

РАСЧЕТ УПРАВЛЯЮЩИХ МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ ДЕМПФИРОВАНИЯ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ КУБИЧЕСКОГО МИКРОСПУТНИКА

© 2013 В.В. Любимов, С.В. Подклетнова

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 02.12.2013

Рассматриваются условия устойчивости и неустойчивости точки покоя при моделировании вращательного движения кубического микроспутника. Формулируется методика расчета магнитных моментов катушек, обеспечивающих асимптотическую устойчивость точки покоя. Приводятся результаты численного моделирования, соответствующие реализации условий асимптотической устойчивости и неустойчивости точки покоя.

Ключевые слова: устойчивость, алгоритм, микроспутник, угловая скорость, моделирование.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одними их наиболее востребованных в современных малых спутниках являются системы управления ориентацией, основанные на взаимодействии собственного магнитного поля спутника с геомагнитным полем [1]-[3]. Магнитные системы управления можно разделить на пассивные и активные системы управления. Пассивные магнитные системы управления не требуют для своего функционирования не только расхода рабочего тела, но также и электрических источников питания, так как исполнительными органами у таких систем являются постоянные магниты [4]-[6]. Пассивные магнитные системы уступают активным системам по точности и по времени достижения требуемых значений параметров ориентации. Активные магнитные системы управления используют для функционирования относительно компактные источники электропитания мощностью в несколько ватт. По указанным причинам пассивные и в особенности активные магнитные системы управления могут быть использованы для спутников со сроком эксплуатации, составляющим несколько лет. В качестве исполнительных органов активные магнитные системы управления часто применяют несколько электромагнитов, установленных параллельно осям инерции малых спутников.

Кроме магнитного момента на спутник также оказывают существенное влияние разнообразные силовые факторы. Наиболее существенные из них – это моменты от гравитации и от влия-

ния аэродинамических сил [7]. Кроме того, при решении задач ориентации спутников часто требуется учитывать, или по крайней мере оценивать, влияние других менее значительных по величине силовых факторов, например, моментов от вихревых токов и светового давления [7]-[9]. Однако, для кубических микроспутников с малыми габаритами и мощными электромагнитами на борту при движении на средних и высоких орбитах, можно считать, что основным восстанавливающим моментом является магнитный момент, а влияние других силовых факторов можно отнести к возмущениям.

Одним из важных этапов при решении задачи управления ориентацией спутников является этап управляемого уменьшения угловой скорости, полученной при отделении от базового космического аппарата. Существует несколько известных подходов к расчету магнитных моментов, обеспечивающих решение этой задачи, изложенных, например, в следующих работах: [1], [2].

В данной работе приводится методика расчета магнитных моментов, лишенная недостатка, присущего известной методике расчета [1]. В частности, ряд алгоритмов управления не обеспечивают торможения вращения микроспутника в точках орбиты, когда векторы L и H являются коллинеарными. Разработанная методика расчета свободна от данного недостатка и может применяться для торможения вращательного движения малых спутников, близких по форме к кубу.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается вращательное движение кубического микроспутника с тремя магнитными катушками на борту, совершающего полет по круговой околоземной орбите. Главные цент-

Любимов Владислав Васильевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики. E-mail: vlubimov@mail.ru
Подклетнова Светлана Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент.
E-mail: matema@narod.ru

ральные моменты инерции кубического микро-спутника в связанной системе координат $OXYZ$ равны между собой: $I_x = I_y = I_z = I$. В качестве основного механического момента, действующего на микроспутник, учитывается суммарный механический момент от взаимодействия магнитных моментов трех катушек с геомагнитным полем Земли. Действием механических моментов от других внешних сил и полей в данной задаче пренебрегается. В частности, равенство нулю гравитационного момента можно обосновать тем фактом, что при отсутствии асимметрии, составляющие гравитационного момента в связанных осях прямо пропорциональны разностям моментов инерции I_x, I_y, I_z [7], которые в данной постановке задачи равны I . Известно [7], что влияние аэродинамического момента следует учитывать для спутников с низкими орбитами. Будем считать высоту круговой орбиты микроспутника h средней, например, $h > 600$ км. В данном случае при сравнительно малых габаритных размерах микроспутника на рассматриваемых высотах орбиты возмущающим влиянием аэродинамического момента на этапе успокоения микроспутника можно пренебречь.

