УДК 574

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ХАРАКТЕРИСТИК СОСТОЯНИЯ ЭКОСИСТЕМ ПО ПОКАЗАТЕЛЯМ НЕРЕАЛИЗОВАННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ

© 2014 П.Ф. Зибров

Тольяттинский государственный университет

Поступила в редакцию 13.01.2014

Рассматриваются прогнозирование динамических изменений состояния экосистем и вероятностный подход к оценке характеристик их состояния по показателям нереализованных возможностей.

Ключевые слова: экосистема, состояние, характеристики, вероятностный подход

Любая экосистема обусловлена множеством глобальных природных явлений и воздействиями на нее, носящими локальный характер [1-8]. Прогнозирование динамических изменений состояния наиболее эффективно при использовании вероятностных математических моделей и статистических методик [9-11]. Локальные возмущения, оказывающие существенные воздействия на региональном уровне оцениваются как дискретными, так и непрерывными параметрами, имеющими статистическую природу. Они определяются традиционно и характеризуются математическим ожиданием, дисперсией, среднеквадратичным отклонением и взаимной корреляцией. При этом статистическое математическое ожидание характеризует средневзвешенное состояние объекта, а дисперсия – рассеивание или разброс отклонений количественных значений параметров от математического ожидания, корреляционные моменты устанавливают оценку взаимного влияния статистических показателей. В предлагаемом исследовании рассматривается математическое моделирование на основе второго вариационного момента, вычисляемого относительно нормативных значений контролируемых параметров, то есть оценивается состояние объекта относительно требуемого оптимума. Подобный подход приводит к количественным характеристикам отклонения экосистемы от заранее обусловленного и принятого за эталонное.

Здесь под процедурой измерения понимается сбор информации о наличии или отсутствии какого-либо характерного признака, а также его сравнение с имеющимся эталоном на основе выбранных критериев. Развитие теории и практики оценки экопроцессов на основе количественных показателей идет в основном по двум направлениям: 1) математическое моделирование природных объектов и явлений на основе существующих, известных математических образов и отношений между ними, не противоречащих результатам опыта; 2) познание и описание математических закономерностей на основе количественно-прогностических отношений. Первое влияет на эффективность хозяйственной и экономической деятельности, второе – позволяет совершенствовать и оптимизировать принципы переработки информации о количественных оценках состояния явлений и процессов.

Успешность решения подавляющего большинства природоохранных задач зависит от наилучшего, наивыгоднейшего способа использования ресурсов и их воздействий на экосистему. Хозяйственная деятельность и природные явления обуславливают распределение и взаимную увязку имеющихся ресурсов, представляющих сырье, оборудование, деньги, рабочую силу, электроэнергию, топливо, материалы и другие факторы воздействия. Оптимальность их влияния определяется естественными ограничениями на потребление ресурсов. Таким образом, при математическом моделировании экологических процессов необходимо выполнить следующие действия:

- уяснить механизм оценки природоохранных технологий и состояния экосистем, сформулировать цель решения экологической задачи методами теории вероятностей и математической статистики;
- оценить экологическую ситуацию и определить составляющие достижения поставленной цели;
- выбрать приоритетные численные показатели для оценки экосистемы;
- построить вероятностно-статистическую математическую модель исследуемого процесса, устанавливающую функциональные зависимости между показателями и результатами;
- осуществить исследование анализируемого объекта с помощью математической модели соответствующим методом;
- проверить соответствие полученных результатов решения реально существующим экологическим показателям;

Зибров Пётр Фёдорович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой "Высшая математика". E-mail: Zibrov@tltsu.ru

- использовать полученную модель в планировании экологических мероприятий и прогностических расчетах.

Следовательно, для повышения эффективности управления природоохранными мероприятиями, на основе количественных оценок состояния экосистем, технических и инженерных объектов требуется адаптация математического инструментария к указанному классу задач, в которых оперируют системами непрерывных или дискретных случайных величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Числовыми характеристиками для указанной системы являются:

- n математических ожиданий $m_{x_1}, m_{x_2}, ..., m_{x_n}$;
- n дисперсий $D_{x_1}, D_{x_2}, ..., D_{x_n}$;
- $n \cdot (n-1)$ корреляционных моментов K_{ij}, где $i \neq j = 1, 2, ..., n$.

Корреляционные моменты характеризуют попарную корреляцию всех величин, входящих в систему и имеют вид:

$$K_{ij} = M\left[\overset{0}{X}_i \overset{0}{X}_j\right], \quad \overset{0}{X}_i = X_i - m_i \quad \overset{0}{X}_j = X_j - m_j. \quad (1)$$

Следует отметить, что дисперсия каждой из случайных величин X_i есть частный случай корреляционного момента X_i на саму себя, действительно:

$$D_i = K_{ij} = M\left[\overset{0}{X}{}_i^2\right] = M\left[\overset{0}{X}_i \overset{0}{X}_i\right]. \quad (2)$$

Все корреляционные моменты и дисперсии представляют в виде корреляционной матрицы.

