УДК 519.248

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНЕЧНЫМИ АВТОМАТАМИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С РАЗЛИЧИМЫМИ КАНАЛАМИ

© 2014 А.П. Котенко, М.Б. Букаренко

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П.Королёва
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 17.12.2014

Изложена постановка задачи исследования систем массового обслуживания с различимыми каналами, обладающими различной пропускной способностью и/или отдельными очередями. В этом случае нельзя применить результаты классической теории массового обслуживания с линейным графом состояний процесса “гибели и размножения”. Предложено описание системы с различимыми каналами конечными детерминированными и недетерминированными автоматами. Это позволило провести имитационное моделирование поведения системы при различных вариантах диспетчеризации входных заявок.

Ключевые слова: система массового обслуживания, неоднородные каналы обслуживания, раздельные очереди каналов обслуживания, конечные автоматы.

В нотификации [1, 2, 3] рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с различимыми каналами (имеющими, к примеру, разную пропускную способность или раздельные очереди) сигнатуры $T=T(м_1,м_2,...,м_k;m_1,m_2,...,m_k)$, где $м_i$ – пропускная способность, m_i – число мест в очереди i-го канала, $i\in\overline{1,k}$; $k>0$. Оптимизация работы системы по среднему времени обслуживания заявок и минимизации вероятности отказа достигается с помощью следующего протокола диспетчеризации входных заявок [4, 5, 6].

Пусть очередная входная заявка обнаруживает систему в состоянии $(x_1,x_2,...,x_k;y_1,y_2,...,y_k)$, не являющемся состоянием отказа $(1,1,...,1;m_1,m_2,...,m_k)$, где $x_i=1$, если i-й канал занят, $x_i=0$, если свободен, y_i соответствует наполненности очереди этого канала. В случае, если существует один и только один канал (с номером i), способный принять заявку, то заявка направляется к нему. В противном случае оптимальным считаем выбор i-го канала обслуживания, способного обработать заявку с минимальным средним суммарным временем T обслуживания попавших в него заявок.

СМО с детерминированной диспетчеризацией и недетерминированной выработкой сигналов на освобождение приборов. Далее рассмотрим 2-канальную СМО с различимыми каналами пропускной способности $m_1>m_2$ без очереди $T=T(м_1,м_2;0,0)$. Представим её поведение в дискретном времени недетерминированным конечным автоматом (НКА) $K(S,A)$ с алфавитом внутренних состояний $S=\{(00),(01),(10),(11)\}$ без выделенных начального и конечного состояний, входным алфавитом $A=\{0,1\}$ и пустым выходным алфавитом. Буква 1 входного алфавита A соответствует приходу заявки в систему, а 0 – выработке сигнала освобождения заявки одним из каналов.

Рассмотрим все сочетания стохастической природы дуг орграфа, представленные (не)детерминированными конечными автоматами.

При детерминированной диспетчеризации входных заявок получим для $a=a(n)$, $s_1=s_1(n)$, $s_2=s_2(n)$ нелинейные нестационарные рекурсивные стохастические булевы функции в правой части уравнений состояний НКА $K(S,A)$:

$$s_1(n+1)=\begin{array}{|c|c|}\hline a\oplus s_1s_2\oplus as_1s_2 & a \\ \hline q_1 & q_2 \\ \hline \end{array}$$

$$s_2(n+1)=\begin{array}{|c|c|}\hline a\oplus as_1\oplus as_1s_2 & a\oplus s_1s_2\oplus as_1 \\ \hline q_1 & q_2 \\ \hline \end{array}.$$

Тогда *рекурсивную* (то есть разрешимую последовательно) систему линейных рекурсивных нестохастических уравнений состояний автомата $K(S,A_1)$ получим из соответствующей таблицы истинности при входном сигнале $a_1(n)a_2(n)=a_1a_2\in A_1$:

$$s_1(n+1)=a_1\oplus a_1a_2\oplus a_2s_1\oplus a_1a_2s_1=$$
$$=\alpha_n\oplus\beta_n s_1(n),$$

$$s_2(n+1)=a_1s_1\oplus a_1a_2s_1\oplus a_2s_2\oplus s_2\oplus a_1a_2s_1s_2=$$
$$=\gamma_n\oplus\delta_n s_2(n),$$

где $\alpha_n:=a_1\overline{a_2}$, $\beta_n:=\overline{a_1}a_2$, $\gamma_n:=a_1\overline{a_2}s_1$, $\delta_n:=\overline{a_2}\oplus a_1a_2s_1$.