С учетом сделанных предположений автономные динамические уравнения Эйлера примут вид:

$$I \frac{d\omega_i}{dt} = M_{mi}, \quad (2.1)$$

где $\omega_i, i=x,y,z$ – составляющие вектора угловой скорости ω ; $M_{mi}, i=x,y,z$ – составляющие вектора механического момента от действия магнитных катушек \mathbf{M} .

Механический момент \mathbf{M} рассчитывается следующим образом [7]:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ L_x & L_y & L_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

где $L_i, i=x,y,z$ – магнитные моменты катушек, расположенных по направлению соответствующих осей X, Y, Z ; $H_i, i=x,y,z$ – составляющие вектора напряженности геомагнитного поля.

Составляющие вектора напряженности могут быть рассчитаны одним из нескольких известных способов, описанных в следующих работах [1], [5], [7].

Пусть, например, расчет составляющих вектора напряженности \mathbf{H} производится способом, описанным в работе [5]. При получении данных выражений, предполагается, что напряженность геомагнитного поля описывается моделью прямого диполя. Проектируя вектор \mathbf{H} на оси системы координат $OXYZ$, получим:

$$\begin{aligned} H_x &= H \cos \theta, H_y = -H \sin \theta \cos \varphi, \\ H_z &= H \sin \theta \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $H = \frac{\mu_e}{r^3} (1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u)^{1/2}$ – модуль вектора напряженности, $\mu_e = 7,87 \cdot 10^{15} (Tc \cdot m^3)$ – магнитная постоянная Земли, i – наклонение орбиты, u – аргумент широты, r – расстояние от микроспутника до центра Земли, $r = R_e + h$; R_e – радиус Земли, θ – угол нутации, φ – угол прецессии.

Динамические уравнения (2.1) рассматриваются совместно с кинематическими уравнениями, позволяющими определить три угла Эйлера [5].

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОКОЯ

Кинетическая энергия вращательного движения микроспутника равна:

$$T = I_x \frac{\omega_x^2}{2} + I_y \frac{\omega_y^2}{2} + I_z \frac{\omega_z^2}{2}. \quad (3.1)$$

Выражение (3.1) можно считать функцией Ляпунова $V(V=T)$. Действительно, в точке покоя $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ выполняется условие $V=T=0$. В любых других точках кроме точки покоя выполняется условие: $V=T>0$. Будем также предполагать, что для функции $V=T(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ в начальный момент и в течение всего времени движения выполнено условие $T(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \leq R^2$, где R^2 – ограничение, накладываемое на функцию Ляпунова [10]. Кроме того, в области R^2 функция $T(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ является конечной, однозначной и непрерывной функцией по переменным $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Для данной функции справедливы условия теоремы Ляпунова об устойчивости точки покоя [10]. В частности, для любого заданного числа $\varepsilon > 0$, можно найти число $\delta(\varepsilon) > 0$, что при возмущенном движении изображающая движение системы точка не выйдет за

пределы эллипсоида $I_x \frac{\omega_x^2}{2} + I_y \frac{\omega_y^2}{2} + I_z \frac{\omega_z^2}{2} = \varepsilon^2$

(справедливо условие $\varepsilon^2 < R^2$), если начальные значения координат будут выбраны согласно ус-

ловию $I_x \frac{\omega_{x0}^2}{2} + I_y \frac{\omega_{y0}^2}{2} + I_z \frac{\omega_{z0}^2}{2} \leq \delta^2$.

С учетом отмеченного ранее, для всех моментов времени $t \geq 0$ при выполнении условий [11], накладываемых на ограниченную сверху производную $\|dT/dt\| < \infty$, имеющих следующий вид:

$$dV/dt = dT/dt < 0, \text{ вне точки покоя, } \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0, \quad (3.2)$$

$dV/dt = dT/dt = 0$, в точке покоя $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, функция Ляпунова $V = T(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ асимптотически стягивается в точку покоя $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ ($V = T(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \rightarrow 0$), а сама точка покоя является асимптотически устойчивой по Ляпунову в пределах области.

