УДК 539.3

РАСЧЁТ В ЗОНЕ РАССЛОЕНИЯ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

О.С. Гоголева

Оренбургский государственный университет

Поступила в редакцию 09.09.2014

Рассматривается зона расслоения пластины, изготовленной из изотропного материала, под действием сжимающих сил. Решением дифференциального уравнения прогиба срединной поверхности свободно опёртой пластины принимается двойной тригонометрический ряд. Определяются условия нераспространения расслоения по касательным напряжениям и по удельной потенциальной энергии.

Ключевые слова: *расслоение, дифференциальное уравнение, прогиба, пластина, аппроксимирующая функция, потенциальная энергия*

В современной авиационной технике широко применяются различные материалы, имеющие достаточно большую прочность при минимальном весе, в том числе композиционные материалы. При изготовлении деталей из подобных материалов могут появляться дефекты в виде расслоений непроклеев и т.д. Для начала рассмотрим зону расслоения поверхности, у которой $\rho_1=\infty$ и $\rho_2=\infty$, т.е. пластины, изготовленной из изотропного материала, под действием сжимающих сил N_x и N_y, как один из наиболее простых вариантов. N_x и N_y распределяем пропорционально жесткостям на изгиб, т.к. рассматриваем криволинейную форму устойчивости. Действительная расчётная амплитуда в центре зоны расслоения:

$$A^{\partial} = \frac{\sqrt{ul}}{\pi m},$$

где $m = \frac{2a}{2b}$ - число полуволн при криволинейной форме устойчивости, $2a$ и $2b$ – наибольший и наименьший размеры зоны расслоения в направлении осей x и y. Дифференциальное уравнение прогиба срединной поверхности свободно опёртой пластины имеет вид:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = -\left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

Решение данного уравнения будем искать в виде двойного тригонометрического ряда [1]:

$$w = \sum_{m=1,3,...}^{\infty} \sum_{n=1,3,...}^{\infty} A_{mn} \cos\frac{\pi m}{2a} x \cos\frac{\pi n}{2b} y \qquad (1)$$

Гоголева Ольга Сергеевна, старший преподаватель. E-mail: petr-niz@yandex.ru

Возьмём производные от аппроксимирующей функции и подставив их в дифференциальное уравнение прогиба, получим:

$$D\sum_{m=1,3,...}^{\infty} \sum_{n=1,3,...}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{\pi^4 m^4}{16a^4} + 2\frac{\pi^4 m^2 n^2}{16a^2 b^2} + \frac{\pi^4 n^4}{16b^4}\right) = -N_x \sum_{m=1,3,...}^{\infty} \sum_{n=1,3,...}^{\infty} A_{mn}\left(-\frac{\pi^2 m^2}{4a^2} - \alpha\frac{\pi^2 n^2}{4b^2}\right),$$

где $\alpha = \frac{N_y}{N_x}$, или:

$$D\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 = N_x\left(\frac{m^2}{a^2} + \alpha\frac{n^2}{b^2}\right).$$

Критическая сила:

$$N_{cr} = N_x = D\frac{\pi^2}{4}\frac{\left(m^2/a^2 + n^2/b^2\right)^2}{\left(m^2/a^2 + \alpha n^2/b^2\right)}.$$

Критические напряжения:

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{t}.$$

Из условия прочности по критике определим максимальный допустимый прогиб:

$$w_{cr} = \frac{\sqrt{2ua}}{\pi m},$$

где $u = 2a\frac{N_{cr}}{tE}$. Прогиб при расчётных нагрузках определяется по формуле:

$$w_{расч} = \sum_{m=1,3,...}^{\infty} \sum_{n=1,3,...}^{\infty} A_{mn} \cos\frac{\pi m}{2a} x \cos\frac{\pi n}{2b} y.$$

Ограничиваясь первыми четырьмя членами тригонометрического ряда, получим:

$$w_{расч} = A_{11}\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b} + A_{13}\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{3\pi y}{2b} + $$
$$+A_{31}\cos\frac{3\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b} + A_{33}\cos\frac{3\pi x}{2a}\cos\frac{3\pi y}{2b}.$$

В случае квадратной зоны расслоения:

$$w_{расч} = A^{\partial}\cdot\cos\frac{\pi}{2a}x\cos\frac{\pi}{2b}y.$$

Условие прочности запишется в виде:

$$N^{IV}_{экв} = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 - N_x N_y} \le N_{cr}$$

Условие жёсткости:

$$w_{расч} = w^{\partial} \le w_{cr}.$$

Для нераспространения расслоения необходимо выполнить два условия: а) по касательным напряжениям; б) по удельной потенциальной энергии.

а) Условие нераспространения расслоения:

$$\tau \le \tau_u,\quad \tau_u^{IV} = 0{,}63\sigma_u,\quad \tau = \frac{Q_{\Sigma}^{\max}\cdot S_*^{отс}}{I\cdot b},$$

где $Q_{\Sigma}^{\max}$ - суммарная перерезывающая сила обоих слоёв (при $x=a$, $y=0$), $S_*^{отс}$ - статический момент отсечённой части единичной ширины сечения относительно центральной оси обоих слоёв (погонный статический момент), I – погонный момент инерции обоих слоёв относительно центральной оси, $b=1$ – единичная ширина сечения.

$$Q_z = -D\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty}\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_{mn}\frac{\partial^3 w_n}{\partial x^3} = -D\cdot A^{\partial}\cdot\frac{\pi^3 m^3}{8a^3}\sin\frac{\pi m}{2a}x\cdot\cos\frac{\pi n}{2b}y$$

$$Q^{\max}_{z\left(\substack{x=a\\ y=0}\right)} = -D\frac{\sqrt{8a}}{\pi m}\frac{\pi^3 m^3}{8a^3},$$

где t_1 и t_2 – толщина слоёв в расслоённой зоне (рис. 1).

