

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МАГНИТНОЙ КОАГУЛЯЦИИ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ЧАСТИЦ В СЛАБОЗАГРЯЗНЕННЫХ СТОЧНЫХ ВОДАХ

© 2014 Е.М. Булыжев<sup>1</sup>, Е.Н. Меньшов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ЗАО «Системы водоочистки», г. Ульяновск

<sup>2</sup> Ульяновский государственный технический университет

Поступила 08.11.2013

Разработана математическая модель сближения феррочастиц в магнитном поле. Наличие отталкивающих сил между намагниченными частицами в поперечном направлении к магнитным линиям и несущественное время соединения пар частиц в продольном направлении к ним по сравнению с диффузионно-броуновским механизмом сближения приводит к отличию кинетики магнитной коагуляции от теории Смолуховского. Предложена математическая модель вероятности дисперсного распределения частиц (агрегатов), основанная на принципе объединения пар соседних частиц вдоль магнитных линий. Получено статистическое инвариантное уравнение для законов распределения дисперсности механической примеси при коагуляции.

**Ключевые слова:** магнитная коагуляция, кинетика сближения частиц, моделирование магнитных сил, время сближения, вероятность распределения частиц, инвариантное уравнение.

### ВВЕДЕНИЕ

Процесс коагуляции является одним из основных процессов, характеризующих эволюцию дисперсионных систем. Под коагуляцией понимается явление сближения и слипания частиц дисперсной фазы в дисперсной системе под влиянием любых внешних или внутренних сил.

Во внешнем магнитном поле имеет место магнитная коагуляция. Магнитная коагуляция отчетливо проявляется в распространенных технологических процессах в металлургии, например, в процессах очистки водных технологических жидкостях (ВТЖ), в системах неразрушающего контроля и т.д. В связи с выше изложенным задача построения математической модели процесса магнитной коагуляции весьма актуальна. Этому вопросу посвящен ряд современных публикаций [1-4]. В [1-3], в которых рассматриваются вопросы коагуляции ферромагнитных частиц суспензии, направленные на усовершенствование магнитопорошковой диагностики дефектов ферромагнитных изделий. В этих работах внимание сосредоточено на определении результирующих магнитных сил притяжения и удерживания в цепочках агрегатов, закрепленных в области дефекта диагностируемого твердого тела. Авторами в алгоритме расчета цепочек не учитывались стохастические закономерности распределения и коагуляции примесей твердых частиц ферромагнитных примесей – расчет строился только на произвольном задании исходных случайных координат феррочастиц дисперсной фазы. В [4] были получены вероятностные модели процессов

коагуляции, обусловленных влиянием эмульгаторов на основе Марковских цепей.

Таким образом, во всех отмеченных работах не ставилась задача определения изменения дисперсного распределения твердой фазы при магнитной коагуляции.

Стохастическая теория коагуляции, основанная на дискретном и непрерывном уравнениях М. Смолуховского, ставит целью определения эволюции во времени функции распределения частиц взвеси по их массам или размерам [5-8]. В основе механизма элементарного процесса коагуляции лежит соединение двух сталкивающихся частиц с массами  $m_i$  и  $m_j$ . Для монодисперсной твердой фазы этот механизм коагуляции порождает спектр частиц твердой фазы, представляющий набор последовательного ряда 1, 2, 3, ... и  $k$ -мерных частиц. Важным фактором в процессе коагуляции играют физические механизмы сближения и слипания частиц, которые подразделяются на внутренние и внешние. Эти механизмы определяют симметричную функцию  $K(m_i, m_j)$  в уравнениях Смолуховского, которую называют ядром коагуляции. Ядро характеризует вероятность (частоту) столкновения частиц с массами  $m_i$  и  $m_j$ , которая обратно пропорциональна времени их жизни. К внутренним механизмам сближения относятся свободно-молекулярное (броуновское) движение, диффузия, гравитационное падение. При внутренних механизмах слипания действуют межмолекулярные и гидродинамические силы, которые проявляются при сближении частиц. Внешние механизмы – обусловлены внешним магнитным полем.

Подчеркнем, что экспериментальные исследования и теоретические положения утверждают, что намагниченные частицы твердой примеси под действием магнитных сил объединяются в цепоч-

---

Булыжев Евгений Михайлович, доктор технических наук, e-mail: esovita@pm.ru; Меньшов Евгений Николаевич, кандидат технических наук, доцент, gaund2@rambler.ru

ки, ориентированные вдоль магнитных линий [9]. Жесткая поляризация процесса магнитной коагуляции требует учета взаимодействия только соседних пар частиц, расположенных вдоль магнитной линии. Поэтому ядро коагуляции с учетом жесткой поляризации взаимодействия феррочастиц можно выразить следующим способом:

$$K(m_i, m_j) = p(m_i + m_j) / t_m(m_i, m_j), \quad (1)$$

где  $t_m(m_i, m_j)$  – интервал времени сближения соседних пар частиц за счет магнитных сил, вдоль магнитной линии;  $p(m_i + m_j)$  – вероятность распределения пар соседних частиц с результирующей массой  $m_i + m_j$  вдоль магнитной линии.