Практический интерес представляет одновременное уменьшение модулей трех составляющих вектора угловой скорости, переводящее значения $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ в точку покоя $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Математическое решение данной задачи будем рассматривать без применения второго метода Ляпунова, как решение следующей системы неравенств:

$$\frac{I_i}{2} \frac{d}{dt} (\omega_i^2) = I_i \omega_i \frac{d\omega_i}{dt} < 0 \quad (i=x,y,z). \quad (3.3)$$

Выполнение условий (3.3) происходит при одновременном выполнении следующих равенств:

$$d\omega_i/dt = -k_i \omega_i. \quad (i=x,y,z). \quad (3.4)$$

Здесь коэффициенты управления:

$$k_i = -M_{mi} / I\omega_i > 0. \quad (3.5)$$

Система уравнений (3.4) имеет решение:

$$\omega_i = \omega_{0i} \exp\left(-\int_{t_0}^t k_i dt\right). \quad (3.6)$$

Рассмотрим подробнее решение (3.6). Пусть коэффициенты управления k_i являются различными вещественными постоянными. Известно [10], что форма уравнений вида (3.4) была названа А.М. Ляпуновым канонической. Согласно двум теоремам Ляпунова об устойчивости в первом приближении [11] справедливых для системы уравнений получаем, что если в системе уравнений (3.4), ограниченные непрерывные вещественные постоянные одновременно положительны $k_i = C_i > 0$, то решение (3.6) описывает асимптотически устойчивую точку $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Если хотя бы одна из постоянных величин $k_i < 0$, то решение (3.6) описывает неустойчивую точку $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$.

В нашем случае величины $k_i(t)$ можно считать ограниченными (при ограничениях сверху, наложенных на величины магнитных моментов). Будем считать, что $k_i(t)$ непрерывно изменяются при росте времени движения.

Рассмотрим четыре характерных случая:
 1. $k_i = -M_{mi} / I\omega_i > 0$; 2. $k_i = -M_{mi} / I\omega_i < 0$;
 3. Часть коэффициентов $k_i = -M_{mi} / I\omega_i > 0$, а другие коэффициенты $k_i = -M_{mi} / I\omega_i < 0$;

4. $\int_{t_0}^t k_i dt = -\int_{t_0}^t \frac{M_{mi}}{I\omega_i} dt > 0$. Можно доказать следующие четыре утверждения.

Случай 1. Решение (3.6) при начальных условиях $\omega_i(t_0) = \omega_{0i}$ является асимптотически

устойчивым при выполнении условия (3.5): $k_i = -M_{mi} / I\omega_i > 0$.

Случай 2. Решение (3.6) при начальных условиях $\omega_i(t_0) = \omega_{0i}$ и при выполнении условий $k_i = -M_{mi} / I\omega_i < 0$ является неустойчивым по Ляпунову.

Случай 3. При начальных условиях $\omega_i(t_0) = \omega_{0i}$ и части коэффициентов $k_i = -M_{mi} / I\omega_i > 0$, и при остальных коэффициентах $k_i = -M_{mi} / I\omega_i < 0$ решение (3.6) является неустойчивым.

Случай 4. При выполнении условия

$$\int_{t_0}^t k_i dt = -\int_{t_0}^t \frac{M_{mi}}{I\omega_i} dt > 0 \quad \text{при } t \geq t_0 \quad \text{решение (3.6)}$$

является устойчивым по Ляпунову.

4. РАСЧЕТ МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ КУБИЧЕСКОГО МИКРОСПУТНИКА

С практической точки зрения среди рассмотренных случаев наибольший интерес представляет случай 1, при котором наблюдается асимптотически устойчивое стремление решений (3.6) к точке покоя $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$.

Остановимся подробнее на методике нахождения магнитных моментов в случае 1. С этой целью представим выражения $k_i = -M_{mi} / I\omega_i > 0$ в следующем виде:

$$\frac{L_z H_y - L_y H_z}{I\omega_x} > 0, \quad \frac{L_x H_z - L_z H_x}{I\omega_y} > 0, \quad \frac{L_y H_x - L_x H_y}{I\omega_z} > 0. \quad (4.1)$$

В системе (4.1) будем считать неизвестными магнитные моменты катушек $L_i, i=x,y,z$. Составляющие векторов напряженности $H_i, i=x,y,z$ и угловой скорости $\omega_i, i=x,y,z$ предполагаем известными в каждый момент времени, так как они определяются по показаниям приборов, установленных на микроспутнике.

