{63}^2a_{42}-a_{63}^3a_{42}-a_{42}a_{53}a_{62}a_{51}-a_{63}a_{42}a_{43}a_{61}+ \\ a_{42}a_{43}a_{52}a_{61})/(a_{53}a_{42}^2-a_{42}a_{43}a_{52}-a_{43}^2a_{62}+a_{63}a_{42}a_{43}).$$

Это управление является проще управления (4). Нетрудно убедиться, что критерий полной управляемости [1] для системы (3) выполнен – ранг соответствующей матрицы управляемости равен размерности пространства, то есть 6. И, так как все корни характеристического уравнения имеют отрицательные значения, то согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости по линейному приближению [1], нелинейная система уравнений возмущенного движения с добавленным в нее управлением $u=Bx$ будет иметь асимптотически устойчивое тривиальное решение $x=0$, соответствующее выбранному программному движению трехзвенника.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе решена задача об управлении движениями панелей солнечных батарей космического аппарата на круговой орбите, моделируемых плоским трехзвенником, шарнирно прикрепленным к корпусу аппарата. Определены управления, реализующие и стабилизирующие заданные программные движения трехзвенника, обеспечивающие постоянную ориентацию панелей батарей относительно неподвижной системы координат. Предложены два варианта активного стабилизирующего управления, осуществляемого по принципу обратной связи, и проведено их сравнение. Графически проиллюстрирована асимптотическая сходимость полученных решений.

Результаты работы могут быть использованы при проектировании систем активного управления различными системами тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989. 447 с.
2. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 359с.
3. *Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г.. Фурасов В.Д.* Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971. 352 с.
4. *Зубов В.И.* Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Судостроение, 1980. 375 с.
5. *Bezglasnyi S.P.* The stabilization of program motions of controlled nonlinear mechanical system // Korean J. Comput. Appl. Math. 2004. V. 14, № 1-2. P. 251-266.
6. *Безгласный С.П., Худякова М.А.* Стабилизация программных движений уравновешенного гиростата // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьтерные науки. 2010. Вып 4. С. 31-38.
7. *Безгласный С.П., Мысина О.А.* О реализации одноосной и трехосной ориентации системы двух тел // Вестник Самарского государственного университета. 2011. № 83. С. 80-90.
8. *Андреев А.С.* Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 388–396.

ABOUT ORIENTATION'S CONTROL OF SHUTTERS OF SOLAR BATTERIES OF SPACECRAFT

© 2013 S.P. Bezglasnyi, A.E. Startsev

Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolyov
(National Research University)

In this paper consider the problem of the control of the motions of solar panels of spacecraft in a circular orbit. It is modeled by mechanical system with three degrees of freedom. Two types of active control on the principle of feedback, which realize asymptotically stable of given non-stationary program motions of batteries, are constructed. The solution of the problem is given on the basis of the first method of the classical stability theory.

Key words: program motion, Lyapunov's function, direct method, stabilization of motion, asymptotic stability.

Sergey Bezglasnyi, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Doctoral Candidate.
E-mail: bezglasnsp@rambler.ru
Aleksey Startsev, student. E-mail: alexsei91@rambler.ru