

УДК 539.3

МОДЕЛИ ПОДКРЕПЛЕННОГО СТЫКА  
ДВУХ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ РАЗНОЙ ТОЛЩИНЫ

© 2014 Э.В.Антоненко<sup>1</sup>, Т.Э. Шульга<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина

Поступила в редакцию 17.12.2013

В статье представлены результаты теоретико-экспериментального исследования напряженного состояния конструкции, состоящей из двух тонкостенных цилиндров разной толщины, находящихся под действием внутреннего давления. Место стыка оболочек подкреплено шпангоутом. Проводилась проверка (оценка достоверности) аналитических зависимостей теории оболочек. Предлагаются рекомендации по выбору расчетной модели конструкции при действии внутреннего давления.

Ключевые слова: модель подкрепленного стыка, напряженное состояние твердого тела, теория оболочек, теория упругости, механика деформируемого твердого тела, тонкостенный цилиндр

ВВЕДЕНИЕ

Обращение к решению осесимметричной задачи теории оболочек связано с применением новых материалов и разнообразием подобных конструкций в авиационной, ракетно-космической технике, подводном флоте, химическом машиностроении и др. Различные задачи для подобных конструкций рассматриваются в многочисленных современных работах, например [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Рассмотрим напряженное состояние (НС) цилиндрической оболочки, представляющей конструкцию из двух последовательно состыкованных полуоболочек разной толщины. Место стыка подкреплено шпангоутом (рис. 1). Оболочка загружена внутренним давлением.

Расчеты подобных оболочечных конструкций в проектных организациях хорошо согласуются с зависимостями классической теории оболочек с тонкостенностью  $R/\delta > 100$  ( $R$  – радиус срединной поверхности,  $\delta$  – толщина оболочки). По расчетам более “толстых” оболочек мнение различных исследователей (см. материалы съездов и симпозиумов по теории оболочек) не однозначны.

В работе оценивается правомерность применения зависимости теории оболочек при тонкостенности 30-70 путем сравнения результатов расчета и эксперимента.

Объектом расчета и испытания была спроектированная авторами точеная оболочка из ста-

*Антоненко Эрик Васильевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры “Математического и компьютерного моделирования”. E-mail: antonenko.erik@yandex.ru*  
*Шульга Татьяна Эриковна, доктор физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой “Прикладная информатика и программная инженерия”. E-mail: shulga@sstu.ru*

ли-3 со скачкообразным изменением толщины с усилением в виде шпангоута прямоугольного сечения (рис. 1) в середине длины оболочки. Толщина “первой” полуоболочки  $\delta_1 = 0,135$  см, второй –  $\delta_2 = 0,255$  см при радиусе внутренней поверхности  $R = 8,38$  см;  $(R/\delta)_1 = 62,6$ ;  $(R/\delta)_2 = 33,4$ .

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

НС оболочек вдали от стыка описывается формулами безмоментной теории оболочек [7, 8]:

$$\sigma_{x0} = p \frac{R}{2\delta}; \quad \delta_{\varphi 0} = p \frac{R}{\delta}; \quad w_0 = \frac{pR^2}{E\delta}, \quad (1)$$

где  $\sigma$ ,  $p$ ,  $E$  – напряжение, давление, модуль упругости;  $w_0$  – радиальные перемещения считаются положительными при увеличении радиуса оболочки. Индексы “ $x$ ” и “ $\varphi$ ” соответствуют осевым и кольцевым напряжениям.

Вблизи стыка оболочек картину НС можно получить из решения краевой задачи, учитывающей изгиб образующих для каждой полуоболочки:

$$\frac{d^4 w_i}{dx_i^4} + 4k_i^4 w_i = 0, \quad k_i^4 = \frac{3(1-\mu^2)}{R_i^2 \delta_i^2}, \quad (2)$$

где  $i$  – номер полуоболочки,  $w$  – радиальные перемещения,  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Место стыка можно представить двумя моделями (рис. 2). Системы отсчета продольных координат  $x_i$  для левой и правой полуоболочек обозначены соответственно  $x_1$  и  $x_2$ . Для первой модели (рис. 2а) площадь шпангоута обозначена  $f_1$ , для второй модели (рис. 2б) –  $f_2$ .

