УДК 539.3

ИЗБИРАТЕЛЬНОЕ ПОВЫШЕНИЕ ЖЁСТКОСТИ – ПУТЬ К ЭФФЕКТИВНЫМ КОНСТРУКЦИЯМ

© 2013 А.И. Данилин

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П.Королёва
(Национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 02.12.2013

В требованиях статической аэроупругости требования жёсткости обычно представлены в виде ограничения деформаций кручения поточных сечений крыла, поскольку величина закручивания определяет угол атаки сечения, а значит и аэродинамическую силу. При этом изгибные деформации не играют никакой роли, - это обстоятельство открывает новые возможности для оптимизации конструкции стреловидных и треугольных крыльев. Так, для примера, ослабление задней кромки треугольного крыла в направлении вдоль размаха приводит к большим вертикальным перемещениям изгиба и, значит, к уменьшению закручивания поточных сечений крыла. Разумеется, ослабление следует проводить не в ущерб прочности конструкции. Мы предлагаем метод оптимизации, который имеет избирательность и видам ограничиваемых деформаций и надёжно определяет не только зоны, куда нужно добавить материал для уменьшения ограничиваемых деформаций, но и зоны, которые можно ослабить для увеличения “полезных” деформаций, также работающих на уменьшение “вредных” деформаций.
Ключевые слова: критерий оптимальности, тонкостенные конструкции.

Рассмотрим задачу об отыскании конструкции минимального объёма, которая в единственном случае нагружения имеет заданное обобщённое перемещение. Решение будем проводить пока без учёта условий прочности.

В направлении ограничиваемого перемещения приложим единичную обобщённую силу и по формуле Максвелла-Мора вычислим перемещение, предполагая, что конструкция разбита на m конечных элементов, работающих в плоском напряжённом состоянии

$$\Delta=\sum_{i=1}^{m}\int_{S_i}\frac{[R_i^*]}{E_i\delta_i}dS_i,$$
$$[R_i^*]=[\bar{R}_{xi}(R_{xi}-\mu_i R_{yi})+\bar{R}_{yi}(R_{yi}-\mu_i R_{xi})+2(1+\mu_i)\bar{R}_{xyi}R_{xyi}] \qquad (1)$$

Здесь $\bar{R}_i=\bar{\sigma}_i\delta_i$ – поток усилий в i-ом элементе от единичной нагрузки; $R_i=\sigma_i\delta_i$ – поток усилий в i-ом элементе от расчётной нагрузки; δ_i – толщина элемента; S_i – площадь элемента в плане; E_i, μ_i – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала элемента.

Отметим одно важное обстоятельство. Здесь формула Максвелла-Мора используется не как классическое средство вычисления коэффициентов канонической системы уравнений для раскрытия статической неопределимости, а в своём чистом, изначальном смысле применительно к конструкциям любой степени статической неопределимости.

Единичная обобщённая сила и расчётная нагрузка - суть векторы правых частей в методе конечных элементов и поэтому внутренние усилия $\bar{R}_i$ и R_i в элементах определяются обычной процедурой метода конечных элементов. Если используются конечные элементы с постоянным полем напряжений, то формула (1) упрощается

$$\Delta=\sum_{i=1}^{m}\frac{[R_i^*]\,S_i}{E_i\,\delta_i}. \qquad (2)$$

Для тонкостенных конструкций объём материала запишется в виде:

$$V=\sum_{i=1}^{m}S_i\;\delta_i. \qquad (3)$$

Минимизируем этот объём при условии

$$\Delta=\Delta_o, \qquad (4)$$

где Δ_o – заданное значение обобщённого перемещения.

Величины слагаемых в (2) показывают вклад каждого элемента в создание ограничиваемого перемещения. Если величина $[R_i^*]$ большая, то перемещение во многом определяется деформациями i-го элемента и добавлением в него материала или переходом на более высокий модуль упругости можно существенно уменьшить суммарное перемещение. А если величина $[R_i^*]$ отрицательна? Поскольку единичная обобщённая сила приложена в направлении нежелательных деформаций, то отрицательное значение интеграла Мора, показывает, что в данном месте необходимо разрешить конструкции деформироваться как можно больше, то есть нужно уменьшить жёсткость элемента.