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & ... & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & ... & K_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ K_{n1} & K_{n2} & ... & K_{nn} \end{pmatrix}, \text{ где } K_{ij} = K_{ji}. \quad (3)$$

Обычно вместо этой матрицы составляют нормированную матрицу из коэффициентов корреляции.

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & ... & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & ... & r_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ r_{n1} & r_{n2} & ... & r_{nn} \end{pmatrix}, \text{ где } r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \text{ причем}$$

$$r_{11} = r_{22} = ... = r_{nn} = 1. \quad (4)$$

Если система непрерывных случайных величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$ характеризует некоторую экосистему в n-мерном пространстве показателей, то она может быть описана нормальным законом распределения плотности вероятности, который задается соотношением:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\sqrt{|C|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(ij(x_i - m_{xi})(x_j - m_{xj})\right)}, \quad (5)$$

здесь $|C|$ – определитель матрицы C, $C = \|c_{ij}\|$ - матрица, обратная корреляционной матрице $K = \|K_{ij}\|$.

Элементы матрицы $c_{ij} = (-1)^{i+j} \dfrac{M_{ij}}{|K|}$, где $|K|$ – определитель корреляционной матрицы, а M_{ij} – миноры этого определителя, причем $|C| = \dfrac{1}{|K|}$.

Из выражения (5) в качестве примера можно получить закон нормального распределения плотности случайных величин при $n = 2$, то есть на плоскости для (X, Y).

Корреляционная матрица при этом принимает вид

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x \sigma_y r_{xy} \\ \sigma_x \sigma_y r_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Отсюда $|K| = \sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 - r_{xy}^2)$, $\quad |C| = \dfrac{1}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 - r_{xy}^2)}$.

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma_x^2 (1 - r_{xy}^2)} & \dfrac{-r_{xy}}{\sigma_x \sigma_y (1 - r_{xy}^2)} \\ \dfrac{-r_{xy}}{\sigma_x \sigma_y (1 - r_{xy}^2)} & \dfrac{1}{\sigma_y^2 (1 - r_{xy}^2)} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Подстановкой элементов определителя матрицы $|C|$ в (5), получают выражение для нормального закона на плоскости.

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1 - r_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}. \quad (8)$$

Из соотношения (8) следует, что нормальный закон на плоскости зависит от пяти параметров, имеющих следующий вероятностный смысл:

- m_x, m_y – математические ожидания;
- σ_x, σ_y – средние квадратичные отклонения;
- r_{xy} – коэффициент корреляции величин X и Y.

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (9)$$

Коэффициент корреляции обращается в ноль для независимых случайных величин. Если коэффициент r_{xy} не равен нулю, то случайные величины являются не коррелированными.

Если $r_{xy} \neq 0$, то случайные величины (X,Y) зависимы и условные законы распределения плотности вероятности принимают вид $f(y/x)$ и $f(x/y)$:

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}-r_{xy}\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2}, \quad (10)$$

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{1-r_{xy}^2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}-r_{xy}\frac{x-m_y}{\sigma_y}\right)^2}. \quad (11)$$

Это условные плотности вероятности нормального закона с центрами рассеивания

$$m_{y/x}=m_y+r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x), \quad (12)$$

$$m_{x/y}=m_x+r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y). \quad (13)$$

и средними квадратичными отклонениями

$$\sigma_{y/x}=\sigma_y\sqrt{(1-r_{xy}^2)}, \quad (14)$$

$$\sigma_{x/y}=\sigma_x\sqrt{(1-r_{xy}^2)}. \quad (15)$$

В работе [1] подробно изложен механизм вероятностной характеристики распределения дискретных величин для оценки результативности природоохранных мероприятий согласно различных технологий и состояния экосистем по показателям нереализованных возможностей на примере одномерного случая.

Когда имеет место система двух случайных величин, то первые начальные моменты являются математическими ожиданиями величин X и Y системы, то есть

$$m_x=\alpha_{10}=M\left[X^1Y^0\right]=M[X], \quad (16)$$

$$m_y=\alpha_{01}=M\left[X^0Y^1\right]=M[Y]. \quad (17)$$

Совокупность математических ожиданий m_x и m_y представляет характеристику положения системы. Геометрически это координаты точки на плоскости, вокруг которой рассеяны значения системы (X, Y). Два вторых центральных момента системы представляют дисперсии величин X и Y

$$\mu_{2,0}=M\left[\overset{0}{X}{}^2\overset{0}{Y}{}^0\right]=M\left[\overset{0}{X}{}^2\right]=D[X], \quad (18)$$

$$\mu_{0,2}=M\left[\overset{0}{X}{}^0\overset{0}{Y}{}^2\right]=M\left[\overset{0}{Y}{}^2\right]=D[Y]. \quad (19)$$

и характеризуют рассеивание случайных точек в направлении осей O_x, O_y.