Котенко Андрей Петрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры “Математические методы в экономике”. E-mail: ako1959@mail.ru
Букаренко Максим Борисович, ассистент кафедры “Математические методы в экономике”.
E-mail: maxim.bukarenko@gmail.com

Отсюда получим явный вид уравнений состояний

$$s_1(n+1)=\sum_{t=0}^{n}\alpha_{n-t}\prod_{\tau=0}^{t-1}\beta_{n-\tau}\oplus s_1(0)\prod_{\tau=0}^{n}\beta_{n-\tau}\ ,$$

$$s_2(n+1)=\sum_{t=0}^{n}\gamma_{n-t}\prod_{\tau=0}^{t-1}\delta_{n-\tau}\oplus s_2(0)\prod_{\tau=0}^{n}\delta_{n-\tau}\ .$$

Здесь для универсальности обозначений полагается равенство $\prod_{\tau=0}^{-1}\beta_{n-\tau}:=1$.

Поскольку,

$\prod_{\tau=0}^{n}\beta_{n-\tau}=0$, если $\exists k\in\overline{0,n}:\beta_k=\overline{a_1(k)}a_2(k)=0$;

$\prod_{\tau=0}^{n}\delta_{n-\tau}=0$, если $\exists k\in\overline{0,n}:\ \delta_k=\overline{a_2(k)}\oplus a_1(k)a_2(k)s_1(k)=0$,

то явные уравнения состояний примут окончательный вид:

$$s_1(n+1)=\begin{cases}\sum\limits_{t=0}^{n}\alpha_{n-t}\oplus s_1(0)\leftarrow\\ \leftarrow\left(\forall k\in\overline{0,n}\Rightarrow\beta_k=\overline{a}_1a_2=1\right),\\ \sum\limits_{t=0}^{m-1}\alpha_{n-t}\leftarrow\\ \leftarrow(m\le n)\wedge(\beta_m=0)\wedge\\ \wedge\left(\forall k\in\overline{0,m-1}\Rightarrow\beta_k=\overline{a}_1a_2=1\right);\end{cases}$$

$$s_2(n+1)=\begin{cases}\sum\limits_{t=0}^{n}\gamma_{n-t}\oplus s_2(0)\leftarrow\\ \leftarrow\left(\forall k\in\overline{0,n}\Rightarrow\delta_k=\overline{a_2}\oplus a_1a_2s_1=1\right),\\ \sum\limits_{t=0}^{m-1}\gamma_{n-t}\leftarrow\\ \leftarrow(m\le n)\wedge\\ \wedge\left(\forall k\in\overline{0,m-1}\Rightarrow\delta_k=1\right)\wedge\\ \wedge\left(\delta_m=\overline{a_2}\oplus a_1a_2s_1=0\right).\end{cases}$$

СМО со стохастической диспетчеризацией входных заявок и выработкой сигналов на освобождение приборов. В общем случае стохастического поведения пропускной способности дуг, выходящих из вершин (00) и (11), уравнения перехода зависят от совместного распределения вероятностей переходов по этим четырём дугам. В этом случае получим рекурсивные стохастические булевы функции в правых частях уравнений состояний НКА

$s_1(n+1)=$

$a\oplus s_1s_2\oplus as_1s_2$	a	$s_1s_2\oplus as_1\oplus as_2$	$as_1\oplus as_2\oplus as_1s_2$
q_1p_1	q_2p_1	q_1p_2	q_2p_2

$s_2(n+1)=$

$a\oplus as_1\oplus as_1s_2$	$a\oplus s_1s_2\oplus as_1$	a	$a\oplus s_1s_2\oplus as_1s_2$
q_1p_1	q_2p_1	q_1p_2	q_2p_2

.

Построим изоморфный ДКА $K(S,A_2)$ со входным алфавитом A_1={00,01,10,11}, обозначив буквой 00 сигнал освобождения канала 1 (в том числе “холостой ход” при простое (01) этого канала), буквой 01 – сигнал освобождения канала 2 (в том числе “холостой ход” при простое (10) этого канала), буквой 10 – сигнал прихода входной заявки, которую может обработать только канал 1, буквой 11 – сигнал прихода входной заявки, которую может обработать только канал 2. Отношение вероятностей появления букв 00 и 01 во входном потоке сигналов ДКА $K(S,A_2)$ равно q_1/q_2, а отношение вероятностей появления букв 10 и 11 во входном потоке сигналов равно p_1/p_2.