Прежде чем искать решение системы неравенств (4.1) решим однородную систему уравнений:

$$\begin{aligned} L_z H_y - L_y H_z &= 0, \\ L_x H_z - L_z H_x &= 0, \\ L_y H_x - L_x H_y &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Представим систему уравнений (4.2) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & -H_z & H_y \\ H_z & 0 & -H_x \\ -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Система уравнений (4.3) имеет бесконечное множество решений, так как определитель матрицы системы (4.3) равен нулю. Действительно,

$$\begin{vmatrix} 0 & -H_z & H_y \\ H_z & 0 & -H_x \\ -H_y & H_x & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.4)$$

Для решения системы линейных уравнений (4.2) методом Гаусса приводим ее с помощью элементарных преобразований к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} L_y H_x - L_x H_y &= 0, \\ L_y \frac{H_x H_z}{H_y} - L_z H_x &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Система уравнений (4.5) является системой из двух уравнений с тремя неизвестными. Пусть один из неизвестных магнитных моментов является параметром, например, $L_z = L_{z0}$. Тогда из

уравнений (4.5) получаем: $L_y = \frac{H_y}{H_z} L_{z0}$,

$L_x = \frac{H_x}{H_z} L_{z0}$. Итак, общее решение системы (4.2) имеет вид:

$$L_{x0} = \frac{H_x}{H_z} L_{z0}, L_{y0} = \frac{H_y}{H_z} L_{z0}, L_{z0} = L_{z0}. \quad (4.6)$$

Вернемся к решению системы алгебраических неравенств (4.1). С этой целью рассмотрим прямоугольную декартову систему координат по осям которой будем откладывать величины магнитных моментов катушек $L_i, i=x,y,z$. Решение системы уравнений (4.3) в данном трехмерном пространстве будет определяться как пересечение трех плоскостей $L_z H_y - L_y H_z = 0, L_x H_z - L_z H_x = 0, L_y H_x - L_x H_y = 0$. Следовательно, геометрически решение системы уравнений (4.3) описывается прямой в трехмерном пространстве магнитных моментов $L_i, i=x,y,z$. Согласно решению (4.6) эта прямая проходит через начало координат – точку $L_x = L_y = L_z = 0$. Для нахождения геометрического решения системы неравенств (4.1) требуется задать знаки составляющих вектора угловой скорости $\omega_i, i=x,y,z$ и составляющих вектора геомагнитной напряженности $H_i, i=x,y,z$. Пусть справедливы условия: $\omega_x < 0, \omega_y > 0, \omega_z > 0, H_x > 0, H_y > 0, H_z > 0$. В результате система неравенств (4.1) приобретает вид:

$$\begin{aligned} L_z H_y - L_y H_z &< 0, \\ L_x H_z - L_z H_x &> 0, \\ L_y H_x - L_x H_y &> 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Рассмотрим подробнее, что представляет собой геометрически решение системы неравенств (4.7). Пусть $L_{z0} > 0$, тогда при выполнении условий $H_x > 0, H_y > 0, H_z > 0$ согласно (4.6) получаем, что, магнитные моменты $L_{x0} > 0, L_{y0} > 0$. Решение системы уравнений (4.2) будем рассматривать в первом октанте (при $L_x > 0, L_y > 0, L_z > 0$). На рис.1 показывается, что три плоскости $L_z H_y - L_y H_z = 0, L_x H_z - L_z H_x = 0, L_y H_x - L_x H_y = 0$ разбивают первый октант на шесть тетраэдров. Каждый из шести тетраэдров содержит внутри решения системы неравенств (4.1) в пределах первого октанта. Каждому из шести тетраэдров соответствует определенное сочетание знаков выражений $\omega_i, i=x,y,z$ и $H_i, i=x,y,z$. В частности, решения системы неравенств (4.7) в пределах первого октанта содержатся внутри тетраэдра, выделенного на рис. 1 жирным шрифтом. Две из четырех граней указанного тетраэдра (вертикальная и горизонтальная грани) показаны незаштрихованными. Области трехмерного пространства, расположенные за пределами рассматриваемого тетраэдра примыкающие к этим граням также содержат решения системы неравенств (4.7). Область пространства, примыкающая к вертикальной незаштрихованной грани содержит решения системы неравенств (4.7). Однако, величины магнитных моментов из этой области больше, соответствующих величин из области внутри тетраэдра, поэтому они не представляют практического значения, как приводящие к большим энергетическим затратам. Область пространства, примыкающая к горизонтальной грани при выполнении условия $L_z < 0$ можно рассматривать также, как решение системы (4.7), имеющую ценность с практической точки зрения.