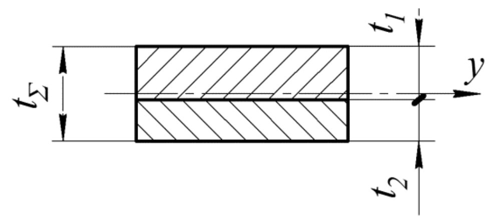

Рис. 1. Толщина слоев в расслоенной зоне

б) Условие нераспространения расслоения запишем в виде:

$$\begin{cases}\frac{1}{2E}\left(\sigma_x^{расч}\right)^2 + \frac{1}{2E}\left(\sigma_y^{расч}\right)^2 \ge \frac{D}{2V}\iint_S\left\{\left(\nabla^2 w\right)^2 - \right.\\ \left.-2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy\\ \frac{1}{E}\sigma_{cr}^2 \ge \frac{D}{2V}\iint_S\left\{\left(\nabla^2 w\right)^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy\end{cases} \qquad (2)$$

где S – площадь поверхности расслоённой зоны, V – объём расслоённой зоны.

Подсчитаем энергию для случая, когда прогибы задаются двойным тригонометрическим рядом по формуле (1). Подсчитаем потенциальную энергию расслоённой зоны с толщиной слоя t.

$$U=\frac{D}{2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\sum_{m=1,3,...}^{\infty}\sum_{n=1,3,...}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{\pi^2m^2}{4a^2}+\frac{\pi^2n^2}{4b^2}\right)\cos\frac{\pi m}{2a}x\cos\frac{\pi n}{2b}y\right]^2dxdy-D(1-\mu)\times$$

$$\times\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\sum_{m=1,3,...}^{\infty}\sum_{n=1,3,...}^{\infty}A_{mn}^2\frac{\pi^4m^2n^2}{4a^2b^2}\left(\cos^2\frac{\pi m}{2a}x\cdot\cos^2\frac{\pi n}{2b}y-\sin^2\frac{\pi m}{2a}x\cdot\sin^2\frac{\pi n}{2b}y\right)dxdy$$

Изменив последовательность интегрирования и суммирования, запишем:

$$U=\frac{D}{2}\sum_{m=1,3,...}^{\infty}\sum_{n=1,3,...}^{\infty}A_{mn}^2\left(\frac{\pi^2m^2}{4a^2}+\frac{\pi^2n^2}{4b^2}\right)^2\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\cos^2\frac{\pi m}{2a}x\cos^2\frac{\pi n}{2b}y\cdot dxdy-$$

$$-D(1-\mu)\sum_{m=1,3,...}^{\infty}\sum_{n=1,3,...}^{\infty}A_{mn}^2\frac{\pi^4m^2n^2}{4a^2b^2}\left(\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\cos^2\frac{\pi m}{2a}x\cdot\cos^2\frac{\pi n}{2b}y\cdot dxdy-\right.$$

$$\left.-\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\sin^2\frac{\pi m}{2a}x\cdot\sin^2\frac{\pi n}{2b}y\cdot dxdy\right)$$

Каждый из двойных интегралов равен *ab*, поэтому две последних стоки тождественно обращаются в ноль и энергия определяется формулой:

$$U=\frac{\pi^4ab}{32}D\sum_{m=1,3,...}^{\infty}\sum_{n=1,3,...}^{\infty}A_{mn}^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2$$

Удельная потенциальная энергия расслоённой зоны толщиной *t* определяется формулой:

$$u=\frac{U}{V}=\frac{\pi^4ab}{32\cdot 2a\cdot 2b\cdot t}D\sum_{m=1,3,...}^{\infty}\sum_{n=1,3,...}^{\infty}A_{mn}^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2$$

$$u=\frac{\pi^4D}{128\cdot t}\sum_{m=1,3,...}^{\infty}\sum_{n=1,3,...}^{\infty}A_{mn}^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2, \qquad (3)$$

A_{mn} примет вид: $A_{mn}=\frac{\sqrt{2ua}}{\pi m}$, где m – количество полуволн по оси *x*, $u=\frac{1}{Et}\left(N_x-\mu N_y\right)\cdot 2a$ - абсолютное перемещение.

Исходя из вышесказанного, с учётом (3), условие нераспространения расслоения (2) запишется в виде:

$$\begin{cases}\frac{1}{2E}\sigma_x^2+\frac{1}{2E}\sigma_y^2\ge u\\ \frac{1}{E}\sigma_{cr}^2\ge u\end{cases}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Уманский, А.А.* Строительная механика самолёта. – М.:Оборонгиз, 1961. 529 с.
2. *Вольмир, А.С.* Устойчивость упругих систем. – М.: Государственное изд-во физ.мат. литературы, 1963. 880 с.

CALCULATION IN STRATIFICATION ZONE OF ISOTROPIC PLATE

© 2014 O.S. Gogoleva

Orenburg State University

The stratification zone of the plate made from isotropic material, under the influence of compression forces is considered. A double trigonometrical series is accepted by the solution of differential equation of deflection the median surface of freely supported plate. Conditions of non-proliferation the stratification upon tangent tension and on specific potential energy are defined.

Key words: *stratification, differential equation, deflection, plate, approximating function, potential energy*

Olga Gogoleva, Senior Teacher. E-mail: petr-niz@yandex.ru