Для общего случая вероятность  $p(m_i + m_j)$  и время сближения частиц  $t_m(m_i, m_j)$  неизвестны. Эти вопросы, являющиеся неотъемлемой частью теории коагуляции, требуют решения.

Настоящая работа посвящена разработке математической теории магнитной коагуляции и определению путей построения эффективной математической модели, преобразующей исходное распределение в измененное распределение дисперсной фазы в водном ламинарном потоке.

### 1. Интервал времени сближения пар частиц при магнитной коагуляции

Будем полагать, что твердые частицы примеси в суспензии имеют сферическую форму. В работе [10] приводятся выражения результирующего поля для сферического тела, полученные на основе строгого решения уравнений Максвелла

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_и, \quad (2)$$

$$\mathbf{H}_и = H_0 \left( \frac{\mu_\phi - \mu_{cp}}{\mu_\phi + 2\mu_{cp}} \right) [\mathbf{e}_r 2 \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta] \frac{R_\phi^3}{r^3}$$

$$\mathbf{H}_0 = H_0 [\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta] = H_0 \mathbf{k} \quad (4)$$

Здесь:  $\mathbf{H}_0$  – напряженность внешнего магнитного поля;  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_и$  – напряженности результирующего поля сферического тела, вне тела и в теле соответственно;  $\mu_\phi$  – относительная магнитная проницаемость материала шара;  $\mu_{cp}$  – относительная магнитная проницаемость среды, в которую погружено сферическое тело; единичные направляющие вектора  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$  – для сферической и  $\mathbf{k}$  – для декартовой систем координат соответственно (рис. 1);  $R_\phi$  – радиус сферической феррочастицы;  $R_\phi \leq r$  – расстояние до центра феррочастицы.

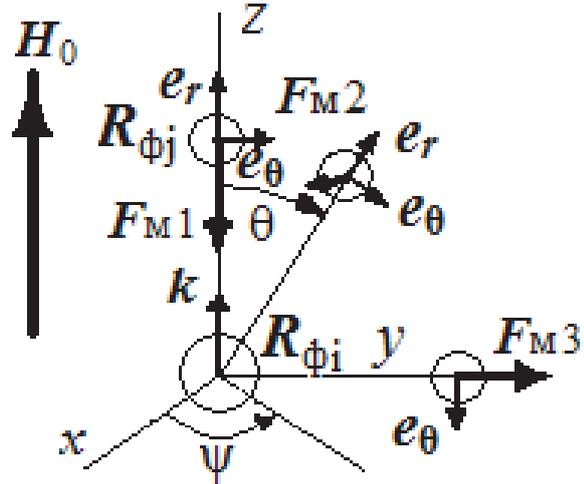


Рис. 1. Магнитные силы взаимодействия между двумя частицами:

$F_{M1}$  при  $\theta = 0$ ;  $F_{M2}$  при  $\theta = 40^\circ$ ;  $F_{M3}$  при  $\theta = 90^\circ$

Магнитная сила притяжения феррочастицы во внешнем магнитном поле вычисляется из формулы [11]:

$$\mathbf{F}_м = \frac{1}{2} \mu_0 V_\phi \chi_\phi \nabla H^2, \quad (5)$$

где  $\chi_m$  – магнитная восприимчивость,  $V_\phi$  – объем феррочастицы.

Формула (5) для сферического тела правомерна при соблюдении в точке  $\mathbf{r} = 0$  условия

$$\left( \frac{\partial H(0)}{\partial r} \right) \gg R_\phi \left( \frac{\partial^2 H(0)}{\partial r^2} \right). \quad (6)$$

Формулы (2)-(3) правомерны для одиночной частицы. В случае многих частиц, взвешенных в суспензии, на каждую частицу будет действовать внешнее дифрагированное магнитное поле (3)  $\mathbf{H}_1$ . При этом для каждой индивидуальной частицы суспензия исполняет роль внешней среды. В [12-13] показано, что относительная магнитная проницаемость в слабозагрязненных водных потоках близка к единице ( $\mu_{cp} \cong 1$ ).

Принимая во внимание сказанное, пондеромоторная сила, приложенная к j-частице и обусловленная дифрагированным полем  $\mathbf{H}_1$  i-частицы в соответствии с формулами (2)- (3) и в однородном внешнем поле  $\mathbf{H}_0$  в сферической системе координат ( $\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ ), согласно рис. 1, принимает вид

$$\begin{aligned} F_{Mjt} &= \frac{1}{2} \mu_0 V_{\phi j} \chi_{\phi j} \nabla (H_{1t} H_{1t}) = \\ &= -3 \mu_0 V_{\phi j} H_0^2 \chi_{\phi j} \chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^4} \left\{ \mathbf{e}_r \left[ \left( 3 + 4 \chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3} \right) (\cos \theta)^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3} (\sin \theta)^2 - 1 \right] + \mathbf{e}_\theta \left( 1 + \chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{2r^3} \right) \sin 2\theta \right\} \end{aligned}$$

где  $\chi_{zi} = \chi_{\phi i} / (\chi_{\phi i} + 3)$ . (7)

При  $\theta = 0$ ,  $e_r = k$ , тогда сила  $F_{mji}$  будет равна

$$F_{mji} = -6\mu_0 V_{\phi j} H_0^2 \chi_{\phi j} \chi_{zi} \frac{R_{\phi i}^3}{r^4} \left(1 + 2\chi_{zi} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3}\right) k$$
 (8)

и направлена к i-частице – данная сила притягивает j-частицу к i-частице (рис. 1).