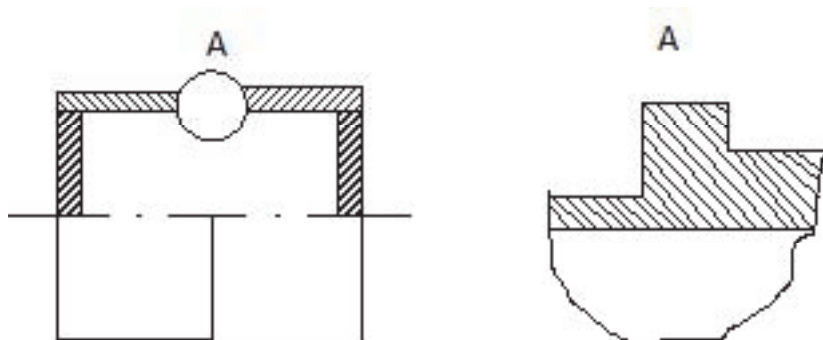


Рис 1. Схема оболочки со шпангоутом

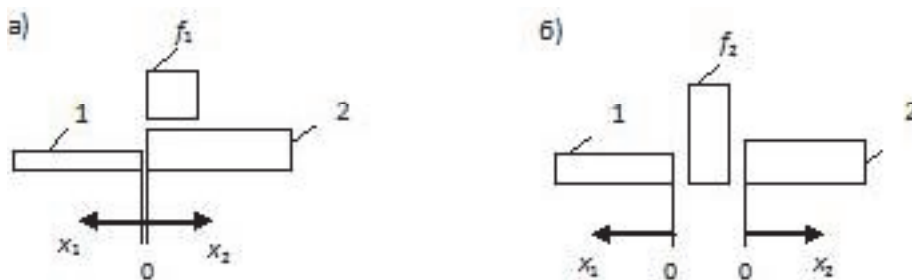


Рис. 2. Расчетные модели стыка оболочки:

$f$  – площадь шпангоута, 1 - левая полуоболочка, 2- правая полуоболочка, 0 – начало систем отсчета

Решая задачу в физически и геометрически линейной постановке, НС получим суммированием результатов расчета оболочек отдельно от действия внутреннего давления (1) и действия погонных краевых нагрузок  $Q_i$  и  $m_i$ , если  $Q$  – поперечная сила,  $m$  – изгибающий момент, положительные направления которых показаны на рис. 3.

Решение дифференциального уравнения (2) запишем форме [8] и воспользуемся методом [7]. Суть метода заключается в разделении НС на основное и дополнительное. Здесь в качестве основного принято безмоментное состояние оболочки, без учета возмущений от шпангоутов и дниц. Индексы “0” в обозначениях напряжений и перемещений характеризуют это состояние. НС от местных возмущений считается дополнительным и соответствует решению краевой задачи теории оболочек.

Такой подход упрощает решения и делает их более наглядным при анализе результатов расчета. Он позволяет получить аналитические выражения для расчета перемещений и напряжений в виде (здесь и далее индексы  $i$  для первой и второй полуоболочек опустим):

$$\begin{aligned} \bar{w} &= 1 + 2[\bar{m}\psi(kx) + \bar{Q}\theta(kx)]; \\ \bar{\sigma}_\varphi &= \bar{w} \pm \frac{6\mu}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}[\bar{m}\varphi(kx) + \bar{Q}\xi(kx)]; \\ \bar{\sigma}_x &= \frac{\sigma_{x0}}{\sigma_{\varphi 0}} \pm \frac{6}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}[\bar{m}\varphi(kx) + \bar{Q}\xi(kx)], \\ \bar{m} &= \frac{k^2}{p}m_0; \quad \bar{Q} = \frac{k}{p}Q_0; \quad \bar{w} = \frac{w}{w_0}; \quad \bar{\sigma}_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{\sigma_{\varphi 0}}; \quad \bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x}{\sigma_{x0}}, \end{aligned} \quad (3)$$