Данилин Александр Иванович, доктор технических наук, профессор кафедры эксплуатации авиационной техники. E-mail: alexdan@ssau.ru

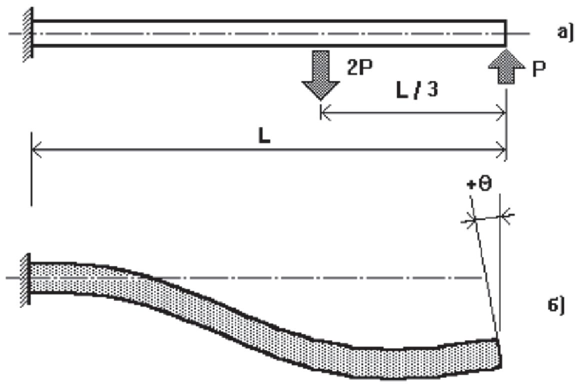

Рис. 1. Пример для иллюстрации способов достижения заданных деформаций

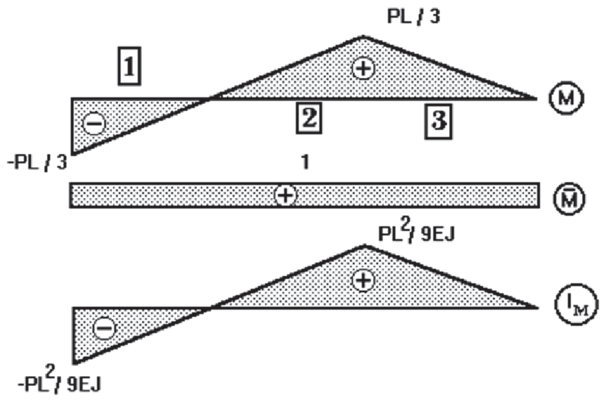

Рис. 2. Эпюры моментов и интегралов Мора

Для иллюстрации рассмотрим консольную балку, нагруженную двумя силами, как показано на рис.1а. Потребуем ограничить угол поворота концевого сечения, см. рис.1б.

Приложим на конце балки в направлении ($+\theta$) единичный изгибающий момент $\overline{M}=1$ и найдём распределение интегралов Мора, вычисляемых в данном случае как

$$I_M = \int_L \frac{\overline{M}M}{EJ} dz. \qquad (5)$$

Положим для простоты $EJ = const$ и тогда перемножением эпюр моментов расчётного и единичного случаев нагружения получим распределение интегралов Мора по длине балки, см. рис. 2.

Из анализа эпюр рис. 2 видно, что уменьшение изгибной жёсткости 2 и 3 участков вызовет увеличение угла θ, в то время как уменьшение жёсткости участка 1 приведёт к его уменьшению. Заданного значения угла поворота θ концевого сечения можно добиться либо усилением зоны 2-3, либо ослаблением зоны 1, либо этими действиями одновременно.

Вообще, ***отрицательные значения интегралов Мора всегда безошибочно укажут такие зоны конструкции, которые необходимо ослабить для достижения желаемых перемещений.*** Из (2) видно, что в этих местах нужно назначать толщины, минимально допустимые по прочности, конструктивным или технологическим соображениям, или каким-либо другим условиям. Поэтому ограничение (4) перепишем следующим образом. В выражении (2) соберём все отрицательные слагаемые. Вынося минус за знак суммы, получим

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{[R_i^*]\, S_i}{E_i\, \tilde{\delta}_i} - \sum_{i=n+1}^{m} \left| \frac{[R_i^*]\, S_i}{E_i\, \delta_i} \right|. \qquad (6)$$

Здесь: δ_i – принятые минимально допустимые толщины элементов с отрицательными значениями интегралов Мора; $\tilde{\delta}_i$ – толщины элементов, для которых интегралы Мора положительны; n – количество элементов, где интегралы Мора положительны.

Обозначим

$$\Delta^+ = \sum_{i=1}^{n} \frac{[R_i^*]\, S_i}{E_i\, \tilde{\delta}_i}, \qquad (7)$$

$$\Delta^- = \sum_{i=n+1}^{m} \left| \frac{[R_i^*]\, S_i}{E_i\, \delta_i} \right|. \qquad (8)$$

Тогда

$$\Delta = \Delta^+ - \Delta^-. \qquad (9)$$

и условие (4) будет иметь вид

$$\Delta^+ = \Delta_o + \Delta^-. \qquad (10)$$

Поскольку в зонах с отрицательными интегралами Мора приняты минимально допустимые толщины, то толщины этих элементов исключим из числа проектных переменных и найдём оптимальное распределение материала только в зонах с положительными интегралами Мора. Таким образом, имеем задачу условной оптимизации: минимизировать объем материала конструкции

$$\tilde{V} = \sum_{i=1}^{n} S_i\, \tilde{\delta}_i \Rightarrow min \qquad (11)$$

при условии (10).