При  $\theta = 90^\circ$ ,  $e_r = e_r(\theta = 90^\circ)$  сила (7) будет

$$F_{mji} = 3\mu_0 V_{\phi j} H_0^2 \chi_{\phi j} \chi_{zi} \frac{R_{\phi i}^3}{r^4} \left(1 - \chi_{zi} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3}\right) e_r$$

и при  $R_{\phi i}^3/r^3 < 1$  направлена в противоположную сторону от i-частице – данная сила отталкивает j-частицу от i-частицы (рис. 1).

При  $\theta = 45^\circ$  сила (7) будет

$$F_{mji} = -3\mu_0 V_{\phi j} H_0^2 \chi_{\phi j} \chi_{zi} \frac{R_{\phi i}^3}{r^4} * \left\{ 0.5e_r \left(1 + 5\chi_{zi} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3}\right) + e_\theta \left(1 + 0.5\chi_{zi} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3}\right) \right\}$$

и при  $\frac{R_{\phi i}^3}{r^3} < 1$  сила направлена под углом  $-118^\circ$  к линии, проходящей через центры  $O$  и  $O'$  взаимодействующих частиц (рис. 1) – частицы расходятся друг от друга.

Таким образом, в поперечном направлении к магнитным линиям ферромагнитные частицы будут взаимно отталкиваться; взаимно притягиваться будут такие частицы, которые располагаются вдоль магнитных линий внешнего однородного поля  $H_0$ .

Оценим отношение  $H_n/H_0$  на минимальном расстоянии  $r_{\min} \geq R_{\phi i} + R_{\phi j}$  относительно центра i-частицы (источника вторичного поля) до центра смежной j-частицы с радиусами  $R_{\phi i}$ ,  $R_{\phi j}$  соответственно

$$\frac{H_n(r_{\min})}{H_0} < \frac{2\chi_{\phi i}}{(\chi_{\phi i} + 3)} \frac{R_{\phi i}^3}{(R_{\phi i} + R_{\phi j})^3} < 1$$

Из приведенного неравенства следует вывод, что даже на минимальном расстоянии между частицами в теле каждой частицы преобладает внешнее поле  $H_0$  над индуцированным полем  $H_n$ .

В используемых суспензиях водно-технологических жидкостей (в слабозагрязненных ферромагнитными примесями сточных вод) среднестатистическое расстояние между частицами  $l_0 \gg r_{\min}$ , поэтому неравенства  $\frac{R_{\phi i}^3}{r^3} \ll 1$  и  $H_n(r)/H_0 \ll 1$  будут выполняться практически на всех участках сближения двух частиц и намаг-

нитичность диполей будет определяться только интенсивностью внешнего поля  $H_0$ .

Итак, значение силы (8), обуславливающей магнитную коагуляцию двух частиц, обозначим

$$F_{mji} = -\frac{c_{ji}}{r^4}$$
 (9)

где

$$c_{ji} = 6\mu_0 V_{\phi j} H_0^2 \chi_{\phi j} \chi_{zi} R_{\phi i}^3 = 8\pi 6\mu_0 \chi_{\phi j} \chi_{zi} H_0^2 R_{\phi j}^3 R_{\phi i}^3$$

В теории поля результирующая сила взаимодействия двух агрегатов находится по методу наложения, она равна сумме сил взаимодействия каждой частицы одного агрегата с каждой частицей другого агрегата. В случае одинаковых агрегатов, составленных из n одинаковых мономеров и соединенных в цепочки, результирующая сила (9) умножается на  $n^2$ .

Система дифференциальных уравнений (ДУ) перемещения j-частицы на встречу к i-частице примет вид [13]

$$\frac{dv_j}{dt} + \frac{K_{cj}}{2m_j} v_j = -\frac{c_{ji}}{2m_j r^4}, \quad \frac{dr_j}{dt} = v_j,$$
 (10)

где  $K_{cj} = 3\pi\eta d_{\phi j}$  – коэффициент пропорциональности в формуле Стокса,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости жидкой среды;  $m_j = \rho_{\phi} V_{\phi j}$  масса j-частицы;  $\rho_{\phi}$  – удельная плотность феррочастицы,  $v_j$  – скорость j-частицы относительно i-частицы. Для агрегата формой цепочки силу сопротивления можно определить также по методу наложения. Тогда второе слагаемое в (10) умножается на n.

Решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (10) проводим итерационным методом. В качестве первой итерации примем выражение

$$r_{j1} = r(0) - \frac{c_{ji} t}{K_{cj} r^4(0)},$$
 (11)

полученное из допущения, что в начальный момент упорядочного движения частиц будем считать  $\frac{dv_j}{dt} \ll \frac{K_{cj}}{2m_j} v_j$ , где  $r(0)$  расстояние при

$t = 0$ . Подставляя (11) в (10), вторая итерация будет

$$v_{j2} = -\frac{c_{ji}}{2m_j} e^{-\beta_j t} \int_0^t \frac{e^{\beta_j \varepsilon} d\varepsilon}{\left(r(0) - \frac{c_{ji} \varepsilon}{K_{cj} r^4(0)}\right)^4}.$$
 (12)

Интегрируя (12) по частям, имеем

$$v_{j2} = -\frac{c_{ji} e^{-\beta_j t}}{2m_j \beta_j r^4(0)} \left[ \frac{e^{\beta_j t}}{(1-\gamma_{ji} t)^4} - 1 - 4\gamma_{ji} \int_0^t \frac{e^{\beta_j \varepsilon} d\varepsilon}{(1-\gamma_{ji} \varepsilon)^5} \right],$$
 (13)

где  $\beta_j = K_{cj}/2m_j$ ;  $\gamma_{ji} = c_{ji}/K_{cj} r^5(0)$ .

Найдем отношение подынтегральных выражений (13) на (12)

$$\sigma = \left| \frac{4\gamma_{ji}}{\beta_j(1-\gamma_{ji} t)} \right|$$
 (14)

и оценим диапазон выполнения условия  $\sigma \leq 0.33$ , которое должно выполняться в диапазоне изменения времени пролета частицы  $\gamma_{ji}t \leq (1 - 12\gamma_{ji}/\beta_j)$ . (15)

Подчеркнем, что если отношение (14) мало, то в выражении (13) интеграл тоже мал и им, можно пренебречь. Поэтому приближенные значения второй итерации для скорости и её интеграла принимает вид

$$v_{j2} \cong -\frac{c_{ji}}{K_{cj}r^4(0)} \left[ \frac{1}{(1-\gamma_{ji}t)^4} - e^{-\beta_j t} \right], \quad (16)$$

$$r_{j2} \cong r(0) - \frac{c_{ji}}{K_{cj}r^4(0)} \left[ \frac{(1-\gamma_{ji}t)^{-3} - 1}{3\gamma_{ji}} - \frac{1-e^{-\beta_j t}}{\beta_j} \right] \quad (17)$$

Так как  $l_0 \gg r_{\text{мин}}$  интервал времени соединения двух частиц  $t_m \leq t_{\text{пр}}$  оценим из условия  $r_{j2}(t_{\text{пр}}) \approx 0$ . Из (12) и (15) следует

$$\frac{12\gamma_{ji}}{\beta_j} \leq (1 - \gamma_{ji}t) \leq 1 \text{ и далее} \quad \beta_j/\gamma_{ji} > 12. \quad (18)$$

Подставляя значение  $r_{j2}(t_{\text{пр}}) \approx 0$  в (17), приходим к уравнению

$$\frac{4}{3} - \left[ \frac{1}{3(1-\gamma_{ji}t_{\text{пр}})^3} - \frac{\gamma_{ji}(1-e^{-\beta_j t_{\text{пр}}})}{\beta_j} \right] \approx \frac{4}{3} - \left[ \frac{1}{3(1-\gamma_{ji}t_{\text{пр}})^3} \right] \cong 0. \quad (19)$$

Из (19) следует, что интервал времени соединения двух частиц в суспензии приблизительно будет определяться так

$$t_m \leq t_{\text{пр}} \approx 0.37/\gamma_{ji}. \quad (20)$$

Далее подставляя (16) и (17) в исходное дифференциальное уравнение (10), определяем выраженную в относительных единицах «невязку» полученного решения

$$\Delta\sigma = 1 - \left( \frac{r(t)}{r(0)(1-\gamma_{ji}t)} \right)^4 \left[ \frac{4\gamma_{ji}}{\beta_j(1-\gamma_{ji}t)} + 1 \right]. \quad (21)$$

При  $t = 0$ ,  $r = r(0)$  «невязка» решения будет равна  $\Delta\sigma = -4\gamma_{ji}/\beta_j$ , модуль которой в соответствии с (18)  $|\Delta\sigma| \ll 1$ . При  $t = t_m$ ,  $r = r_{\text{мин}}$  «невязка» решения будет равна  $\Delta\sigma < 1$ . Так как скорость сближения частиц при намного больше этой скорости в начале этапа сближения частиц ( $r \sim r(0)$ ), то начальный этап перемещения будет определять основной вклад в интервал времени  $t_m$  соединения двух частиц. Поэтому приближенное решение нелинейного ДУ (16)-(17), (20) удовлетворительно оценивает состояние перемещения взаимодействующих частиц в суспензии ВТЖ.