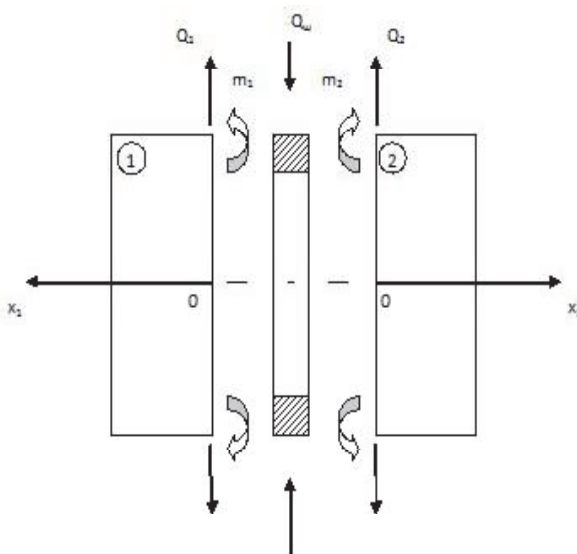


Рис. 3. Схема краевых нагрузок для исследуемой конструкции

где  $m_0, Q_0, \psi(kx), \theta(kx), \varphi(kx), \xi(kx)$  – краевые нагрузки в сечении  $x = 0$  и функции Тимошенко, значения которых за-tabулированы в [8]. Аналитические выражения  $m_0$  и  $Q_0$  для ряда схем оболочек приведены в [9].

Величины  $\bar{w}$  и  $\bar{\sigma}$  показывают, во сколько раз действительные перемещения и напряжения отличаются от вычисленных по безмоментной теории оболочек. Знак “+” в (3) относится к внутренней, знак “-” – к наружной поверхности оболочки.

### ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Теоретической основой расчета служили зависимости [9], полученные на базе моментной теории оболочек. Эксцентриситет срединных поверхностей при расчетах не учитывался. Предполагая, что сечение шпангоута не сопротивляется кручению, получим  $m_1 = m_2 = m_0$ . В этом случае, шпангоут загружен только силой  $Q_{ш} = -(Q_1 + Q_2)$ .

Для рассматриваемой конструкции зависимости [9] для расчета краевых нагрузок при одинаковых модулях упругости левой и правой полуоболочек ( $E_1 = E_2 = E$ ) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= -p \frac{0,85}{k_1 M} \left\{ L + k_2 \frac{f}{\delta_2} \left[ 2 + \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{\frac{3}{2}} \left( 1 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \right] \right\}, \\
 Q_2 &= p \frac{0,85}{k_1 M} \left\{ L - k_2 \frac{f}{\delta_2} \left[ \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + 2 \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{\frac{5}{2}} \right) \right] \right\}, \\
 m_0 &= -p \frac{0,425}{k_1^2 M} \left\{ \left( 1 - \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \left[ \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^2 - 1 \right] + 2k_2 \frac{f}{\delta_2} \left[ 1 + \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \right\}, \\
 M &= 1 + \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^4 + 2 \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ 1 + \frac{\delta_1}{\delta_2} + \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + 2k_2 \frac{f}{\delta_2} \left[ 1 + \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{\frac{5}{2}} \right],
 \end{aligned} \tag{4}$$

Для рассматриваемой конструкции коэффициенты дифференциальных уравнений (2) равны соответственно  $k_1 = 1,203 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_2 = 0,872 \text{ см}^{-1}$ . Длина оболочки, равная 26 см, обеспечила для каждой полуоболочки условие, предложенное в [8]:  $kl > 6$  - условие отсутствия влияния жестких днищ на напряженное состояние в ее середине. Краевые поперечные силы  $Q_1$  и  $Q_2$ , рассчитанные по формулам (4), оказались отрицательными, а изгибающий момент  $m_0$  - положительным.