Решение найдём методом множителей Лагранжа. Составим функцию

$$L = \sum_{i=1}^{n} S_i\, \tilde{\delta}_i + \lambda_1 (\Delta^+ - \Delta_o - \Delta^-), \qquad (12)$$

где λ_1 – множитель Лагранжа. Условия минимума функции имеют

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{\delta}_i} = 1 - \lambda_1 \frac{[R_i^*]}{E_i\, \tilde{\delta}_i^2} = 0,\ i = 1,2,...n; \qquad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \Delta^{+} - \Delta_o - \Delta^{-} = 0. \qquad (14)$$

Из уравнений (13) имеем

$$\tilde{\delta}_i = \sqrt{\lambda_1 \frac{[R_i^*]}{E_i}}. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в (14) найдём значение множителя Лагранжа

$$\lambda_1 = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^{n} S_i \sqrt{\frac{[R_i^*]}{E_i}} \right\}^2}{\left(\Delta_o + \Delta^{-}\right)^2}. \qquad (16)$$

Уравнение (15) с учётом (16) запишется в виде

$$\tilde{\delta}_i = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^{n} S_i \sqrt{\frac{[R_i^*]}{E_i}} \right\}}{\left(\Delta_o + \Delta^{-}\right)} \cdot \sqrt{\frac{[R_i^*]}{E_i}}, \quad i = 1,2,...n. \qquad (17)$$

Выражение (17) определяет закон распределения материала по элементам конструкции, обеспечивающий заданное значение обобщённого перемещения при усилиях $\overline{R}_i$ и R_i

При наличии зон с отрицательными интегралами Мора, то есть при $\Delta^{-} \neq 0$, мы имеем возможность получить проект с нулевым значением обобщённого перемещения: $Д_о = 0$. Другими словами, мы можем отыскать конструкцию, которая будет абсолютно жёсткой относительно ограничиваемого перемещения. Более того, возможно удовлетворение требования $\Delta_о < 0$, но при условии, что $|\Delta_0| < \Delta^{-}$, то есть можно добиться, чтобы конструкция деформировалась в сторону, противоположную своим реальным деформациям при первоначальном распределении материала. Если же участки с отрицательными интегралами Мора отсутствуют, то мы можем только уменьшить существующее обобщённое перемещение.

Выражение (13), определяющее условие минимума объёма материала конструкции при ограничении $\Delta_о = \Delta^{-}$ перепишем следующим образом:

$$\frac{[R_i^*]}{E_i \tilde{\delta}_i^2} = \frac{1}{\lambda_1}, \qquad (19)$$

или

$$\frac{[R_i^*]\, S_i}{E_i\, \tilde{\delta}_i\, \tilde{V}_i} = \frac{1}{\lambda_1} = const, \qquad i = 1,2,...n. \qquad (20)$$

Подставляя в (20) значение $[R_i^*]$ из (1) и учитывая, что $R_i = \tilde{\delta}_i \sigma_i$, получим

$$\frac{\tilde{\delta}_i S_i}{\tilde{V}_i}\left[\bar{\sigma}_{xi}\frac{\sigma_{xi}-\mu_i\sigma_{yi}}{E_i}+\bar{\sigma}_{yi}\frac{\sigma_{yi}-\mu_i\sigma_{xi}}{E_i}+\bar{\sigma}_{xyi}\frac{2(1+\mu_i)\sigma_{xyi}}{E_i}\right]=$$
$$=\left[\bar{\sigma}_{xi}\varepsilon_{xi}+\bar{\sigma}_{yi}\varepsilon_{yi}+\bar{\sigma}_{xyi}\varepsilon_{xyi}\right]=const,\ \ i=1,2,...n. \qquad (21)$$

Отсюда видно, что соотношение (13) определяет важное свойство построенного по (17) проекта, а именно: ***в оптимальной конструкции с заданным значением обобщённого перемещения, в зонах с положительными интегралами Мора удельная работа внутренних сил, возникающих от единичной нагрузки, на деформациях расчётного случая нагружения должна быть постоянна во всех элементах конструкции.*** *В зонах с отрицательными интегралами Мора следует разрешить конструкции деформироваться как можно больше, для чего надлежит использовать в этих местах низкомодульные материалы с большими допускаемыми деформациями.*

Требования статической аэроупругости, такие, например, как отсутствие дивергенции крыла, могут рассматриваться как ограничения на крутильные деформации. При использовании критериев оптимальности эти ограничения вводятся как неравенства и, в случае крыла, мерой жёсткости конструкции служат упругие перемещения некоторого количества выбранных, «характерных» или «типичных» сечений, расположенных по потоку. Деформации таких сечений и их аэродинамические характеристики для целей нашего исследования сводятся к анализу деформаций единственного характерного сечения. Обоснование применимости такого подхода и правило выбора характерного сечения для конкретного крыла выходит за рамки данной статьи и может быть найдено в работе [1].