Аналогично первому случаю, составим таблицу истинности детерминированных булевых функций $s_1(n+1)$ и $s_2(n+1)$ ДКА $K(S,A_2)$ и выведем из их СДНФ линейные независимые рекурсивные детерминированные уравнения состояний

$$s_1(n+1)=a_1\oplus a_1a_2\oplus a_2s_1=\alpha(n)\oplus\beta(n)s_1(n),$$

$$s_2(n+1)=s_2\oplus a_2s_2\oplus a_1a_2=\gamma(n)\oplus\delta(n)s_2(n),$$

где $\alpha(n):=a_1\overline{a_2}$, $\beta(n):=a_2$, $\gamma(n):=a_1a_2$, $\delta(n):=\overline{a_2}$.

Отсюда получим явный вид уравнений состояний:

$$s_1(n+1)=\begin{cases}\sum\limits_{t=0}^{n}\alpha(n-t)\oplus s_1(0)\leftarrow\\ \leftarrow\left(\forall k\in\overline{0,n}\Rightarrow\beta(k)=a_2(k)=1\right),\\ \sum\limits_{t=0}^{m-1}\alpha(n-t)\leftarrow\\ \leftarrow(m\le n)\wedge\\ \wedge\left(\forall k\in\overline{0,m-1}\Rightarrow\beta(k)=a_2(k)=1\right)\wedge\\ \wedge\left(\beta(m)=a_2(m)=0\right);\end{cases}$$

$$s_2(n+1)=\begin{cases}\sum\limits_{t=0}^{n}\gamma(n-t)\oplus s_2(0)\leftarrow\\ \leftarrow\left(\forall k\in\overline{0,n}\Rightarrow\delta(k)=\overline{a_2(k)}=1\right),\\ \sum\limits_{t=0}^{m-1}\gamma(n-t)\leftarrow\\ \leftarrow(m\le n)\wedge\\ \wedge\left(\forall k\in\overline{0,m-1}\Rightarrow\delta(k)=\overline{a_2(k)}=1\right)\wedge\\ \wedge\left(\delta(m)=\overline{a}_2(m)=0\right).\end{cases}$$

СМО со стохастической диспетчеризацией и детерминированной выработкой сигналов на освобождение приборов. При недетерминированной диспетчеризации входных заявок с вероятностью $p_1<1$ перехода по оптимальной дуге (00)>(10) и вероятностью $p_2=1-p_1>0$ перехода по неоптимальной дуге (00)>(01) введём детерминированную диспетчеризацию выходных заявок: $q_1=1$, $q_2=0$.

Из таблицы истинности стохастических булевых функций $s_1(n+1)$ и $s_2(n+1)$ НКА $K(S,A)$ с двумя стохастическими дугами $(00)\to(10)$ и $(00)\to(01)$ получим нелинейные нестационарные рекурсивные стохастические булевы функции в правой части уравнений состояний НКА $K(S,A)$ с двумя оставшимися недетерминированными переходами $(00)\to(10)$ и $(00)\to(01)$:

$$s_1(n+1)=\begin{array}{|c|c|}\hline a\oplus s_1s_2\oplus as_1s_2 & as_1\oplus as_2\oplus s_1s_2\\ \hline p_1 & p_2\\ \hline\end{array},$$

$$s_2(n+1)=\begin{array}{|c|c|}\hline as_1\oplus as_2\oplus as_1s_2 & a\\ \hline p_1 & p_2\\ \hline\end{array}.$$

Тогда уравнения состояний автомата $K(S,A_3)$ получим из таблицы истинности детерминированных булевых функций $s_1(n+1)$ и $s_2(n+1)$ при входном сигнале $a_1(n)a_2(n)=a_1a_2\in A_3$:

$$s_1(n+1)==a_1a_2\oplus a_1s_1\oplus a_1a_2s_1\oplus s_1s_2\oplus$$
$$\oplus a_1s_1s_2\oplus a_2s_1s_2\oplus a_1a_2s_1s_2=\alpha(n)\oplus\beta(n)s_1(n),$$
$$s_2(n+1)=a_1\oplus a_1a_2\oplus a_1a_2s_2=\gamma(n)\oplus\delta(n)s_2(n),$$