Оценим диапазон физико-технологических параметров, в котором выполняется необходимое

для полученного решения условие (18) по формуле

$$\frac{\beta_j}{\gamma_{ji}} = \frac{K_{cj}^2 r^5(0)}{2m_j c_{ji}} = \frac{K_{cj}^2 r^5(0)}{12\pi^2 \mu_0 \rho H_0^2 R_{\Phi j}^6 R_{\Phi i}^3 \chi_{\Phi j} \left( \frac{\chi_{\Phi i}}{\chi_{\Phi i} + 3} \right)},$$

где  $\rho$  – объемная плотность массы частиц примеси. Условие (18) будет выполняться в следующем диапазоне изменения параметров:  $\rho \leq 7880$  кг/м<sup>3</sup>;

$\eta \geq 1.5 \cdot 10^{-3}$ ;  
 $r(0) = l_0 \geq 1.25 \cdot 10^{-4}$  м ( $C \leq 2$  кг/м<sup>3</sup> – массовая концентрация примесей в ВТЖ);  
 $H_0 \leq 5 \cdot 10^4$  А/м; диаметры частиц  
 $d_{\Phi i} = d_{\Phi j} \leq 4 \cdot 10^{-5}$  м;  $\chi_{mo} \leq 15$ , где  
 $\chi_{\Phi} = \frac{(\chi_{mo} d_{\Phi})}{6} H_0$ , при  $0 \leq H_0 \leq 5 \cdot 10^4$  А/м и  
 $0 \leq d_{\Phi} \leq 6 \cdot 10^{-5}$  м [13].

Подчеркнем, что данному диапазону параметров отвечают разряженные взвеси ферромагнитных примесей в сточных водах.

## 2. Сопоставление механизмов формирования спектров частиц по теории Смолуховского и для магнитной коагуляции

Разберем механизм образования спектра частиц по кинетике Смолуховского. При разработке своей теории он исходил из следующих предпосылок: 1) частицы дисперсной фазы сферические, а сами дисперсные системы являются монодисперсными, т.е. содержат частички одного размера; 2) скорость коагуляции пропорциональна интенсивности броуновского движения, которая (определяет число столкновений в единицу времени) характеризуется коэффициентом диффузии  $D$ , и с начальной средней концентрацией частиц  $N_{\Phi 0}$ ; 3) между частицами существуют только силы притяжения; 4) процесс коагуляции рассматривался как попарное слипание частиц.

В [6] решается оценочная задача диффузионного сближения произвольной частицы с некоторой закрепленной в пространстве центральной частицей. Столкновение этой неподвижной частицы с другой происходит каждый раз, когда частицы сближаются на расстояние, равное их двой-

ному радиусу ( $R = 2R_{\Phi}$ ). То есть рассматривается диффузия точечных частиц к сфере радиуса  $R$ . При этом оценивается постоянная скорости коагуляции  $K_k = 8\pi RD$ , где коэффициент диффузии выражается из уравнения Эйнштейна

$D = kT/6\pi\eta R_{\Phi}$ ,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости дисперсионной среды.

Тогда среднее время диффузионно-броуновского сближения частиц выражается формулой

$$t_d = \frac{1}{K_k N_{v0}} = \frac{3\eta}{8kT N_{v0}}$$

Отношение времени магнитного сближения (20) к времени диффузионно-броуновского сближения частиц будет

$$\frac{t_M}{t_d} = \frac{0.67kT}{\mu_0 R_{\phi}^2 H_0^2 (N_{v0})^{\frac{2}{3}}} \frac{\chi_{\phi 1} + 3}{\chi_{\phi 1}^2}$$

Оценка дает: при  $d_{\phi} \leq 1 \text{ мкм}$   $\frac{t_M}{t_d} \gg 1$ ; при

$$d_{\phi} \geq 2 \text{ мкм} \div 2.5 \text{ мкм} \quad \frac{t_M}{t_d} \ll 1 \quad \text{для}$$

$$H_0 = 10^4 \div 5 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

Таким образом, для наиболее интересного диапазона распределения примесей ( $d_{\phi} \geq 2 \text{ мкм}$ ) процессы магнитного сближения преобладают над диффузионно-броуновским сближением.

Это означает то, что при магнитной коагуляции для монодисперсной системы спектр агрегатов будет отличаться от спектра Смолуховского, так как нарушается условие перемешивания дисперсионной системы случайными силами (неотъемлемое условие теории коагуляции Смолуховского) за счет процесса диффундирования потока частиц с произвольного ракурса к сфере частицы. Следовательно, при магнитной коагуляции преобладает механизм объединения только таких пар, которые выстроены вдоль магнитных линий. Например, для монодисперсной системы процесс сближения и объединения взаимодействующих пар можно принять синхронным. При этом в каждом акте сближения агрегатов их массы будут удваиваться, в первом акте масса агрегата увеличивается в два раза, во втором – в четыре раза относительно начальной массы и т. п. При этом число частиц в единице объема уменьшается соответственно в два, четыре и т.п. раз.

### 3. Инвариантное уравнение распределения частиц дисперсной фазы при её коагуляции в дисперсной системе

При анализе магнитной коагуляции в монодисперсной системе просматривается очевидный закон сохранения массы, состоящий в следующем

$$m_{av} N_{vv} = const,$$

где соответственно  $m_{av}$  – масса агрегата и  $N_{vv}$  – концентрация частиц дисперсной фазы при  $v$ -ом акте объединения. Рассмотрим данное свойство в параметрах распределения полидисперсного состава механических примесей.