Второй смешанный центральный момент имеет специальное обозначение

$$\mu_{11}=K_{xy}=M\left[\overset{0}{X}\overset{0}{Y}\right]=M\left[(X-m_x)\cdot(Y-m_y)\right]. \quad (20)$$

и представляет корреляцию между случайных величин X, Y.

Для дискретных и непрерывных случайных величин корреляционный момент выражают соответственно формулами

$$K_{xy}=\sum_i\sum_j(x_i-m_x)\cdot(y_j-m_y)\cdot p_{ij},$$

$$K_{xy}=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)\cdot(y-m_y)\cdot f(x,y)dxdy. \quad (21)$$

Он наряду с рассеиванием величин X и Y характеризует связь между ними и независимых случайных величин равен нулю, то есть $K_{xy}=0$.

Если $K_{xy}\neq 0$, то между случайными величинами есть вероятностная зависимость.

Для характеристики нереализованности оптимальных показателей состояния экосистемы используем величину d

$$\delta_k=(X_k-Z_k), \quad (22)$$

где X_k – случайная величина, Z_k – регламентированное значение для оптимального состояния системы, $k=1,2,\dots,n$.

В этом случае начальный момент первого порядка показателя δ_k принимает вид для дискретных и непрерывных случайных величин

$$\alpha_1(\delta_k)=\sum_{i=1}^{n}(x_{ik}-Z_k)p_{ik}; \quad (23)$$

$$\alpha_1(\delta_k)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-Z_k)f_k(x)dx. \quad (24)$$

Второй вариационный момент, характеризующий разброс значений статистических параметров относительно Z_k

$$\mu_2(\delta_k)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-Z_k)^2p_{ik}; \quad (25)$$

$$\mu_2(\delta_k)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-Z_k)^2f_k(x)dx. \quad (26)$$

Здесь p_{ik} – вероятность $P(X_k = x_{ik}) = p_{ik}$, $f_k(x)$ – распределение плотности вероятности случайной величины X_k.

Для системы двух случайных величин (X,Y) с показателями оптимальности (Z_x, Z_y) указанные характеристики принимают вид

$$\alpha_{10}(\delta_x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - Z_x)P_i,\ \alpha_{01}(\delta_y) = \sum_{j=1}^{n}(y_i - Z_y)P_j,$$

$$\alpha_{10}(\delta_x) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - Z_x)f_1(x)dx,\ \alpha_{20}(\delta_y) = \int_{-\infty}^{\infty}(y - Z_y)f_2(y)dy,$$

$$\mu_{20}(\delta_x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - Z_x)^2 P_{ij},\ \mu_{02}(\delta_y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - Z_y)^2 P_{ij},$$

$$\mu_{11}(\delta_{xy}) = K_{xy}(\delta_{xy}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - Z_x)(y_j - Z_y)P_{ij},$$

$$\mu_{11}(\delta_{xy}) = K_{xy}(\delta_{xy}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - Z_x)(y - Z_y)f(x,y)dxdy.$$

Здесь $P_{ij} = P(X = x_1, Y = y_j)$, $f(x,y)$ – функция распределения плотности вероятности системы непрерывных случайных величин.

В дальнейшем после перехода от системы двух случайных величин (X,Y) к системе (δ_x, δ_y), для которой справедлив нормальный закон распределения на плоскости, можно рассчитать вероятность оптимального функционирования системы в заданной области *D* изменения параметров (X,Y)

$$P((\delta_x,\delta_y) \subset D) = \iint_D f(\delta_x \delta_y) d\delta_x d\delta_y =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1 - r_2^2}} \iint_D e^{-\frac{1}{2(1-r_{12}^2)}\left[\frac{(\delta_x-\alpha_{10})^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r_{12}(\delta_x-\alpha_{10})(\delta_y-\alpha_{02})}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(\delta_y-\alpha_{02})^2 dxdy}{\sigma_2^2}\right]}, \tag{27}$$

где: $\sigma_1 = \sqrt{\mu_{20}}$; $\sigma_2 = \sqrt{\mu_{02}}$; $r_{12} = \dfrac{\mu_{11}}{\sigma_1\sigma_2}$.

Конечный количественный результат определяется заданной областью D, в которой изменяются составляющие системы (δ_x, δ_y).