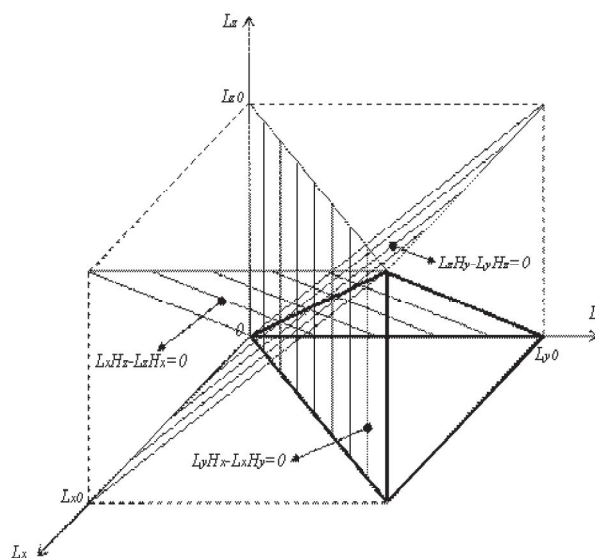


Рис. 1. Геометрическое представление решения системы неравенств (4.7)

В качестве решения системы неравенств (4.1) выберем, например, следующее решение, принадлежащее основанию тетраэдра на рис. 1:

$$L_{x1} = L_{x0}/2, L_{y1} = L_{y0}, L_{z1} = 0. \quad (4.8)$$

Решение (4.9) справедливо при выполнении условий

$$\begin{aligned} \omega_x < 0, \omega_y > 0, \omega_z > 0, \\ H_x > 0, H_y > 0, H_z > 0, L_{z0} > 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для проверки того, что выражения (4.8) являются решением системы неравенств (4.1) требуется учесть (4.8) в неравенствах (4.1). В результате при выполнении условий (4.9) получаем одновременное выполнение неравенств (4.1). Действительно,

$$\frac{L_{z1}H_y - L_{y1}H_z}{\omega_x} = \frac{-L_{z0}H_y}{\omega_x} > 0,$$

$$\frac{L_xH_z - L_zH_x}{\omega_y} = \frac{L_{z0}H_x}{2\omega_y} > 0,$$

$$\frac{L_yH_x - L_xH_y}{\omega_z} = \frac{L_{z0}H_xH_y}{2\omega_zH_z} > 0.$$

При решении задачи о торможении вращательного движения микроспутника можно также выбирать другие решения системы неравенств (4.1), принадлежащие выделенному на рис.1 тетраэдру.

Решение системы неравенств (4.1) представим в виде следующей последовательности вычислительных операций (методика расчета магнитных моментов):

1. Решить однородную систему уравнений (4.2) и определить ее решение, например, в виде

$$(4.7): L_{x0} = \frac{H_x}{H_z} L_{z0}, L_{y0} = \frac{H_y}{H_z} L_{z0}, L_{z0} = L_{z0}.$$

2. Исходя из заданных сочетаний знаков выражений $\omega_i, i=x,y,z$ и $H_i, i=x,y,z$ найти область (тетраэдр) в которой находятся решения системы неравенств (4.1).

3. Выбрать решение системы неравенств (4.1) принадлежащее рассматриваемому тетраэдру. Например, как это производится в рассмотренном случае (4.9), когда в качестве искомого решения выбирается точка (4.8), принадлежащая грани тетраэдра, лежащей в координатной плоскости ($L_{z1} = 0$).