В качестве примера рассмотрим проектирование конструкции крыла обратной стреловидности с ограничением на угол закручивания характерного сечения, расположенного на относительном расстоянии $\overline{z} = 0.81$ от корня крыла. За прототип примем крыло с формой в плане как у самолёта «Беркут С-47», но выполненного из изотропного (не композиционного) материала, см. рис. 3.

Приложенная нагрузка имеет передний центр давления и соответствует полёту с максимальной перегрузкой. В процессе оптимизации нагрузка не корректировалась в соответствии с упругими свойствами крыла. Нам было важно показать принципиальную возможность получения конструкции, не подверженную дивергенции, а не решать точно аэроупругую задачу. В качестве начального распределения материала по силовым элементам было принято распределение, обеспечивающее избыточную жёсткость.

Деформации крыла с начальным распределением материала показаны на рис. 4.

Результаты оптимизации показаны на рис. 5, 6, 7.

Видно, что задняя кромка перемещается больше передней, за счёт этого углы атаки (закручивания поточных сечений) уменьшаются и дивергенция полностью исключена.

Из сравнения рис. 6 и рис. 7 видно, что для обеспечения заданных деформаций в сторону уменьшения угла атаки необходимо усиливать конструкцию в передней части крыла (там, где интегралы Мора положительны) и ослаблять в задней части крыла. При этом увеличивается прогиб задней кромки, что уменьшает угол атаки.

Мы добились этого результата при использовании алюминиевых сплавов, обладающих высоким ресурсом и надёжностью.

Новый критерий оптимальности позволяет управлять деформациями конструкции на стадии проектирования и разрабатывать проекты, в которых распределение материала в одной её части управляет деформациями другой её части. Эффективность такого управления показывает распределение интегралов Мора.

Рассмотрим под этим углом конструкции живой природы. Крыло морской чайки, см. рис. 8, обладает как прямым участком, так и участками прямой и обратной стреловидности и, судя по тому, что птица не ломает крылья в полёте, не подвержено явлению дивергенции во всех полётных ситуациях.