Дисперсионный состав механических примесей в теории сепарации традиционно описывается

массовой плотностью распределения частиц по размерам  $d$

$$f_m(d) = \frac{\Delta m_k}{\Delta d_k \cdot C} \quad (22)$$

Здесь:  $\Delta m_k$  – масса частиц в единице объема, размеры которых принадлежат интервалу ( $d_k, d_k + \Delta d_k$ );  $C$  – массовая концентрация примесей.

В теории коагуляции используется такой закон распределения дисперсионного состава частиц, который характеризует зависимость плотности распределения числа частиц, содержащих в единице объема, от их массы

$$f_n(m) = \frac{\Delta n_k}{\Delta m_k \cdot N_v} \quad (23)$$

Здесь:  $\Delta n_k$  – число частиц в единице объема, массы которых принадлежат интервалу ( $m_k, m_k + \Delta m_k$ ),  $N_v$  – концентрация числа частиц примеси.

Зависимости (23) и (22) связаны между собой через соотношение  $\Delta n_k = \Delta m_k / m_k$ , где  $m_k$  – масса одиночной частицы  $k$ -го сорта. Определяя  $\Delta m_k$  из (22) и подставляя в (23), имеем в пределе формулу связи

$$f_n(m) = \frac{f_m(d_{\phi}) \cdot C \cdot d(d_{\phi})}{m \cdot N_v \cdot dm} \quad (24)$$

в которой обозначение размера частицы  $d$  заменено на обозначение  $d_{\phi}$  в связи с необходимостью взятия производной от размера частицы по её массе.

Из (24) следует уравнение

$$\int_0^{\infty} m f_n(m) dm = \frac{C}{N_v} \int_0^{\infty} f_m(d_{\phi}) d(d_{\phi})$$

Учитывая закон сохранения массы при коагуляции ( $C = const$ ) и принимая во внимание, что левый интеграл есть математическое ожидание непрерывной случайной величины массы агрегатов  $\langle m \rangle$ , а правый интеграл равен единице, приходим к новой форме закона сохранения массы при преобразовании распределения примеси в процессе коагуляции

$$\langle m \rangle N_v = C \equiv inv. \quad (25)$$

Таким образом, получено статистическое инвариантное уравнение, записанное в параметрах распределения полидисперсного состава механических примесей, которое выражает закон сохранения массы при коагуляции. Выражение (25) правомерно для произвольных начальных распределений дисперсности примесей, при произвольных механизмах процессов коагуляции и в произвольные моменты времени. Поэтому этот закон необходимо использовать как критерий разраба-

тываемых математических моделей процессов коагуляции.

**4. Вероятность бинарного объединения частиц механических примесей в однородном магнитном поле**

Для случая полидисперсного состава механических примесей существенный интерес при анализе процесса магнитной коагуляции представляет оценка вероятности распределения пар соседних частиц  $p(m_i + m_j)$  с результирующей массой  $m_i + m_j$  вдоль магнитной линии. Так как соседние пары вдоль магнитных линий объединяются, то вероятность  $p(m_i + m_j)$  представляет собой потенциальную вероятность магнитной коагуляции, которую принимаем за вероятность дисперсного распределения механических примесей при магнитной коагуляции.

Среднестатистическая картина физического распределения частиц примеси в единице объема жидкой среды представляется в виде набора дискретных частиц, расположенных друг от друга на среднестатистическом удалении  $l_0 = \sqrt[3]{1/N_v}$ . По направлению внешнего поля в единице объема ВТЖ выстраиваются  $(N_v)^{\frac{2}{3}}$  среднестатистических рядов частиц примеси с равным среднестатистическим числом частиц  $N = (N_v)^{\frac{1}{3}}$ . В каждом таком продольном (относительно магнитных линий) ряде преобладает процесс объединения частиц. Так как поперечные силы взаимно отталкивают феррочастицы, поэтому можно допустить приближение – среднестатистические продольные ряды частиц не взаимодействуют между собой. Очевидно, в силу среднестатистической однородности вероятности объединений частиц в каждом продольном ряде одинаковые. Тогда задачу поиска вероятности объединения частиц можно свести к одномерному приближению – вычислению вероятности объединения частиц в рамках одного продольного ряда.

Задачу будем решать в рамках следующих идеализаций:

- сосредоточимся только на механизме бинарного объединения дискретных частиц (агрегатов), в которые вступает каждая соседняя пара частиц;
- в результате одного акта парного объединения частиц количество агрегатов будет составлять половину числа исходных частиц  $N_1 = N/2$ , поэтому рассматриваем случай, когда число частиц  $N$  – четное.
- вероятности бинарного объединения частиц будем привязывать к массе бинарных агрегатов, так как при объединении двух частиц масса агрегата складывается из масс отдельных частиц;

- среднестатистическое время цикла будем оценивать по среднеарифметической массе исходного распределения механических примесей в ВТЖ;

- для упрощения задачи ограничимся случаем равномерной исходной вероятности распределения частиц по массам – задаем  $N$  частиц разного калибра, массы которых соответствуют последовательности дискретных чисел  $nM$  ( $M$  – интервал дискретизации массы частиц примеси, так как частица с нулевой массой отсутствует, то  $n = 1, 2, \dots, N$ ). В этом случае вероятность присутствия числа частиц с массой  $nM$  равна  $p_n[nM] = 1/N$ ;

- максимальная масса бинарного объединения соответствует значению как результат объединения частиц с массами  $NM$  и  $(N - 1)M$ .