В известном алгоритме управления [1] имеется один существенный недостаток: он не обеспечивает торможения вращения микроспутника в точках орбиты, когда вектора \mathbf{L} и \mathbf{H} коллинеарны, поскольку, при этом механический управляющий момент равен нулю $\mathbf{M} = \mathbf{L} \times \mathbf{H} = 0$. Представленная в данной работе методика расчета управляющих магнитных

моментов лишена отмеченного недостатка, так как искомые величины магнитных моментов (4.8) определяются таким образом, что они не совпадают с решениями системы уравнений (4.2), при которых выполняется равенство $\mathbf{M} = \mathbf{L} \times \mathbf{H} = 0$. Вторым достоинством данного вычислительной методики является возможность экономичного расходования электропитания на борту микроспутника, поскольку, в процессе управления одна из компонент $L_i, i=x,y,z$ может быть равна нулю.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Приводятся результаты численного моделирования, показывающие изменение составляющих угловой скорости микроспутника в окрестности точки покоя $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, соответствующие характерным случаям, описанным в разделе 3. При численном моделировании поведения решений (3.6) предполагается, что начальные значения угловых скоростей $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 5$ град/с.

На рис. 2 в фазовом трехмерном пространстве $\omega_x \omega_y \omega_z$ показана пространственная кривая, описывающая поведение решений (3.6) при выполнении условия (3.5) в случае 1.

Стрелкой на рис. 2 показывается направление перемещения в трехмерном пространстве от начальных значений угловых скоростей до конечной точки покоя $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, соответствующее случаю 1. В процессе численного моделирования поведения угловых скоростей в случае 1 предполагалось, что коэффициенты управления $k_i(t)$ имели колебательный характер и рассчитывались следующим образом:

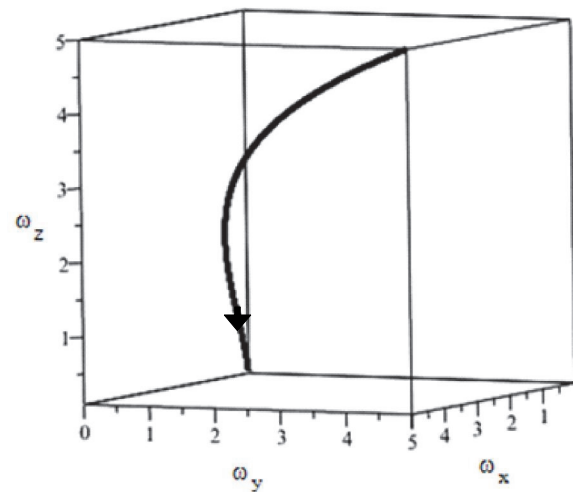


Рис. 2. Пространственная кривая, полученная из решения (3.6) в случае 1

$$k_x(t) = 3 \sin(t) + 0.1 \sin(2t),$$

$$k_y(t) = 6 \sin(t) + 0.3 \sin(2t),$$

$$k_z(t) = 2 \sin(t) + 0.05 \sin(2t).$$

Из рис. 2 следует, что в этом случае 1 точка покоя $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ является асимптотически устойчивой, что соответствует результатам, полученным в пункте 3.

Известно [12], что в плоском случае при одной из составляющих вектора угловой скорости микроспутника равной нулю в данной точке (при постоянных вещественных и положительных коэффициентах k_i) на фазовом портрете расположен устойчивый узел.

На рис.3 представлена пространственная кривая, демонстрирующая поведение решений (3.6) при условии, что коэффициенты $k_i(t)$ имеют различные знаки, что соответствует случаю 3. Стрелкой на рис.4 показывается направление перемещения в трехмерном пространстве, начинаемое от начальных значений угловых скоростей, стремящееся к точке покоя по переменным ω_x, ω_y и удаляющееся от точки покоя по переменной ω_z .

При численном моделировании величин угловых скоростей, соответствующих случаю 3 предполагалось, что коэффициенты управления $k_i(t)$ рассчитывались таким образом:

$$k_x(t) = 3 \sin(t) + 0.1 \sin(2t),$$

$$k_y(t) = 4 \sin(t) + 0.3 \sin(2t),$$

$$k_z(t) = -0.5 \sin(t) - 0.05 \sin(2t).$$

Результат численного моделирования, показанный на рис. 3 подтверждает доказанное в пункте 3 утверждение, что в случае 3 точка покоя $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ является неустойчивой.