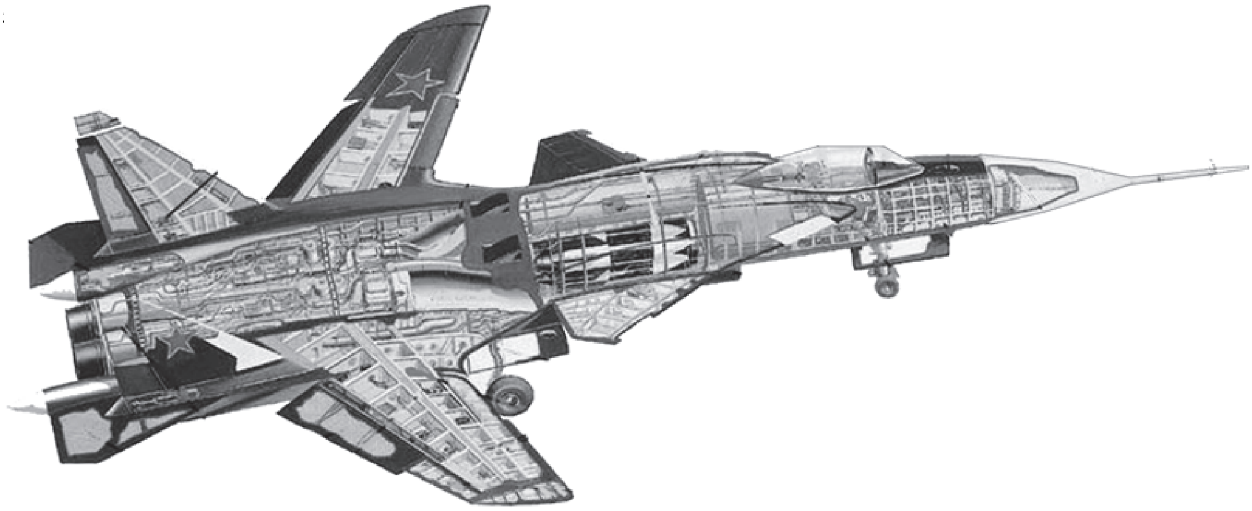

Рис. 3. Прототип крыла для оптимизации

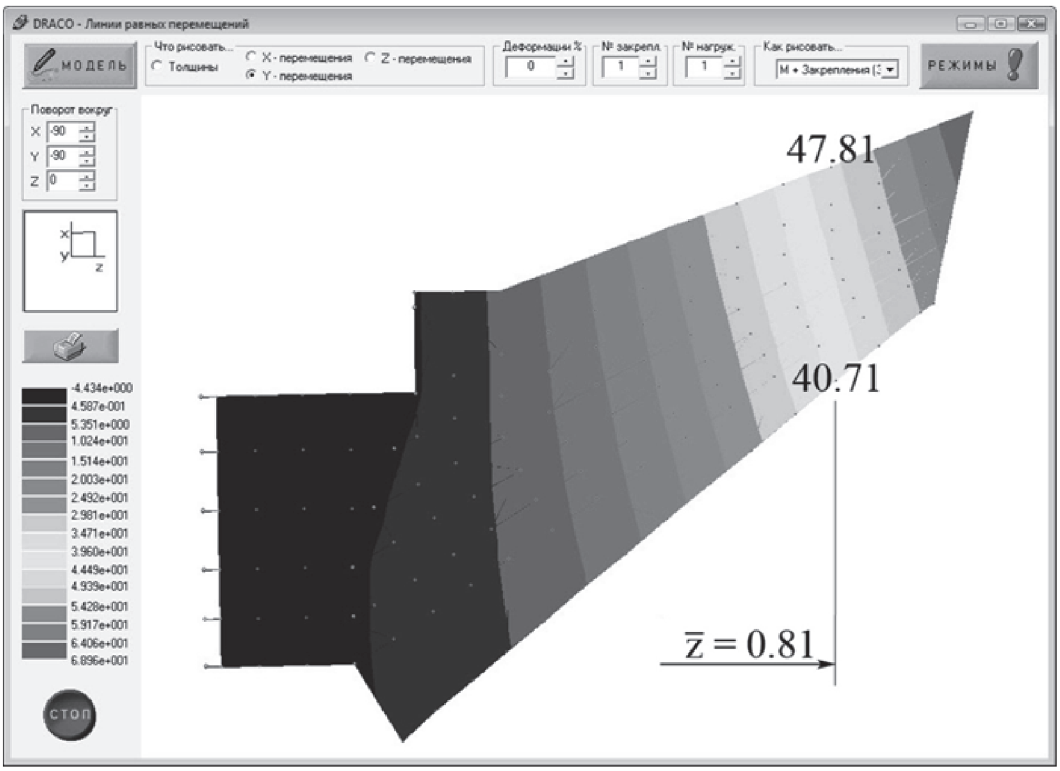

Рис. 4. Вертикальные перемещения сечений крыла до оптимизации

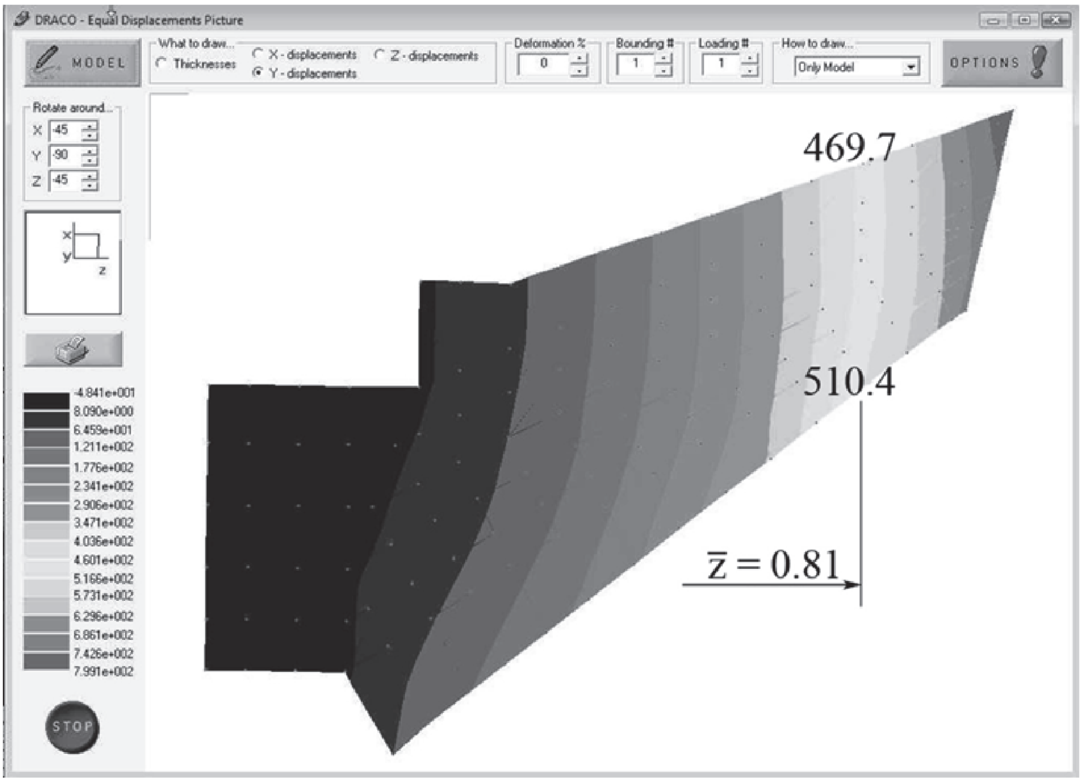

Рис. 5. Вертикальные перемещения сечений крыла после оптимизации.

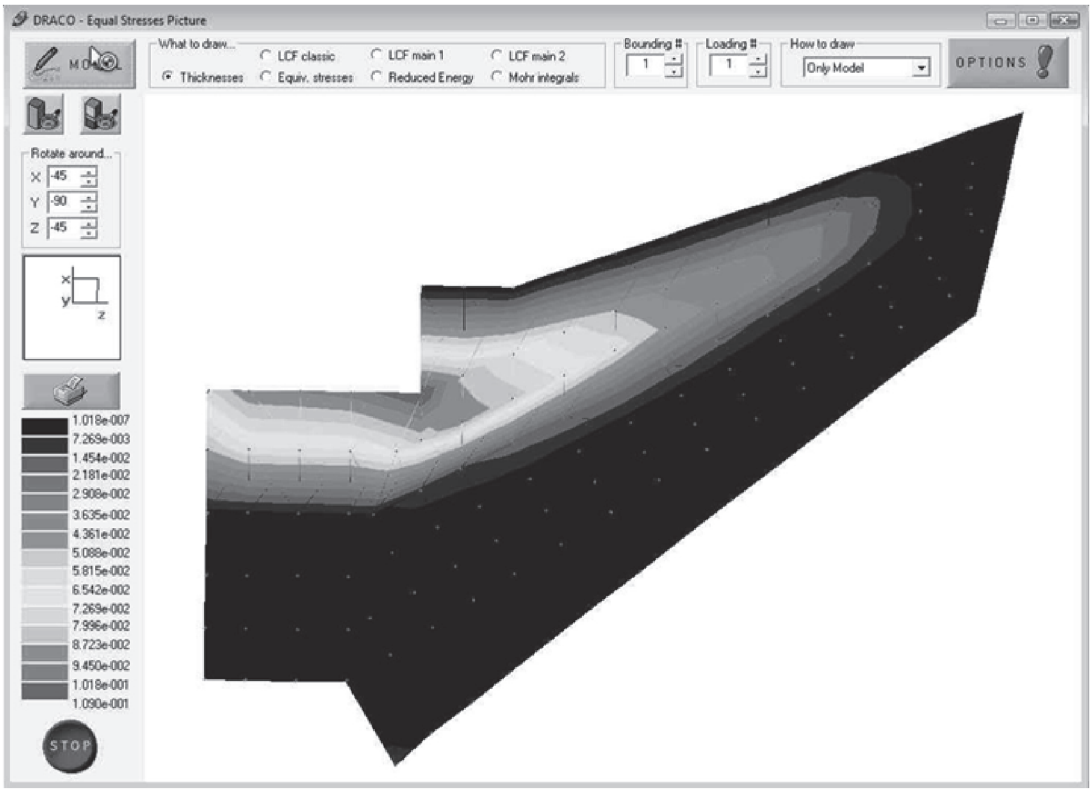

Рис. 6. Распределение толщины обшивки после оптимизации (тёмные участки – толщины минимальны)

Когда чайка парит, то крыло развёрнуто и приближается к форме прямого крыла с максимальным аэродинамическим качеством. Во время ловли рыбы чайка срывается в пикирование, значительно увеличивая скорость полёта. При этом она складывает крылья, придавая им стреловидную форму. Полёт во время пикирования полностью управляем по каналам тангажа, крена и рысканья, причём машущих движений, как правило, не происходит, и крылья остаются в стреловидном положении.