- процессом разрушения агрегатов в ламинарном водном потоке пренебрегаем.

При вычислении вероятности бинарного объединения учитываем, что порядок расположения частиц в одномерном среднестатистическом ряде выстраивается по случайному закону. Для расчета всевозможных комбинаций парного объединения частиц обратимся к аппарату комбинаторной математики [14-15]. Так число сочетаний из  $N$  элементов по два есть

$$C_N^2 = N! / (2! (N - 2)!). \tag{26}$$

Количество неодинаковых комбинаций по  $N/2$  бинарных агрегатов составляет

$$C_{p\frac{N}{2}}^N = N! / (2^{\frac{N}{2}} (N/2)!). \tag{27}$$

При двух фиксированных номерах  $ij = const$  (27) преобразуется в следующую формулу

$$C_{1n} = C_{p\frac{N}{2}}^N / (N - 1). \tag{28}$$

Масса бинарного агрегата равна  $m_k = (i + j)M$ ,  $k = i + j$ ; минимальная масса агрегата есть  $m_3 = 3M$ , максимальная масса  $m_{2N-1} = (2N - 1)M$ . Вероятность  $p_1[kM]$  распределения числа бинарных частиц равна отношению числу агрегатов  $U_k$  с массой  $kM$  к общему числу комбинаций  $C_{p\frac{N}{2}}^N$ .

$$p_1[kM] = U_k / C_{p\frac{N}{2}}^N, \tag{29}$$

Для равномерного исходного распределения дисперсионного состава частиц формула расчета  $U_k$ , полученная методом математической индукции, имеет вид

$$U_k = 2\lambda_k C_{1n} / N. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (29), имеем

$$p_1[kM] = \frac{2\lambda_k}{N(N-1)} = \frac{2\lambda_k p_n[nM]}{(N-1)}, \quad (31)$$

Где  $\lambda_k$  – число агрегатов с массой  $kM$ ,  $p_n[nM] = 1/N$  – вероятность для равномерного исходного распределении дисперсионного состава примеси.

Значение  $\lambda_k$  можно вычислить по формулам (32) - (33). При  $3 \leq k \leq N + 1$

$$\lambda_k = \lambda_{k1} = \sum_{v=1}^{\frac{N}{2}+2} (v-2)(\delta[k+3-2v] + \delta[k+2-2v]); \quad (32)$$

при  $N + 2 \leq k \leq 2N$ ,

$$\lambda_k = \lambda_{k2} = \sum_{v=\frac{N}{2}+3}^{N-2} (N+v-2) * (\delta[k+3-2v] + \delta[k+4-2v]). \quad (33)$$

Здесь  $\delta[k-v]$  называется смещенным единичным отсчет [17]

$$\delta[k-v] = \begin{cases} 1, & k = v, \\ 0, & k \neq v. \end{cases} \quad (34)$$

Заметим, что выполняется условие нормировки  $\sum_{k=1}^{2N-1} p_1[kM] = 1$ .

Математическое ожидание исходного равномерного распределения

$$\langle m_n \rangle = \sum_{n=1}^N nM p_n[nM] = M(N+1)/2. \quad (35)$$

Математическое ожидание выходного распределения

$$\langle m_1 \rangle = \sum_{k=1}^N kM p_1[kM] = M(N+1). \quad (36)$$

Сопоставляя (35) и (36), будем иметь  $\langle m_1 \rangle = 2\langle m_n \rangle$ . Учитывая, что при парном объединении частиц примеси концентрация уменьшается в два раза, то выполняется закон сохранения массы для построенной математической модели магнитной коагуляции. Таким образом, предложенная математическая модель удовлетворяет критерию (25).

В общем случае, при произвольном дисперсионном составе примеси, предложенный принцип математического моделирования позволяет построить только алгоритм математической модели магнитной коагуляции.

**Таблица.** Распределение вероятностей в общем случае для  $N = 6$

$k, n$	$p_n[nM]$	$(N-1)p_1[kM]$
0	0	0
1	$p_n[M]$	0
2	$p_n[2M]$	0
3	$p_n[3M]$	$p_n[M] + p_n[2M]$
4	$p_n[4M]$	$p_n[M] + p_n[3M]$
5	$p_n[5M]$	$(p_n[M] + p_n[4M]) + (p_n[2M] + p_n[3M])$
6	$p_n[6M]$	$(p_n[M] + p_n[5M]) + (p_n[2M] + p_n[4M])$
7	0	$p_n[M] + p_n[6M] + p_n[2M] + p_n[5M] +$

		$+p_n[3M] + p_n[4M]$
8	0	$(p_n[2M] + p_n[6M]) + (p_n[3M] + p_n[5M])$
9	0	$(p_n[3M] + p_n[6M]) + (p_n[4M] + p_n[5M])$
10	0	$p_n[4M] + p_n[6M]$
11	0	$p_n[5M] + p_n[6M]$
12	0	0

В табл. иллюстрируется алгоритм расчета распределения вероятности числа частиц в зависимости от их массы для одного акта парного объединения при начальном числе частиц  $N = 6$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Решена задача математического моделирования взаимодействия феррочастиц, намагниченных внешним полем в слабо загрязненной водной суспензии. Аналитически подтверждено известное теоретическое и экспериментальное положение, что частицы коагулируются вдоль магнитных линий. Это явление, во-первых, обусловлено наличием отталкивающих сил в поперечном направлении к магнитным линиям. Во-вторых, численные оценки показывают, что диффузионно-броуновские механизмы соединения несущественны для частиц крупностью более 2 мкм. Поэтому механизм магнитной коагуляции основывается на доминировании взаимного притяжения соседних пар частиц, выстроенных вдоль магнитных линий.