В плоском случае, когда любая из составляющих вектора угловой скорости равна нулю, например, при $\omega_z = 0$ и при постоянных вещественных отличных от нуля коэффициентах управления различного знака $\text{sgn}(k_x k_y) = -1$, рассматриваемая точка покоя $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ является седлом [10].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение второго метода Ляпунова позволяет получить условия асимптотической устойчивости точки покоя в задаче об управляемом торможении вращательного движения магнитного кубического микроспутника. В результате анализа условий устойчивости определены возможные сочетания знаков коэффициентов управления $k_i(t)$, приводящие к устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпуно-

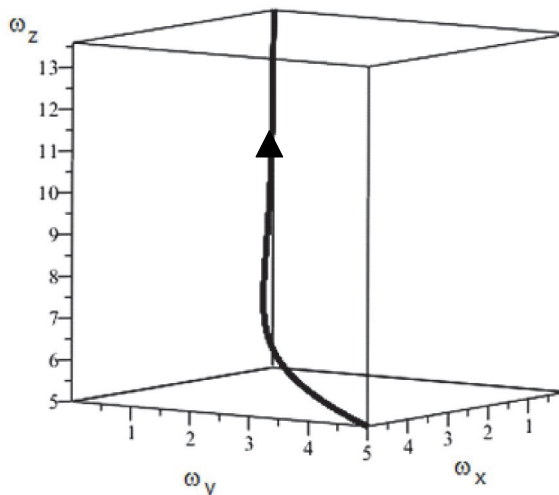


Рис. 3. Пространственная кривая, полученная из решения (3.6) в случае 3

ву точки покоя $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. При этом, коэффициенты управления $k_i(t)$ являются ограниченными знакопостоянными функциями времени движения. Следует отметить, при смене знаков коэффициентов управления, будут наблюдаться бифуркации точки покоя $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. В частности, если коэффициент $k_z(t)$ сменит свой знак с постоянного положительного на постоянный отрицательный, а два других коэффициента сохранят свои положительные знаки, то точка покоя $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ из асимптотически устойчивой точки (случай 1) станет неустойчивой по Ляпунову точкой (случай 3). Более подробное изучение бифуркаций точки покоя в данной задаче требует более подробного исследования и выходит за рамки рассматриваемой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1975. 248 с.
2. Динамика космических аппаратов с магнитными системами управления / А.П. Алтатов, В.И. Драновский, Ю.Д. Салтыков, В.С. Хорошилов. М.: Машиностроение, 1978. 200 с.
3. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли // Итоги науки и техники. Серия: «Исследование космического пространства». М.: ВИНТИ, 1985. Т.23. 106 с.
4. Овчинников М.Ю. Переходные движения спутника с магнитной системой ориентации в рамках простой модели гистерезиса // Космические исследования. 1986. Т. 12, №3. С.78-84.
5. Любимов В.В. Внешняя устойчивость резонансов при движении асимметричного твердого тела с сильным магнитом в геомагнитном поле // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. №1. С. 13-27.
6. Любимов В.В. Об особенностях в возмущенном вращательном движении спутника с сильным магни-

- том на борту // Известия вузов. Авиационная техника. 2009. №2. С.29-31.
7. *Белецкий В.В., Хентов А.А.* Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985. 288 с.
 8. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М: Наука, 1965, 416с.
 9. *Драновский В.И., Яншин А.М.* Влияние диссипативных моментов от вихревых токов на ориентацию спутника, стабилизированного вращением // Космические исследования. 1975. Т.13. №4. С.487-493.
 10. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. М: Наука, 1968. 559 с.
 11. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М: Наука, 1990. 176 с.

THE CALCULATION OF CONTROL OF THE MAGNETIC MOMENTS IN THE PROBLEM OF DAMPING OF ANGULAR VELOCITIES OF THE CUBIC MICROSATELLITE

© 2013 V.V. Lyubimov, S.V. Podkletnova

Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolyov
(National Research University)

Stability conditions and instability conditions of a point of rest are considered when modeling a rotary motion of the cubic microsatellite. Formulate the method of calculation of the magnetic moments of coils, providing the asymptotic stability of the point of rest. The results of numerical modeling corresponding to realization of a conditions of asymptotic stability and instability of a point of rest are given.

Key words: stability, algorithm, microsatellite, angular velocity, simulation.

Vladislav Lyubimov, Doctor of Technics, Professor, Head at the High Mathematics Department.

E-mail: vlyubimov@mail.ru

Svetlana Podkletnova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor.

E-mail: matema@narod.ru