Напряжения на наружной поверхности конструкции рассчитывались по формулам (3) при двух расчетных моделях (рис. 2). Первой модели (рис. 2а) соответствовала площадь шпангоута  $f_1 = 0,224 \text{ см}^2$ , второй (рис. 2б) -  $f_2 = 0,479 \text{ см}^2$ . Результаты расчетов для левой (первой) и правой полуоболочек при внутреннем давлении

$p = 1 \text{ МПа}$  приведены на рис. 5 и 6 соответственно. Кривые, соответствующие первой и второй расчетным моделям, обозначены номерами 1 и 2.

Связь между координатами  $x_1, x_2$  и безразмерными координатами  $k_i x_i$ , необходимыми для вычисления значения функций Тимошенко, приведена в табл. 1.

### ЭКСПЕРИМЕНТ

Экспериментальная часть исследования напряженного состояния конструкции выполнялась классическим методом тензометрирования. Схема экспериментальной установки представлена на рис. 4.

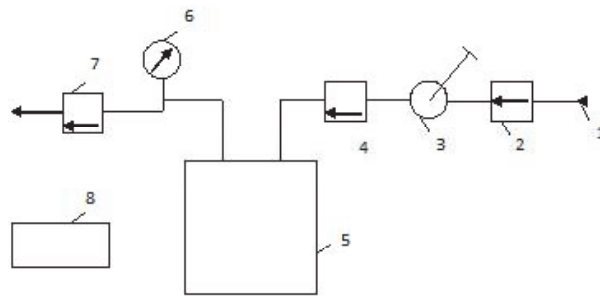


Рис. 4. Схема экспериментальной установки

Внутреннее давление обеспечивалось напором воды, забираемой из водопровода 1 через вентиль 2. Ручной насос 3 позволял создавать при открытом вентиле заполнения 4 внутри испытываемой оболочки 5 давление до 2,5 Мпа, которое контролировалось манометром 6. Давление из оболочки сбрасывалось вентилем дренажа 7. В качестве тензостанции 8 использовались два усилителя 8АНЧ со специально разработанной коммутационной и измерительной аппаратурой.

Тензодатчики с пятимиллиметровой базой наклеивались на наружную поверхность оболочки в виде прямоугольной розетки. Оси чувствительности датчиков располагались вдоль образующей и перпендикулярно ей. Розетки располагались по двум диаметрально противоположным образующим.

В опытах измерялись относительные деформации  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_\varphi$ , которые осреднялись по показаниям датчиков диаметрально противоположных розеток в одном поперечном сечении оболочки. По относительным деформациям вычислялись напряжения

Таблица 1. Связь между безразмерными и размерными координатами

$x_1, \text{ см}$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$x_2, \text{ см}$	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2
$k_1 x_1 = k_2 x_2$	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0	3,6