2. Построена математическая модель вероятности дисперсного распределения агрегатов при магнитной коагуляции, основанная на принципе объединения пар соседних частиц вдоль магнитных линий. При этом задача решена для вероятного случая распределения дисперсных частиц.

3. Получено статистическое инвариантное уравнение для законов распределения дисперсности механической примеси при коагуляции, записанное в интегральных параметрах распределения полидисперсного состава механических примесей. Оно выражает для замкнутых дисперсных систем (при условии отсутствия седиментации) закон сохранения массы при коагуляции и рекомендуется в качестве необходимого критерия математических моделей коагуляции. Этому критерию удовлетворяет построенная математическая модель вероятности дисперсного распределения агрегатов при магнитной коагуляции в однородном магнитном поле.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного контракта от «03» октября 2011 г. № 14.527.12.003 по теме «Разработка и

создание производства нового поколения экономически доступных системных комплексов и станций очистки и оздоровления больших объемов природных, трансграничных и оборотных вод, дождевых и промышленных стоков для предприятий и ЖКХ».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назаров Е.А. Разработка математической модели процесса магнитной коагуляции частиц суспензии // Приборы. 2011. № 4. С. 51-53.
2. Назаров Е.А. Разработка компьютерной технологии моделирования процесса магнитной коагуляции // Контроль. Диагностика. 2011. № 4. С. 29-35.
3. Кудрявцев Д.А. Моделирование процесса коагуляции в неоднородном магнитном поле дефекта // Контроль. Диагностика. 2011. № 6. С. 40-43.
4. Бульжев Е.М., Богданов А.Ю. Критериальная модель дисперсионного состава СОЖ // Справочник. Инженерный журнал. 2008. № 10. С. 43-45.
5. Дубовский П.В. Итерационный метод решения уравнения коагуляции с пространственно неоднородными полями скоростей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. 30. С. 1755-1757.
6. Волков В.А. Коллоидная химия (Поверхностные явления и дисперсные системы). М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2001. 640 с.
7. Пеньков Н.В. Коагуляционные процессы в дисперсных системах. Екатеринбург, 2005. 240 с.
8. Галкин В.А. Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 408 с.
9. Пособие «Система неразрушающего контроля. Виды (методы) и технология неразрушающего контроля. Термины и определения (справочное пособие)». Москва, 2003.
10. Кугуцев А.М., Голубева Н.С. Основы радиоэлектроники (Линейные электромагнитные процессы). М.: Энергия, 1969. 880 с.
11. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.
12. Исследование распределения поля магнитных сил патронного магнитного сепаратора при очистке СОЖ / Е.М. Бульжев, Е.Н. Меньшов, А.Е. Меньшов, Г.А. Джавахия, Е.П. Терешенок // Справочник. Инженерный журнал. М.: Машиностроение, 2011. № 9. С. 45-50.
13. Новое поколение силовых очистителей водных технологических жидкостей / Е.М. Бульжев, А.Ю. Богданов, Е.Н. Меньшов, М.Е. Краснова, Н.Н. Кондратьева, Г.А. Джавахия, Е.П. Терешенок; под общей редакцией Е.М. Бульжева. Ульяновск: УлГТУ, 2010. 419 с.
14. Элементы комбинаторики / И.И. Ежов, А.В. Скороходов, М.И. Ядренко. М.: Наука, 1977. 80 с.
15. Тараканов В.Е. Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы. М.: Наука, 1985. 192 с.

#### MATHEMATICAL THEORY OF THE MAGNETIC COAGULATION FERROMAGNETIC PARTICLES IN SOILED WASTEWATER

© 2014 E.M. Bulyzhev<sup>1</sup>, E.N. Menshov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>JSC "Systems of water purification", Ulyanovsk

<sup>2</sup>Ulyanovsky State Technical University

Developed a mathematical model of convergence ferroparticles in a magnetic field. Having repulsive forces between the magnetized particles in the transverse direction of the magnetic lines and inconsequential time compound particle pairs in the longitudinal direction to them over Brownian diffusion mechanism approach leads to a difference kinetics magnetic coagulation Smoluchowski of theory. A mathematical model of the probability distribution of the dispersed particles (aggregates), based on the principle of combining pairs of adjacent particles along magnetic field lines. Obtained statistical invariant equation for the mechanical dispersion of the distribution laws of impurity during coagulation.

**Key words:** magnetic coagulation, kinetics approach of the particles, the simulation of magnetic forces, the time of convergence, the probability distribution of the particles, the invariant equation.