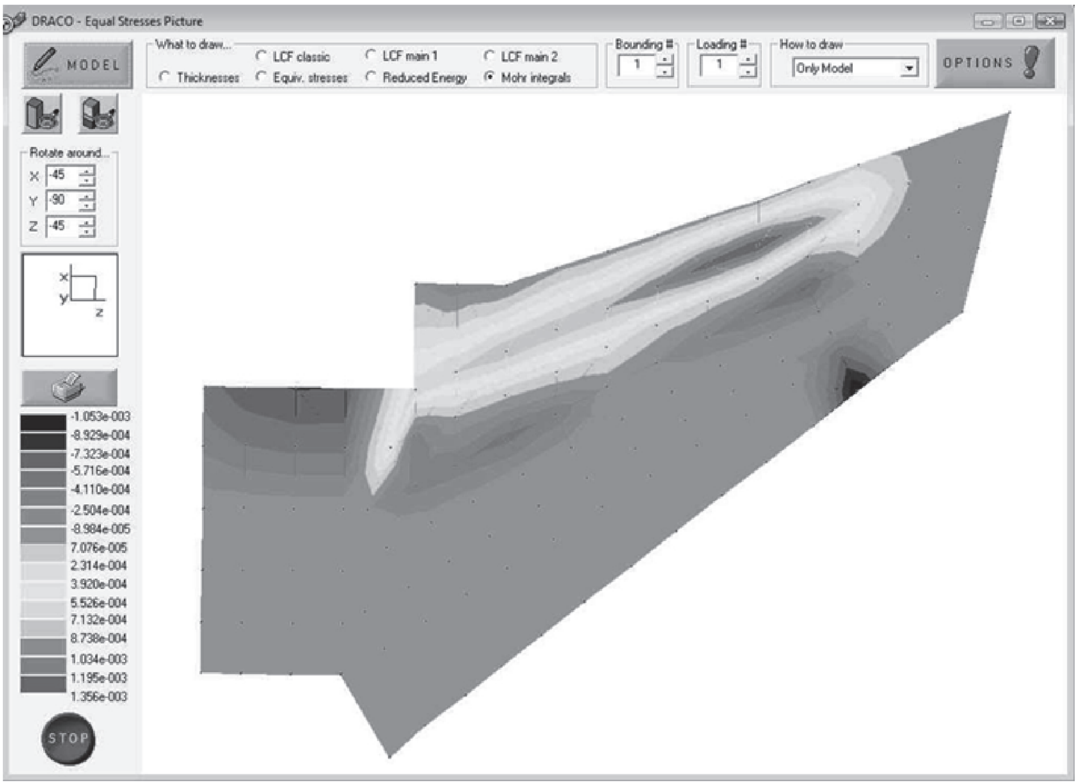

Рис. 7. Распределение интегралов Мора в обшивке после оптимизации (светлые участки – интегралы положительны)

Рис. 8. Крыло морской чайки

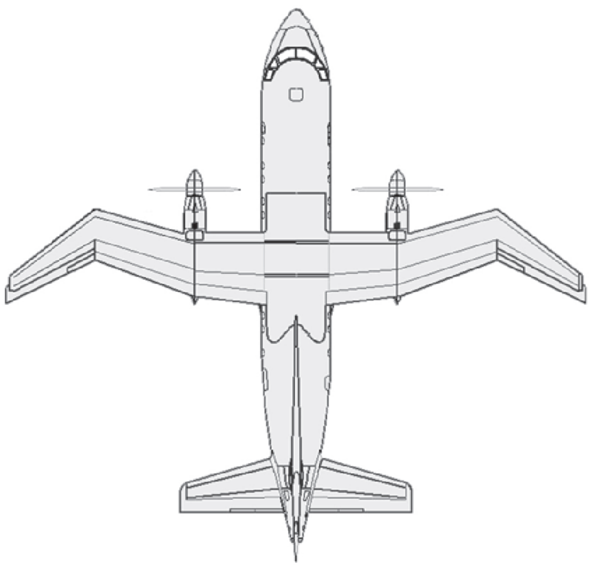

Рис. 9. Модификация крыла самолёта Ан-140

Природа поступила весьма мудро, соединив в одной конструкции прямую и обратную стреловидность. Изгиб консольной части крыла прямой стреловидности “нагружает” корневую часть обратной стреловидности крутильными деформациями в сторону уменьшения угла атаки. Поэтому часть крыла с обратной стреловидностью начинает работать уже имея запас отрицательного угла атаки, который уменьшается по абсолютной величине по мере приближения к “фюзеляжу”.