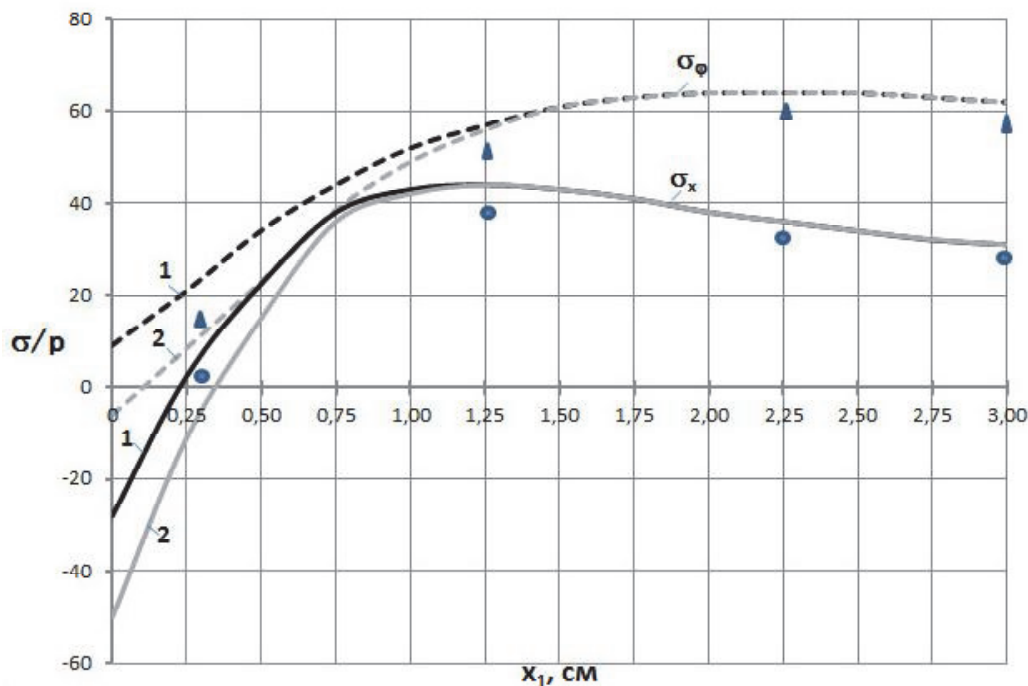


Рис. 5. Напряженное состояние левой полуоболочки

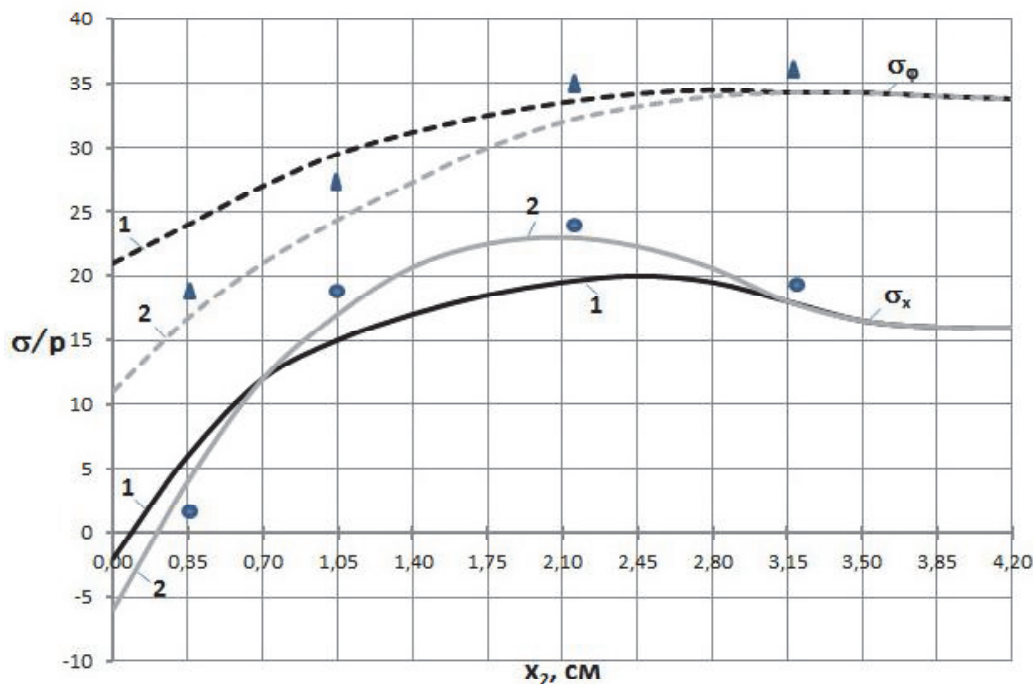


Рис. 6. Напряженное состояние правой полуоболочки

**ВЫВОДЫ**

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_x),$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_\varphi). \quad (5)$$

Результаты эксперимента, полученные по формулам (5), отражены на рис. 5 и 6. Кружками обозначены результаты эксперимента для осевых напряжений, треугольниками – значения кольцевых напряжений.