где $\alpha(n):=a_1(n)a_2(n)$,

$$\beta(n):=\overline{a_2}(n)\left[a_1(n)\oplus\overline{a_1(n)}s_2(n)\right],$$

$$\gamma(n):=a_1(n)\overline{a_2(n)},\ \delta(n):=a_1(n)a_2(n).$$

Таким образом, получим явный вид уравнений состояний

$$s_1(n+1)=\begin{cases}\sum\limits_{t=0}^{n}\alpha(n-t)\oplus s_1(0)\leftarrow\\ \leftarrow\left(\forall k\in\overline{0,n}\Rightarrow\right.\\ \left.\Rightarrow\beta(k)=\overline{a_2(k)}\left[a_1(k)\oplus\overline{a_1(k)}s_2(k)\right]=1\right),\\ \sum\limits_{t=0}^{m-1}\alpha(n-t)\leftarrow\\ \leftarrow(m\le n)\wedge\\ \wedge\left(\forall k\in\overline{0,m-1}\Rightarrow\beta(k)=1\right)\wedge\\ \wedge(\beta(m)=0);\end{cases}$$

$$s_2(n+1)=\begin{cases}\sum\limits_{t=0}^{n}\gamma(n-t)\oplus s_2(0)\leftarrow\\ \leftarrow\left(\forall k\in\overline{0,n}\Rightarrow\delta(k)=a_1(k)a_2(k)=1\right),\\ \sum\limits_{t=0}^{m-1}\gamma(n-t)\leftarrow\\ \leftarrow(m\le n)\wedge\\ \wedge\left(\forall k\in\overline{0,m-1}\Rightarrow\delta(k)=1\right)\wedge\\ \wedge(\delta(m)=0).\end{cases}$$

Заключение. Выкладки аналогично переносятся на случай большего числа каналов обслуживания, наличия очередей, а также совместного стохастического поведения параметров каналов обслуживания. Несмотря на значительное усложнение неклассического орграфа СМО явный вид уравнений переходов состояний позволяет проводить имитационное моделирование как в случае простейших, так и произвольных случайных процессов поступления и обработки заявок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Котенко А.П., Букаренко М.Б.* Аналитическое описание систем массового обслуживания с использованием колец вычетов // Труды VII Всероссийской научной конференции “Математическое моделирование и краевые задачи”. Самара: Изд-во СамГТУ, 2010. С. 136-140.
2. *Букаренко М.Б.* Система массового обслуживания с раздельными очередями к каналам // Тезисы 42-й Всероссийской конференции “Современные проблемы математики”. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2011. С. 11-13.
3. *Комарова Е.Д., Котенко А.П.* Исследование транспортной задачи линейного программирования как системы массового обслуживания // Материалы VI Международной научно-практической конференции “Научная дискуссия: вопросы технических наук”. М.: Изд-во “Международный центр науки и образования”, 2013. С. 17-22.
4. *Котенко А.П., Букаренко М.Б.* Комплекс программ имитационного моделирования работы системы массового обслуживания с неоднородными приборами и раздельными накопителями // Вестник СамГТУ. Серия “Физ.-мат. науки”. 2013. №2 (31). С. 50-57.
5. *Котенко А.П., Букаренко М.Б.* Система массового обслуживания с различимыми каналами как конечный автомат // Вестник СамГТУ. Серия “Физ.-мат. науки”. 2012. №3 (28). С. 114-124.
6. *Котенко А.П., Букаренко М.Б.* Математическое моделирование систем массового обслуживания с ис-

пользованием колец вычетов в управлении организационно-экономическими системами // Управление организационно-экономическими системами. Вып. 7. Самара: Изд-во СГАУ, 2010. С. 31-34.

MODELING SYSTEMS FINITE AUTOMATA QUEUING VISIBLE CHANNELS

© 2014 A.P. Kotenko, M.B. Bukarenko

Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov
(National Research University)

Distinct channels queuing systems with servers of different processing capacities and separate queues are considered. In this case the results of classical queuing theory, which suppose that a state graph is a linear "birth and death" process, graph. System with distinct channels is suggested to be described by deterministic and stochastic finite automatons. This approach gives an opportunity to carry out simulation of the system behavior under different variants of entries scheduling.

Key words: queuing system, heterogeneous servers, separate queues servers, finite automaton.

Andrey Kotenko, Candidate of Physics and Mathematical Sciences, docent of Department "Mathematical methods in the economy". E-mail: ako1959@mail.ru
Maxim Bukarenko, assistant of Department "Mathematical methods in the economy".
E-mail: maxim.bukarenko@gmail.com