Проведём виртуальную модификацию самолёта Ан-140, как показано на рис. 9. Такая модификация позволит увеличить крейсерскую скорость за счёт снижения волнового сопротивления и сохранить высокие взлётно-посадочные характеристики за счёт прямого участка и участка обратной стреловидности крыла.

Такое крыло имеет деформации, показанные на рис. 10. Видно, что углы упругого закручивания сечений равны нулю (прогибы сечений по передней и задней кромке равны).

Для данной модификации крыла мы не выполняли оптимизацию распределения материала. Представленные на рис. 10 упругие деформа-

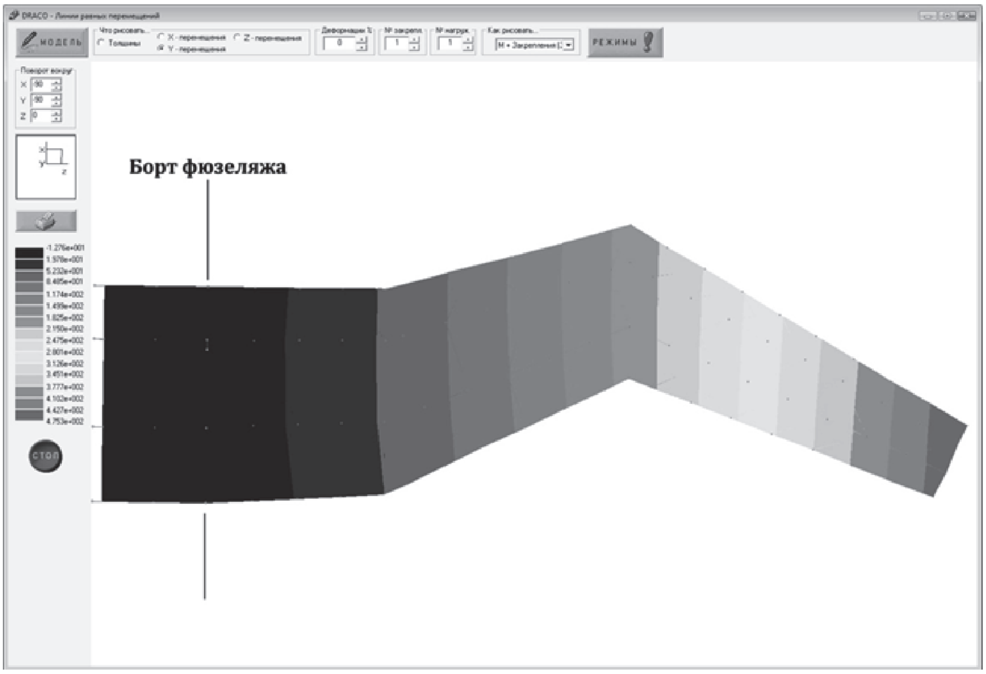

Рис. 10. Вертикальные прогибы точек крыла

ции соответствуют типичному распределению материала в кессонном крыле.

ВЫВОДЫ

Полученный новый критерий оптимальности позволяет проводить избирательное уменьшение деформаций не только за счёт добавления материала в элементы конструкции, но и за счёт снятия части материала с других элементов. Тем самым повышается эффективность получаемых проектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Danilin A.I., Weisshaar T.A.* The Use of Optimality Criteria for Aircraft Conceptual Level Structural Design. AIAA Paper 2000-1328, Structural Dynamics & Materials Conference, Atlanta, Georgia USA, April 3-6, 2000, 10 pp.

SELECTIVE STIFFNESS INCREASING IS THE PATH TO EFFECTIVE STRUCTURES

© 2013 A.I. Danilin

Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolyov
(National Research University)

In the requirements of static aeroelasticity the constrained deformations usually are the torsional deformations of along-stream wing sections, because the twist values determine angles of attack and consequently aerodynamic forces. Thus, the bending deformations have no matter; this circumstance opens new capabilities for optimization of structures swept and delta wings, for which one the bending and torsional deformations are interdependent. So, for example, loosening a trailing edge of a delta wing in a direction of span and allowing thereby large vertical displacement, it is possible to reduce the twisting of along-stream sections. Naturally weakening is necessary to implement not to the detriment of safety.
We suggest the method which have selectivity to kinds of deformations and reliably determine not only area of a structure, where it is necessary to add a material for reaching demanded stiffness, but also area where it is possible to weaken structure, for increasing of demanded (useful) deformations.
Key words: optimality criteria, thin-walled structures.

Aleksandr Danilin, Doctor of Technical Science, Professor of Technical Maintenance of Aircraft Engineering Department. E-mail: alexdan@ssau.ru