Сравнение результатов расчета с результатами опыта свидетельствует об их вполне удовлетворительном совпадении, т.е. о правомерности использования формул [9] в расчетной практике, так как различие в напряжениях, полученных расчетом и экспериментом, в зонах возмущения не превысило 11 %. Зона возмущений носит более локальный характер для оболочек меньшей толщины. Область возмущений в

первой оболочке оказалась ограниченной параметром  $k_1 x_1 < 2,5$ , во второй –  $k_2 x_2 < 3$ . Следовательно, область возмущений в осесимметричной задаче можно ограничить величиной параметра  $kl \leq 3$ .

Вторая модель стыка, предполагающая большее значение площади шпангоута и вызывающая большее возмущение полей напряжений, является предпочтительной.

Расчеты напряженного состояния по предложенным зависимостям дают более высокие значения напряжений чем результаты опыта, что идет в запас прочности.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Актуальные проблемы механики оболочек // Труды Международной конференции. Казань, 26 - 30 июня 2000 г. Казань: Новое Знание, 2000. 488 с.
2. Антоненко Э.В., Шульга Т.Э. Математические модели потери устойчивости неоднородных цилиндрических оболочек от неравномерной радиальной нагрузки // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 3. С. 79–83.
3. Джашитов В.Э., Панкратов В.М., Барулина М.А. Математические модели термоупругого напряженно-деформированного состояния и погрешности масштабного коэффициента волоконно-оптического гироскопического датчика // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. № 2. С. 3–52.
4. Крысько В.А., Жигалов М.В., Яковлева Т.В., Крылова Е.Ю., Паткова И.В. Метод установления в нелинейных задачах балок и пластин с учетом локальности нагружения // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2012. Т. 2. № 1. С. 7–17.
5. Теории оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур = Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology : from Macro- to Nanoscale Structures: материалы междунар. науч. конф. / Минск, Беларусь [под общ. ред. Г.И. Михасева, Х. Альгенбаха]. Минск: Изд. центр БГУ, 2013. 295 с.
6. Торопова О.А. Математическое описание напряженно-деформированного состояния райзера, выполненного из нелинейно-упругого материала // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2012. Т. 1. №2(64). С. 36–41.
7. Кан С.Н. Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966. 508 с.
8. Тимошенко С.П., Войтовский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.
9. Антоненко Э.В. Расчет сопряженных оболочек, выполненных из неодинаковых материалов разной толщины // Проблемы прочности. 1973. №6. С. 90-96.

### MODELS OF RING-STIFFENED JOINT OF TWO THIN-WALLED CYLINDERS WITH DIFFERENT THICKNESS

© 2014 E.V. Antonenko<sup>1</sup>, T.E. Shulga<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University named after N.G. Chernyshevsky

<sup>2</sup>Saratov State Technical University

The paper presents semitheoretical research of composite construction stress state. The composite construction contains two thin-walled cylinders with different thickness under inflation. The joint of shells is ring-stiffened. Same analytic dependences of shell theory are checked. The suggestions for choice of construction structural model are given.

Key words: model of ring-stiffened joint, stress state of solid, theory of shells, the theory of elasticity, deformable solid mechanics, thin-walled cylinder

---

*Erik Antonenko, Ph.D (Doctor of Engineering), Professor, Professor of the Department "Mathematical and Computer Modeling". E-mail: antonenko.erik@yandex.ru*  
*Tatiana Shulga, Ph.D (Doctor of Physics and Mathematics), Associated Professor, Chief of the Department "Applied Informatics and Software Engineering". E-mail: shulga@sstu.ru.*