Например, для прямоугольной области *D* со сторонами, параллельными координатным осям и нормальном законе распределения системы (δ_x, δ_y) вероятность

$$P((\delta_x,\delta_y) \subset D) = \left[\Phi\left(\frac{\delta_\beta - m_{\delta_x}}{\sigma_x(\delta_x)}\right) - \Phi\left(\frac{\delta_\alpha - m_{\delta_x}}{\sigma_x(\delta_x)}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\Phi\left(\frac{\delta_\gamma - m_{\delta_y}}{\sigma_y(\delta_y)}\right) - \Phi\left(\frac{\delta_\nu - m_{\delta_y}}{\sigma_y(\delta_y)}\right)\right], \tag{28}$$

где $\alpha \le \delta_x \le \beta$, $\gamma \le \delta_y \le \nu$.

Аналогично, вероятность попадания значений системы (δ_x, δ_y) в эллипс рассеивания B_t, отношение полуосей которого $t = \dfrac{\sigma_x(\delta_x)}{\sigma_y(\delta_y)}$, равна

$$P((\delta_x,\delta_y) \subset B_t) = 1 - e^{\frac{t^2}{2}}. \tag{29}$$

Если $t = 1$, когда эллипс рассеивания вырождается в круг и случайные величины δ_x, δ_y не коррелированны $P((\delta_x,\delta_y) \subset B_1) = 1 - e^{\frac{1}{2}} = 0{,}393$, при $t = 2$ $P((\delta_x,\delta_y) \subset B_2) = 0{,}865$..

Таким образом, соотношения (28) и (29) позволяют на практике получать вероятностные количественные характеристики оценки приближения исследуемой системы к оптимальному состоянию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев А.В.* Обеспечение экологической безопасности в условиях городского округа Тольятти: учебное пособие. Самара: Изд-во Самарского научного центра РАН, 2012. 201 с., ил.
2. *Васильев А.В.* Физические факторы среды обитания. Учебное пособие по курсу “Общая экология”. Тольятти, 2002. 60 с.
3. *Васильев А.В.* Терроризм как угроза экологической безопасности // Вестник Волжского университета им. В.Н. Татищева. 2002. № 2 (ecology). С. 190-193.
4. *Васильев А.В., Васильева Л.А.* К вопросу о системном обеспечении экологической безопасности в условиях современного города // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2003. Т. 5. № 2. С. 363-368.
5. *Васильев А.В., Васильева Л.А.* Основы кластерного подхода. Кластер вторичных ресурсов Самарской области // В сборнике: ELPIT-2013. Экология и безопасность жизнедеятельности промышленно-транспортных комплексов. Сборник трудов IV международного экологического конгресса (VI Международной научно-технической конференции. Научный редактор: А.В. Васильев. 2013. С. 34-40.
6. *Васильев А.В., Терещенко И.О., Терещенко Ю.П., Заболотских В.В.* Программное обеспечение для комплексной оценки экологического риска урбанизированных территорий // В сборнике: Стратегическое планирование развития городов России. Памяти первого ректора ТГУ С.Ф. Жилкина. Сборник материалов III Международной заочной научно-практической конференции. Ответственный редактор: Д.В. Антипов. 2013. С. 71-74.
7. *Зибров П.Ф.* Механизм вероятностной оценки природоохранных технологий и состояние экосистем по показателям нереализованных возможностей // Сб. трудов первого международного экологического конгресса “Экология и безопасность жизнедеятельности промышленно-транспортных комплексов” ELPIT, Тольятти, 2007.
8. *Зибров П.Ф., Васильев А.В., Чернов Н.С.* Физическое и математическое моделирование теплообменных

процессов в механических системах. Тольятти, 2013.
9. *Зибров П.Ф., Зиброва О.Г., Зибров А.П.* Моделирование объектов и процессов формирования систем управления промышленным предприятием // Материалы IX Международной научно-практической конференции “Татищевские чтения: актуальные проблемы науки и практики”, Тольятти, 2012.
10. *Зибров П.Ф., Зиброва О.Г.* Концепция формирования экономического образа мышления студентов ВУЗов. Тольятти: ТГУ, 2003. 138 с.
11. *Жилкин С.Ф., Зибров П.Ф., Дадашев Д.А.* Вероятностная оценка экономической эффективности конкурсных закупок // Экономика и производство. 2004. №2. С.24-28.

PROBABILITY APPROACH TO ESTIMATION OF CHARACTERISTIC OF STATE OF ECOSYSTEMS USING OF INDICATORS OF UNREALIZED POSSIBILITIES

Togliatti State University

In article forecasting of dynamic variations of state of ecosystems and probability approach to estimation of characteristic of its state using indicators of unrealized possibilities are considered.
Key words: ecosystem, state, characteristic, probability approach.

Petr Zibrov, Doctor of Technical Science, Professor, Head at the of Higher Mathematics Department. E-mail: Zibrov@tltsu.ru